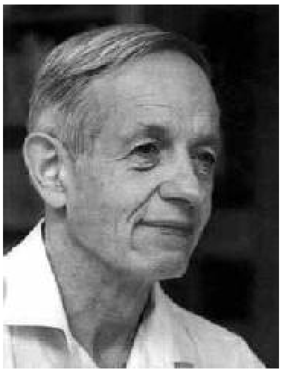
Tema 1. Introducció a la teoria dels jocs no cooperatius

Lliçons 1–12

John von Neumann (1903–1957)
http://en.wikipedia.org/wiki/Von_Neumann

Matemàtic estatunidenc nascut a Budapest. Va escriure amb l'economista Oskar Morgenstern el llibre *Theory of games and economic behavior* (1944), que posava els fonaments de la teoria dels jocs i la desenvolupava com a eina per a l'anàlisi econòmica.



John Forbes Nash, Jr. (1928)
http://en.wikipedia.org/wiki/John_Forbes_Nash

Matemàtic estatunidenc a qui es deu el concepte d'equilibri de Nash, la solució de referència dels jocs simultanis. Juntament amb Reinhard Selten (1930) i John Charles Harsanyi (1920-2000) va rebre al 1994 el *Premi en Ciències Econòmiques del Banc de Suècia* ("Premi Nobel d'Economia").

Reinhard Selten (1930)
http://en.wikipedia.org/wiki/Reinhard_Selten

Economista alemany nascut a Breslàvia. A ell es deu el concepte d'equilibri perfecte en subjocs, la solució de referència dels jocs seqüencials. Juntament amb John Nash (1928) i John Charles Harsanyi (1920-2000) va rebre al 1994 el *Premi en Ciències Econòmiques del Banc de Suècia* ("Premi Nobel d'Economia").

Lliçó 1. Què és un joc simultani?

DEFINICIÓ 1. Els individus d'un grup prenen decisions interdependents quan el resultat per a cada individu de les seves decisions depèn de les decisions dels altres individus.

- Gran part de les decisions que prenem cada dia són interdependents: trucar al telèfon mòbil d'algú, buscar un llibre a la biblioteca, descarregar arxius d'Internet, conduir… Els resultats per a cadascú de nosaltres d'aquestes decisions depenen de les decisions d'altres persones: si ens creuem amb algú que no respecta les normes de circulació és probable que tinguem un accident; el temps de descàrrega d'un arxiu és funció del nombre d'internautes que també demanen la descàrrega; trobar el llibre que busquem dependrà de si algú altre se l'ha emportat; i poder parlar amb algú per telèfon mòbil depèn del nombre d'usuaris que utilitzen la xarxa, de la gestió d'aquesta xarxa que fan les companyies de telefonia i de la decisió del destinatari d'atendre la trucada.

DEFINICIÓ 2. Un joc és un model matemàtic que permet representar i analitzar la presa de decisions interdependents. La teoria dels jocs és una branca de la teoria econòmica (i també de la matemàtica aplicada) que estudia la presa de decisions interdependents.

- Hi ha dos tipus de joc: cooperatius i no cooperatius. En aquest curs només s'estudiaran jocs no cooperatius i "joc" significarà sempre "joc no cooperatiu". A un joc no cooperatiu, els possibles acords entre els individus no són vinculants i, per tant, els individus tenen sempre plena llibertat per a prendre la decisió que vulguin.

- Hi ha dos tipus de joc no cooperatiu: els jocs simultanis i els jocs seqüencials. Als simultanis, els individus prenen decisions ignorant les decisions dels altres individus; als seqüencials, hi ha individus que, quan prenen decisions, saben les decisions que han pres altres individus. Els jocs simultanis són el tipus més simple de joc. Una línia de recerca a la teoria de jocs pretén reduir l'anàlisi de tots els jocs (tant cooperatius com no cooperatius) a l'anàlisi dels jocs simultanis.

- Un joc simultani està format per tres elements: un conjunt d'individus, cadascun dels quals ha de prendre una decisió; per a cada individu, el conjunt de decisions que pot prendre; i, per a cada individu, el resultat de la seva decisió. Les lletres de la paraula "joc" permeten recordar els seus elements: J = *jugadors*; O = *opcions* dels jugadors; i C = *conseqüències* per als jugadors.

EXEMPLE 3. Els jocs simultanis poden ser representats gràficament. La Fig. 1 mostra la representació gràfica d'un joc simultani.

DEFINICIÓ 4. Els individus que prenen decisions a un joc simultani s'anomenen jugadors.

- El joc de la Fig. 1 té dos jugadors. És costum numerar els jugadors i anomenar-los "jugador 1", "jugador 2", "jugador 3", etc.

		Jugador 2		
		c	d	e
Jugador 1	a	1 1	0 0	9 −1
	b	0 5	7 3	8 8

Fig. 1. Exemple d'un joc simultani

DEFINICIÓ 5. Estratègia d'un jugador d'un joc simultani és cadascuna de les decisions que el jugador pot prendre.

- Al joc de la Fig. 1, el jugador 1 té dues estratègies, anomenades a i b. Sense més informació, aquestes estratègies poden representar qualsevol cosa: pujar en ascensor o per les escales; anar a classe o al bar; comprar el diari o no comprar-lo; etc.

- Al joc de la Fig. 1, el jugador 2 té tres estratègies, anomenades c, d i e. La convenció a l'hora de representar un joc simultani amb dos jugadors és llistar les estratègies del jugador 1 en columna a l'esquerra i les del jugador 2 en fila a dalt. Així, la perspectiva del jugador posat a l'esquerra és horitzontal i la del jugador posat a dalt és vertical.

DEFINICIÓ 6. Una jugada a un joc simultani és una assignació a cada jugador d'una de les seves estratègies.

- Una jugada és una manera de combinar les decisions dels jugadors. Cada jugada expressa una forma de jugar el joc (= dir quina estratègia tria cada jugador).

- El joc de la Fig. 1 té sis jugades. Cada jugada del joc és representada per una casella. Per exemple, la casella superior esquerra es troba a la intersecció entre l'estratègia a del jugador 1 i l'estratègia c del jugador 2. Per tal motiu, aquesta casella representa la jugada on el jugador 1 tria a i el jugador 2 tria c. Atès que el jugador 1 té dues estratègies i el jugador 2 en té tres, el producte $2 \times 3 = 6$ dóna el total de jugades del joc.

- Les jugades s'expressen mitjançant vectors. El primer component del vector és l'estratègia del jugador 1 a la jugada; el segon component és l'estratègia del jugador 2; i així successivament quan hi ha més de dos jugadors. Per exemple, al joc de la Fig. 1, la jugada representada per la casella inferior dreta es correspondria amb la jugada (b, e). La jugada (b, e) és aquella on el jugador 1 tria b i el jugador 2 tria e. El vector (c, e) no és cap jugada, perquè una jugada combina una estratègia del jugador 1 amb una altra del jugador 2, i tant c com e són estratègies del jugador 2.

DEFINICIÓ 7. El pagament d'un jugador a una jugada és una avaluació numèrica de totes les conseqüències que resulten per al jugador quan es produeix la jugada. El terme $p_i(s)$ designarà el pagament del jugador i a la jugada s.

- El pagament d'un jugador quan es produeix una jugada mesura el que guanya o perd el jugador, en termes nets, com a conseqüencia de les decisions que tots els jugadors prenen a la jugada. Els pagaments són mesures quantitatives dels resultats del joc.

- Les unitats dels pagaments resten, en principi, indefinides. La situació que representi el joc permetrà identificar en quines unitats es mesuren el pagaments: euros, quotes de mercat, anys de presó, notes d'una assignatura, unitats de "satisfacció"… Depenent de la interpretació dels pagaments, no cal que algú doni físicament els pagaments: si el resultat del joc representa plaer o dolor, un pagament 3 indicaria que el jugador experimenta "3 unitats de plaer" mentre que un pagament de –4 indicaria que el jugador experimenta "4 unitats de dolor".

- Al joc de la Fig. 1, els números a cada casella representen els pagaments dels jugadors. El primer número dels dos que hi ha a cada casella és el pagament del jugador que es posa a l'esquerra (en aquest cas, el jugador 1) en tant que el segon número és el pagament del jugador que apareix a dalt (el jugador 2). A tall d'exemple, el pagament $p_1(a, e)$ del jugador 1 a la jugada (a, e) és 9 i el pagament $p_2(a, e)$ del jugador 2 a la mateixa jugada (a, e) és –1. Això vol dir que si el jugador 1 tria a i el jugador 2 tria e, el jugador 1 rep 9 unitats i el jugador 2 en perd una.

DEFINICIÓ 8. Un joc simultani consisteix en tres elements:
- un conjunt finit i no buit d'individus que prenen decisions anomenats jugadors;
- per a cada jugador, un conjunt finit i no buit de decisions anomenades estratègies; i
- per a cada jugador i per a cada jugada, un número que representa el pagament que obté el jugador quan es juga la jugada.

Exercicis de la Lliçó 1

1. Escriu en forma de vector totes les jugades del joc de la Fig. 1.

2. Representa i llista en forma de vector totes les jugades d'un joc simultani: (i) amb dos jugadors on un jugador té quatre estratègies i l'altre en té només una; (ii) amb dos jugadors on tots dos tenen tres estratègies; i (iii) amb tres jugadors on cada jugador té dues estratègies.

3. Representa un joc simultani amb dos jugadors, un amb 4 estratègies i l'altre amb 2. Representa el joc canviant de posició les estratègies del jugador 1. Fes el mateix canvi als jocs de les Figs. 1 i 3.

4. Què diferencia una estratègia d'una jugada? I què tenen en comú?

5. Pot un joc simultani tenir, en total, més estratègies que jugades? I més jugades que estratègies? Cas que sí, posa exemples.

6. Representa el joc de la Fig. 1 canviant de posició els jugadors. Fes el mateix per al joc de la Fig. 3.

7. Representa un joc simultani amb tres jugadors on cada jugador té dues estratègies. Torna a representar el mateix joc posant un dels jugadors en totes les posicions possibles.

Lliçó 2. Com es construeix un joc simultani?

Aquesta lliçó il·lustra com representar cadascuna de les situacions que es descriuen als Exemples 1 i 2 mitjançant un joc simultani.

EXEMPLE 1. Els estudiants d'un curs de Microeconomia I fan un examen consistent en problemes numèrics. El professor observa que els dos únics estudiants que obtenen correctament les solucions lliuren fulls de respostes idèntics. Crida els estudiants i els informa que cadascú ha de decidir en aquell moment si acusar o no acusar l'altre estudiant de copiar. Si tots dos estudiants acusen l'altre, ambdós suspenen amb un 4. Si cap dels dos no acusa l'altre, el professor, tot i tenir sospites que algú ha copiat, no els pot suspendre, però pot ajustar la correcció per a què tots dos aprovin només amb un 5. I si només un dels dos acusa l'altre, qui acusa obté un 10 i qui no acusa obté un 0.

• **Pas 1 de 3**: <u>determinar els jugadors</u>. Tot i que hi ha tres persones involucrades (professor i dos estudiants), els qui han de prendre decisions són els estudiants. El professor posa les notes però no és lliure de posar qualssevol notes, ja que les decisions que prenen els estudiants determinen completament les notes que posa el professor. Només compten com a jugadors aquells agents que poden lliurement triar qualsevol de les opcions disponibles i el professor, tal i com es descriu la situació, no és lliure de posar la nota que vulgui un cop els estudiants prenen les seves decisions. Anomenem "jugador 1" i "jugador 2" als dos estudiants (també podríem haver-los anomenat "estudiant 1" i "estudiant 2").

		Jugador 2	
		A	N
Jugador 1	A		
	N		

Fig. 2. El joc de l'Exemple 1 sense pagaments

		Jugador 2	
		A	N
Jugador 1	A	4 4	10 0
	N	0 10	5 5

Fig. 3. El joc de l'Exemple 1

• **Pas 2 de 3**: <u>especificar les estratègies de cada jugador</u>. Tots dos jugadors tenen les mateixes dues estratègies: acusar o no acusar. És costum abreujar el nom de les estratègies. Anomenem A l'estratègia consistent en acusar i anomenem N l'estratègia consistent en no acusar. Un cop sabuts el nombre de jugadors i el conjunt d'estratègies de cada jugador, es pot representar la matriu del joc simultani. La Fig. 2 mostra aquesta matriu. Cada casella de la matriu representa una jugada del joc. El joc resultant tindrà, per tant, 4 jugades: (A, A), (A, N), (N, A) i (N, N). Les 4 jugades identifiquen tant les 4 maneres de jugar el joc com els 4 possibles resultats de jugar-lo.

• **Pas 3 de 3**: <u>assignar pagaments als jugadors a cada jugada</u>. Per a acabar de construir el joc, cal assignar pagaments als jugadors: cada jugada ha d'indicar quin pagament obté el jugador quan es realitza la jugada. A l'Exemple 1, els pagaments són notes. No és obligatori que els pagaments de tots els jugadors estiguin mesurats en les mateixes unitats: si la situació de l'exemple fos tal que el professor fos un jugador més, els seus pagaments probablement estarien mesurats en altres unitats. Quan tots dos jugadors s'acusen mútuament, el resultat és que tots dos obtenen un 4. Això significa que el vector de pagaments de la jugada (*A*, *A*) és (4, 4), on el primer pagament correspon al jugador 1 i el segon correspon al jugador 2. Quan un acusa i l'altre no, qui acusa obté un 10 i qui és acusat obté un 0. D'aquí que el vector de pagaments de la jugada (*A*, *N*) sigui (10, 0) i el de la jugada (*N*, *A*) sigui (0, 10). Si ningú no acusa, la jugada resultant és (*N*, *N*) i el vector de pagaments és (5, 5). La Fig. 3 presenta el joc simultani obtingut.

- La construcció del joc de la Fig. 3 s'ha fet seguint el costum segons el qual la perspectiva del jugador situat a l'esquerra és horitzontal i la del situat a dalt és vertical. Així, si 1 tria *A* pot obtenir un 4 o un 10; i si tria *N*, un 0 o un 5. D'altra banda, si 2 tria *A*, pot obtenir un 4 o un 10; i si tria *N*, un 0 o un 5. També es podria haver posat el jugador 1 a dalt i el 2 a l'esquerra, però en aquest cas podria ser que alguns vectors de pagaments fossin diferents dels indicats a la Fig. 3 (Exercici 6 de la Lliçó 1).

- L'ordre en què es llisten les estratègies dels jugadors a les Figs. 2 i 3 és arbitrari: es tractaria del mateix joc si, per al jugador 1, en comptes de posar a dalt *A* i a baix *N*, les estratègies permutessin la posició. Però aleshores caldria reassignar els pagaments seguint el canvi en l'ordre de les estratègies (Exercici 3 de la Lliçó 1).

EXEMPLE 2. Un professor ha d'avaluar una estudiant mitjançant un examen escrit. El professor pot posar un examen fàcil (estratègia *F*) o difícil (estratègia *D*). L'estudiant pot estudiar (estratègia *E*) o no estudiar (estratègia *N*). La jugada més preferida pel professor és (*F*, *E*): ell el posa fàcil i ella estudia. Després vénen, per ordre, les jugades (*D*, *E*), (*D*, *N*) i (*F*, *N*). La preferència de l'estudiant sobre les jugades és, de més a menys: (*F*, *E*), (*F*, *N*), (*D*, *N*) i (*D*, *E*).

- **Pas 1 i Pas 2.** La matriu del joc que representaria l'Exemple 2 es mostra a la Fig. 4. En aquest cas, en comptes d'anomenar els jugadors 1 i 2, se'ls anomena "professor" i "estudiant". Es pot fer de les dues maneres, triant la que més convingui.

- **Pas 3.** L'Exemple 2 es diferencia de l'Exemple 1 en no especificar pagaments. Tot i així, podem associar un joc amb l'Exemple 2 sabent que el fet que un jugador prefereixi una jugada a una altra significa que el pagament de la primera jugada serà superior al de la segona. Per tant, <u>triarem, per a cada jugador, 4 números a l'atzar i els assignarem a les jugades respectant l'ordre de preferència dels jugadors per les jugades</u>.

		Estudiant	
		E	*N*
Professor	*F*		
	D		

Fig. 4. El joc de l'Exemple 2 sense pagaments

		Estudiant	
		E	*N*
Professor	*F*	4 4	1 3
	D	3 1	2 2

Fig. 5. Un joc associat amb l'Exemple 2

Triem, per al professor, el números 1, 2, 3 i 4. Assignem el valor més gran (el 4) com a pagament a la jugada més preferida del professor, (*F*, *E*). Prenguem el segon valor més gran (el 3) i assignem-lo a la segona jugada més preferida del professor, (*D*, *E*). I així successivament. Fem després el mateix en el cas de l'estudiant. Els números triats per a l'estudiant també han estat 1, 2, 3 i 4 però podríem haver estat uns altres. La Fig. 5 mostra el joc resultant.

Exercicis de la Lliçó 2

Representa cadascuna de les següents situacions com a joc simultani.

1. <u>El dilema dels viatgers</u> (Kaushik Basu). Una companyia aèria perd dues antiguitats idèntiques de dos viatgers. Un gerent de la companyia estima que el preu de l'antiguitat és de 1000 €, 2000 € o 3000 €. Reuneix els dos viatgers i els demana que anotin a un paper, per separat i sense consultar-se, un dels tres valors anteriors. El gerent els informa que si tots dos declaren el mateix preu, entendrà que diuen la veritat i rebran aquest preu com a indemnització. I afegeix que si indiquen preus diferents, assumirà que qui diu el preu més alt menteix. En tal cas, no s'indemnitzarà a qui entén que menteix i premiarà a l'altre viatger amb una indemnització que serà el triple del preu declarat.

2. (i) Un davanter ha de llençar dos penals, cadascun llençat a la dreta o a l'esquerra. El porter s'ha de llençar a la dreta o a l'esquerra. Hi ha gol si la pilota es llença en una direcció i el porter es llença en la contrària. Per cada gol aconseguit, el porter paga al davanter 100 €. Si el llençament no és gol, el davanter paga 100 € al porter. (ii) Com seria el joc si només es llencés un penal?

3. El viatger d'un tren decideix si comprar bitllet o no. L'interventor del tren decideix si demanar el bitllet al viatger o no. Quines creus que són les "preferències naturals" sobre les jugades de viatger i interventor? Representa la situació com a joc simultani amb les preferències sobre les jugades que has considerat "naturals".

4. L'Exemple 2 amb pagaments que no siguin 1, 2 3 i 4, i que siguin diferents per a cada jugador.

5. <u>El joc de la revelació</u> (Steven Brams). Tenim una persona i Déu. Déu decideix si revelar o no la seva existència a la persona. La persona decideix si creure o no en Déu. Déu prefereix que la persona cregui en la seva existència a que no cregui; i, cregui o no cregui, prefereix no revelar-se a revelar-se. La persona prefereix creure en Déu a no creure quan Déu es revela (prefereix una creença confirmada per l'evidència) i, es produeixi o no la revelació, prefereix creure en Déu a no creure.

6. Dos estudiants de Microeconomia I s'adonen que cap d'ells no està entenent res del que explica el professor. Ignorant què decideix l'altre, cadascú decideix si calla o si atura l'explicació del professor i pregunta el dubte. Si cap dels estudiants no pregunta, la mesura del seu benestar és –1. Quan només un dels dos pregunta, la resposta del professor resol el dubte i, com a conseqüència, tots dos augmenten tres unitats el seu benestar respecte de l'estat on cap dels dos no pregunta. Però qui pregunta sent tanta vergonya per haver preguntat que, a banda del benefici que obté per resoldre el dubte, experimenta una pèrdua afegida de quatre unitats. I si tots dos pregunten es neutralitza parcialment "l'efecte vergonya" i cada estudiant augmenta dues unitats el seu benestar respecte de l'estat on cap dels dos no pregunta.

7. Dos estudiants comparteixen pis. El pis necessita neteja i tots dos han de decidir si fer neteja pel seu compte o no. El pitjor per a tots dos és que no es faci neteja. El millor per a cada estudiant és no fer neteja i que la faci l'altre. I si un fa neteja prefereix que l'altre s'hi afegeixi a que no.

Lliçó 3. Dominància entre estratègies d'un jugador

DEFINICIÓ 1. A un joc simultani amb dos jugadors, anomenats i i j, l'estratègia a del jugador i domina l'estratègia b del mateix jugador si, per a tota estratègia c del jugador j, la jugada (a, c) dóna al jugador i un pagament més gran que la jugada (b, c); això és, a domina b si, per a tota estratègia c del jugador j, $p_i(a, c) > p_i(b, c)$.

- Que a domini b significa que, jugui el que jugui l'altre jugador, canviar de l'estratègia a a l'estratègia b fa sempre disminuir el pagament del jugador que tria entre a i b.

- Com a il·lustració, al joc de la Fig. 1, l'estratègia c del jugador 2 domina l'estratègia d del mateix jugador. La raó és que, triï l'estratègia que triï el jugador 1, el jugador 2 obté sempre un pagament més gran triant c que triant d. Comprovem-ho.
  • Si el jugador 1 tria b, escollir c representa per al jugador 2 obtenir un pagament de 5, en tant que escollir d representa per a 2 obtenir només 3. Per tant, quan 1 tria b, és millor per al jugador triar c que triar d (observa que, si 1 tria b, la millor opció per a 2 és triar e, que proporciona un pagament de 8). En resum, $p_2(b, c) > p_2(b, d)$.
  • Si el jugador 1 tria a, escollir c torna a ser millor per a 2 que escollir d: donat a, escollir c fa que 2 obtingui un pagament d'1 i escollir d fa que el pagament de 2 sigui 0. Així que $p_2(a, c) > p_2(a, d)$. Per tant, triï 1 el que triï (ja sigui a o b), c és millor que d per a 2. Això vol dir que c domina d.

PROPOSICIÓ 2. *La relació de dominància entre estratègies d'un jugador és*

- *irreflexiva: cap estratègia no es domina a sí mateixa;*
- *asimètrica: si l'estratègia a domina l'estratègia b aleshores b no domina a; i*
- *transitiva: si a domina b i b domina c aleshores a domina c.*

DEFINICIÓ 3. A un joc simultani amb dos jugadors, una estratègia d'un jugador és una estratègia dominant si l'estratègia domina totes les altres estratègies del jugador.

- Que un jugador i tingui una estratègia dominant significa que, faci el que faci el jugador $j \neq i$, triar l'estratègia dominant sempre proporcionarà a i més pagament que qualsevol altra estratègia. Tenir una estratègia dominant vol dir que la millor elecció no depèn de l'elecció de l'oponent: l'estratègia dominant és sempre la millor elecció.

- Per exemple, al joc de la Fig. 1, el jugador 1 no té cap estratègia dominant: si el jugador 2 tria c, el millor per a 1 és triar a (si tria a obté 1 i si tria b obté 0); però si 2 tria d, el millor per a 1 és triar b (si tria a obté 0 i si tria b obté 7). En conseqüència, 1 no té cap estratègia que, faci el que faci 2, li proporcioni més pagament que qualsevol altra estratègia: la millor elecció per al jugador 1 depèn del que escull el jugador 2.

- Al mateix joc de la Fig. 1, el jugador 2 tampoc no té cap estratègia dominant: si el jugador 1 tria a, el millor per a 2 és triar c (si tria c obté 1, si tria d obté 0 i si tria d obté −1); però si 1 tria b, el millor per a 2 és triar e (si tria c obté 5, si tria d obté 3 i si tria e obté 8). Per tant, 2 no té cap estratègia que, faci el que faci 1, li proporcioni més pagament que qualsevol altra estratègia. Això significa que la millor elecció per al jugador 2 depèn del que escull el jugador 1.

- Si, al joc de la Fig. 1, el pagament del jugador 1 a la jugada (a, d) fos 8 en comptes de 0, aleshores a seria una estratègia dominant per al jugador 1. Al joc de la Fig. 3, A és una estratègia dominant per al jugador 2, ja que $p_2(A, A) > p_2(A, N)$ i $p_2(N, A) > p_2(N, N)$. Que $p_2(A, A) > p_2(A, N)$ vol dir que és millor per a 2 triar A que triar N quan 1 tria A, i $p_2(N, A) > p_2(N, N)$ vol dir que és millor per a 2 triar A que triar N quan 1 tria N. Així, triï el que triï 1, A és millor per a 2 que qualsevol altra estratègia. Això és, A és una estratègia dominant per al jugador 2. Comprova que A també és dominant per a 1.

PROPOSICIÓ 4. *Un jugador d'un joc simultani amb dos jugadors* <u>*no pot tenir més d'una estratègia dominant*</u>*: o en té una o no en té cap.*

- *Demostració.* La demostració és per reducció a l'absurd: assumim que un jugador té dues estratègies dominants i tractem d'arribar a una contradicció. Suposem que a i b són totes dues estratègies dominants d'un jugador. Seleccionem arbitràriament una estratègia de l'altre jugador. Sigui c aquesta estratègia. Atès que a és una estratègia dominant, a domina b. Per tant, el pagament del jugador a la jugada (a, c) és més gran que el seu pagament a la jugada (b, c). Però que b sigui estratègia dominant implica que b domina a i, en conseqüència, el pagament del jugador a la jugada (b, c) és més gran que el seu pagament a la jugada (a, c): contradicció.■

DEFINICIÓ 5. A un joc simultani amb 2 jugadors, una estratègia a d'un jugador és una <u>estratègia dominada</u> si existeix alguna altra estratègia b del mateix jugador tal que l'estratègia b domina l'estratègia a.

- Que una estratègia sigui <u>dominant</u> vol dir que aquesta estratègia és la <u>millor</u> estratègia de què disposa el jugador. En canvi, que una estratègia sigui <u>dominada</u> vol dir que aquesta estratègia <u>mai no és una "bona" opció</u>, ja que hi ha una altra que sempre proporciona al jugador un pagament més gran.

- Per a un jugador que vulgui obtenir el pagament més alt possible, tot porta a jugar una estratègia dominant i res (en principi) no justifica jugar una estratègia dominada.

- Al joc de la Fig. 1, c domina d. Per aquesta raó, d és una estratègia dominada. D'altra banda, ni c domina e ni tampoc d domina e. D'aquí resulta que e no és una estratègia dominada. Tampoc no és c una estratègia dominada, ja que ni d domina c ni e domina c. Així, 2 té una estratègia dominada (d) i, atès que ni c domina e ni e domina c, 2 no té cap estratègia dominant. En el cas del jugador 1, $p_1(a, c) > p_1(b, c)$ –això vol dir que a és millor que b quan es juga c– però $p_1(a, d) < p_1(b, d)$ –b és millor que a quan es juga d–. Per tant, ni a domina b ni b domina a i 1 no té estratègies dominades ni dominants.

PROPOSICIÓ 6. *Un jugador d'un joc simultani amb 2 jugadors* <u>*no pot tenir totes les estratègies dominades*</u>*: si el jugador té n estratègies, el nombre mínim d'estratègies dominades és 0 i el màxim és $n-1$.*

DEFINICIÓ 7. Quan hi ha més de 2 jugadors, l'estratègia *a* d'un jugador domina l'estratègia *b* del mateix jugador si, per a tota assignació *c* d'estratègies a la resta de jugadors, la jugada (*a*, *c*) dóna al jugador un pagament més gran que la jugada (*b*, *c*).

	Jugador 3: *e*		*f*		*g*	
Jugador 1 \ Jugador 2	*c*	*d*	*c*	*d*	*c*	*d*
a	0 1 5	0 0 0	0 3 0	0 2 3	0 2 1	1 1 4
b	1 2 0	0 1 0	0 2 1	0 1 2	0 4 2	0 3 3

Fig. 6. Un joc simultani amb tres jugadors

- Al joc de la Fig. 6, el jugador 1 tria fila (estratègies *a* o *b*), el jugador 2 tria columna (estratègies *c* o *d*) i el jugador 3 tria matriu (estratègies *e*, *f* o *g*). El primer número a cada casella és el pagament del jugador 1; el segon, el del jugador 2; i el tercer, el del jugador 3. Per exemple, si 1 tria *b*, 2 tria *c* i 3 tria *g*, es produeix la jugada (*b*, *c*, *g*); en aquesta jugada, 1 obté 0, 2 obté 4 i 3 obté 2.

- Considerem les estratègies *a* i *b* del jugador 1. Per a determinar si *a* domina *b*, cal considerar totes les maneres en què la resta de jugadors poden jugar el joc. Aquestes maneres coincidirien amb les jugades que resultarien si només juguessin els jugadors 2 i 3. Atès que 2 pot triar entre dues estratègies i 3 pot triar entre tres estratègies, els jugadors 2 i 3 poden jugar de sis maneres diferents: (*c*, *e*), (*c*, *f*), (*c*, *g*), (*d*, *e*), (*d*, *f*) i (*d*, *g*), on el primer component identifica l'estratègia del jugador 2 i el segon la del 3. Per a cada jugador, anomenem jugada parcial a cadascuna de les maneres de jugar el joc que tenen els rivals del jugador. Les 6 maneres anteriors serien jugades parcials.

	Jugador 3: *e*		*f*		*g*	
Jugador 1 \ Jugador 2	*c*	*d*	*c*	*d*	*c*	*d*
a	0 1 5	0 0 0	0 3 0	0 2 3	0 2 1	1 1 4
b	1 2 0	0 1 0	0 2 1	0 1 2	0 4 2	0 3 3

Fig. 7. Per a què *a* domini *b* cal, per a cada fletxa, que el valor inicial sigui més gran que el final

- Per a què a domini b cal que la jugada obtinguda d'afegir a a les sis jugades parcials anteriors proporcioni al jugador 1 un pagament més gran que la jugada obtinguda d'afegir b. De manera equivalent, a domina b si se satisfan sis desigualtats: $p_1(a, c, e) > p_1(b, c, e)$; $p_1(a, c, f) > p_1(b, c, f)$; $p_1(a, c, g) > p_1(b, c, g)$; $p_1(a, d, e) > p_1(b, d, e)$; $p_1(a, d, f) > p_1(b, d, f)$; i $p_1(a, d, g) > p_1(b, d, g)$. Gràficament, es tracta de comprovar que <u>cada</u> número del que surten les fletxes de la Fig. 7 és més gran que el número al que s'adrecen. És obvi que a no domina b. L'estratègia b dominaria a si cada número al que s'adrecen les fletxes fos més gran que cada número del qual surten. Clarament, b no domina a.

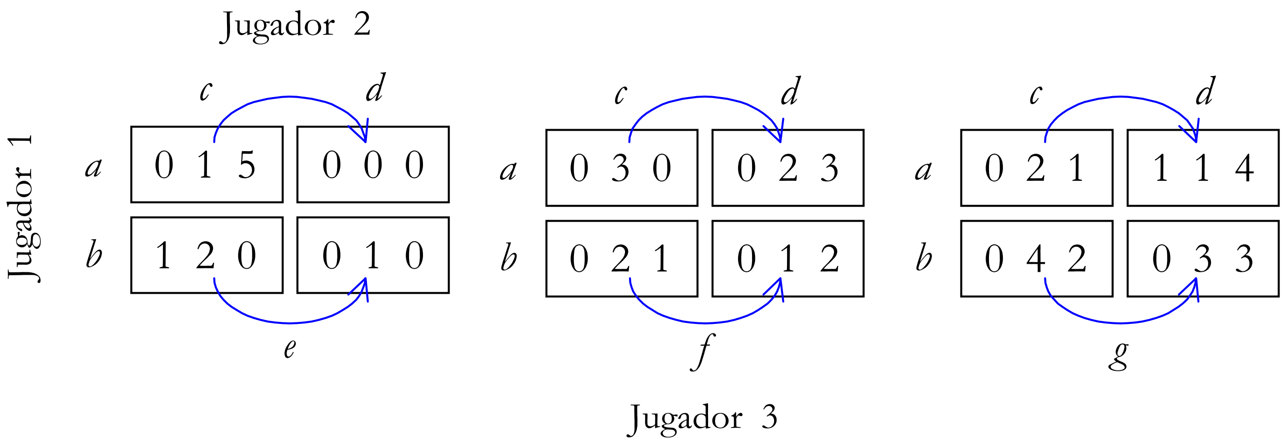


Fig. 8. Per a què c domini d cal, per a cada fletxa, que el valor inicial sigui més gran que el final

- Si considerem les estratègies c i d del jugador, un argument similar mostra que c domina b si se satisfan les 6 desigualtats següents: $p_2(a, c, e) > p_2(a, d, e)$; $p_2(a, c, f) > p_2(a, d, f)$; $p_2(a, c, g) > p_2(a, d, g)$; $p_2(b, c, e) > p_2(b, d, e)$; $p_2(b, c, f) > p_2(b, d, f)$; i $p_2(b, c, g) > p_2(b, d, g)$. La Fig. 8 mostra què signifiquen aquestes condicions gràficament: per a què c domini d cal que, per a <u>tota</u> fletxa, el número del que parteix la fletxa sigui més gran que el número al qual arriba la fletxa. En aquest cas, c domina d: per a <u>cada</u> jugada parcial dels rivals, per al jugador 2 triar c <u>sempre</u> dóna <u>més</u> pagament que triar d.

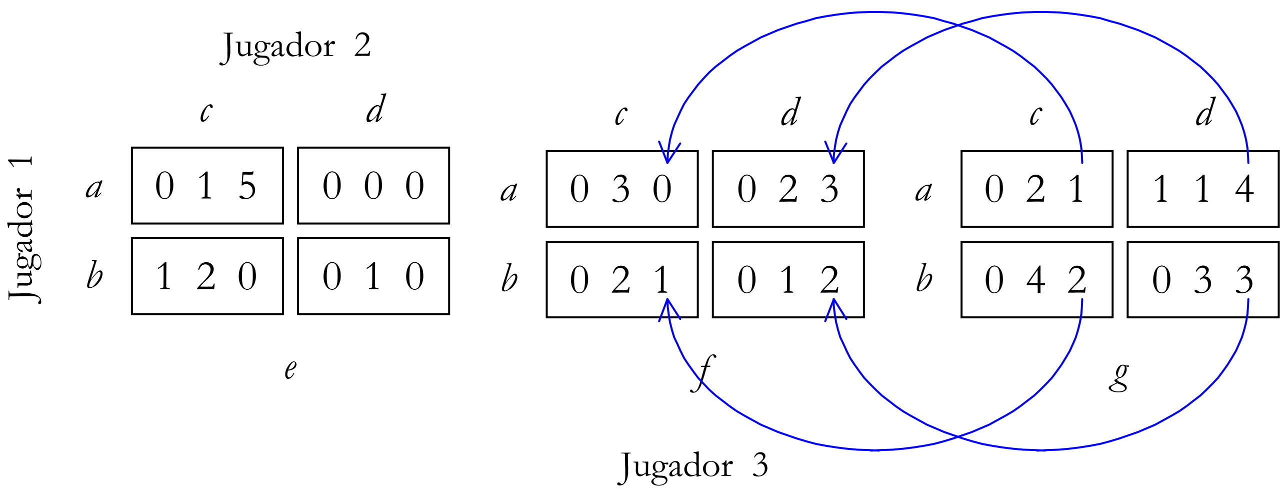


Fig. 9. Per a què g domini f cal, per a cada fletxa, que el valor inicial sigui més gran que el final

- ➤ En el cas del jugador 3, triem només dues estratègies; per exemple, f i g. En aquest cas, els rivals de 3 només poden jugar de 4 maneres: les jugades parcials serien (a, c), (a, d), (b, c) i (b, d). Ara, g domina f si se satisfan les 6 desigualtats següents (f domina g si se satisfan les desigualtats inverses): $p_3(a, c, g) > p_3(a, c, f)$; $p_3(a, d, g) > p_3(a, d, f)$; $p_3(b, c, g) > p_3(b, c, f)$; i $p_3(b, d, g) > p_3(b, d, f)$. La Fig. 9 mostra què signifiquen aquestes condicions gràficament: per a què g domini f cal que, per a <u>tota</u> fletxa, el número del que parteix la fletxa sigui més gran que el número al qual arriba la fletxa. És clar que g domina f.

REMARCA 8. Les definicions d'estratègia dominant i dominada donades per a jocs amb 2 jugadors són vàlides per a jocs simultanis amb més de dos jugadors. Les Proposicions 2, 4 i 6 també són vàlides per a jocs amb més de dos jugadors.

Exercicis de la Lliçó 3

1. Comprova que, al joc de la Fig. 1, ni c ni e són estratègies dominades.

2. Demostra la Proposició 2.

3. Al joc de la Fig. 1, modifica un pagament del jugador 2 per a què el jugador 1 tingui una estratègia dominant.

4. Al joc de la Fig. 1, modifica un pagament del jugador 1 per a què el jugador 1 tingui una estratègia dominant.

5. Construeix un joc simultani amb dos jugadors i tres estratègies cadascun on: (i) totes les estratègies d'un dels jugadors són dominants; (ii) totes les estratègies d'un dels jugadors són dominades; (iii) cada jugador té dues estratègies dominades; (iv) un jugador té dues estratègies dominades i l'altre té una de dominant; (v) un jugador té dues estratègies dominades i l'altre només una; (vi) tots dos tenen una estratègia dominada; (vii) tots dos tenen una estratègia dominant; (viii) cap jugador no té cap estratègia dominant però tots dos tenen una de dominada; (ix) cap jugador no té alguna estratègia dominada però tots dos tenen una de dominant; (x) cap jugador no té alguna estratègia dominant.

6. Construeix un joc simultani on un jugador no té cap estratègia dominada i on l'altre jugador té totes les seves estratègies dominades tret d'una.

7. Demostra que no pot ser que totes les estratègies d'un jugador d'un joc simultani siguin estratègies dominades.

8. Obté les estratègies dominants i dominades a cada joc construït als exercicis de la Lliçó 2.

9. Determina totes les estratègies dominants i dominades als següents jocs.

1 \ 2	c	d
a	4 5	4 5
b	4 5	4 5

(i)

1 \ 2	c	d
a	1 1	1 0
b	1 0	0 0

(ii)

1 \ 2	c	d
a	2 5	3 4
b	0 –1	6 0

(iii)

1 \ 2	c	d
a	1 1	1 1
b	1 1	1 1

(iv)

1 \ 2	c	d
a	0 1	4 0
b	2 0	0 3

(v)

1 \ 2	c	d
a	1 4	2 3
b	3 2	4 1

(vi)

10. Determina totes les estratègies dominants i dominades al joc de la Fig. 6 si, a cada casella, es permuten el segon i el tercer pagaments.

Lliçó 4. Una solució per als jocs simultanis basada en la dominància

DEFINICIÓ 1. Un jugador d'un joc es diu racional si tria la seva estratègia amb l'objectiu d'aconseguir el pagament més alt possible.

DEFINICIÓ 2. Una solució per als jocs simultanis és una regla que, assumint els jugadors racionals, assigna a cada joc simultani un conjunt de jugades del joc.

- La interpretació és que el conjunt de jugades que selecciona una solució expressa les formes "raonables" de jugar el joc per part de jugadors racionals.

- Les jugades que selecciona una solució a un joc són la predicció que realitza la solució sobre com jugadors racionals jugaran el joc.

DEFINICIÓ 3. L'eliminació successiva d'estratègies dominades d'un joc simultani consisteix en: (i) per a cada jugador, eliminar totes les seves estratègies dominades; (ii) en el joc que resulta després d'aplicar el pas (i), tornar a eliminar, per a cada jugador, totes les seves estratègies dominades; (iii) en el joc que resulta després d'aplicar el pas (ii), tornar a eliminar, per a cada jugador, totes les seves estratègies dominades; i (iv) així successivament fins que s'obtingui un joc on cap jugador no tingui cap estratègia dominada.

PROPOSICIÓ 4. *L'eliminació successiva d'estratègies dominades pot no eliminar cap estratègia d'un jugador però en cap cas les pot eliminar totes.*

DEFINICIÓ 5. Una jugada d'un joc simultani s'anomena admissible si sobreviu l'eliminació successiva d'estratègies dominades.

EXEMPLE 6. Al joc de la Fig. 1, el jugador 1 no té cap estratègia dominada. En canvi, el jugador 2 en té una: *d*. Si *d* s'elimina, resulta el joc de la Fig. 10. En aquest joc, el jugador 2 no té cap estratègia dominada, però el jugador ara en té una: *b*. Eliminada *b*, s'obté el joc de la Fig. 11. En aquest joc, el jugador 1 només té una estratègia i, per tant, no pot ser dominada. D'altra banda, *e* esdevé una estratègia dominada pel jugador 2. Després d'eliminar *e*, resulta el joc de la Fig. 12, on tots dos jugadors tenen una única estratègia. Això posa fi al procés d'eliminació d'estratègies. En ser la jugada (*a*, *c*) l'única que sobreviu l'eliminació successiva d'estratègies dominades, (*a*, *c*) és l'única jugada admissible del joc de la Fig. 1.

Jugador 1 \ Jugador 2	*c*	*e*
a	1 1	9 −1
b	0 5	8 8

Fig. 10. Primera etapa d'eliminació

Jugador 1 \ Jugador 2	*c*	*e*
a	1 1	9 −1

Fig. 11. Segona etapa

Jugador 1 \ Jugador 2	*c*
a	1 1

Fig. 12. Tercera etapa

EXEMPLE 7. Al joc de la Fig. 6, s'eliminarien inicialment *d* i *f*, totes dues alhora. S'obtindria el joc de la Fig. 13, on no es poden eliminar més estratègies. D'aquí resulta que les jugades (*a*, *c*, *e*), (*a*, *c*, *g*), (*b*, *c*, *e*) i (*b*, *c*, *g*) són les jugades admissibles del joc de la Fig. 6.

Jugador 2 / Jugador 1 / Jugador 3

Jugador 1	*c* (Jugador 3: *e*)	*c* (Jugador 3: *g*)
a	0 1 5	0 2 1
b	1 2 0	0 4 2

Fig. 13. Jugades admissibles del joc de la Fig. 6

Jugador 1 \ Jugador 2	*d*	*e*	*f*
a	5 5	0 4	4 7
b	7 1	1 2	5 0
c	6 4	0 2	8 3

Fig. 14

REMARCA 8. <u>Les jugades admissibles constitueixen una solució per als jocs simultanis</u>: la solució que assigna a cada joc el conjunt de les seves jugades admissibles.

- Què justifica considerar com a solució les jugades admissibles? D'entrada, no sembla raonable que les jugades que contenen alguna estratègia dominada siguin escollides per una solució. Per exemple, al joc de la Fig. 1, no sembla raonable que una solució inclogui les jugades (*a*, *d*) o (*b*, *d*), perquè *d* és dominada per *c*. Un jugador racional no faria cas de la recomanació de jugar *d*, atès que *c* és sempre millor que *d*. Per tant, *d* és una estratègia que no hi ha motiu per a triar i eliminar-la no hauria de canviar res per al jugador 2.

- El següent pas del raonament inclou als propis jugadors. Si un jugador sap que els seus oponents són racionals, sap també que no triaran estratègies dominades i, en conseqüència, pot assumir que les estratègies dominades dels oponents són com si no existissin. En el cas del joc de la Fig. 1, si 1 sap que 2 és racional, 1 conclourà que 2 mai no triarà *d* i, així, cap jugada on *d* es juga és, a la pràctica, possible. En particular, 1 sap que no pot aspirar a obtenir el pagament 7, perquè obtenir-lo requereix que 2 es comporti irracionalment triant l'estratègia dominada *d*.

- Els arguments anteriors justifiquen que els jugadors del joc de la Fig. 1 considerin que el joc que realment juguen és el de la Fig. 10. En aquest punt, podem tornar a aplicar el mateix raonament al joc de la Fig. 10. En aquest joc, *b* és dominada i 1 mai no la jugarà. El jugador 2, anticipant això, s'adona que el joc rellevant per a ell és el de la Fig. 11, on *e* és dominada. Tot plegat, condueix a l'única jugada admissible (*a*, *c*).

PROPOSICIÓ 9. *Tot joc simultani té almenys una jugada admissible però també és possible que totes les jugades d'un joc simultani siguin admissibles.*

PROPOSICIÓ 10. *Si un jugador té una estratègia dominant aleshores aquesta és l'única estratègia del jugador que és part d'alguna jugada admissible.*

- *Demostració*. Si un jugador té una estratègia dominant aleshores totes les altres estratègies són dominades i s'eliminen en la primera etapa del procés d'eliminació d'estratègies dominades. Això implica eliminar totes les jugades on no surt l'estratègia dominant del jugador. Com a resultat, per la Proposició 9, totes les jugades admissibles inclouen només l'estratègia dominant del jugador.■

REMARCA 11. Si construïm un joc simultani a l'atzar (amb tants jugadors con vulguem i tantes estratègies per a cada jugador com desitgem), és pràcticament segur que cap jugador no tindrà cap estratègia dominada (ni, per tant, cap estratègia dominant).

- La Remarca 11 evidencia que la solució que defineixen les jugades admissibles no és, en general, de gaire ajuda. <u>La utilitat d'una solució rau en la seva capacitat de simplificar el problema d'elecció d'estratègia dels jugadors</u>. Però si una solució diu que, en un determinat joc, totes les jugades poden succeir, llavors la solució, al menys per a aquell joc, és trivial: tot és solució. Això passa, per exemple, al joc de la Fig. 5, on totes les jugades són admissibles. La Remarca 11 diu que casos com el joc de la Fig. 1 (que només té una jugada admissible i on la solució associada amb les jugades admissibles fa una predicció/recomenació precisa) són excepcionals.

Exercicis de la Lliçó 4

1. Imagina que un jugador té una estratègia dominant. Significa això que totes les jugades on es juga l'estratègia dominant són admissibles? Si no és així, posa un exemple.

2. Obté totes les jugades admissibles dels següents jocs i del joc de la Fig. 14.

1 \ 2	*e*	*f*	*g*	*h*
a	4 7	0 0	–2 8	9 7
b	5 0	2 3	–1 4	9 3
c	3 1	3 2	3 1	9 0
d	0 0	5 1	0 –1	9 –2

1 \ 2	*e*	*f*	*g*	*h*
a	0 5	1 1	1 1	2 1
b	1 1	3 0	0 3	1 2
c	0 5	1 1	1 1	2 1
d	2 2	3 6	4 3	1 2

3. Construeix un joc simultani amb tres jugadors i tres estratègies cadascun tal que: (i) hi ha una única jugada admissible; i (ii) a cada etapa del procés d'eliminació d'estratègies dominades s'elimina només una estratègia.

4. Considera el joc (i). (a) Dóna un valor a x que faci que b sigui dominant. (b) Dóna un valor a x que faci que b sigui dominada. (c) Dóna valors a x i y per a què (b, c) sigui l'única jugada admissible. (d) Dóna valors a x i y per a què (b, c) no sigui admissible.

1 \ 2	*c*	*d*
a	0 5	1 1
b	x y	3 0

(i)

1 \ 2	*c*	*d*
a	1 1	y 1
b	0 x	1 2

(ii)

1 \ 2	*c*	*d*
a	x y	y x
b	0 0	1 1

(iii)

5. Contesta a les mateixes preguntes que a l'Exercici 4 però considerant els jocs (ii) i (iii).

6. Dóna valors a x i y als jocs (i), (ii), (iii) per a què: (a) només hi hagi una jugada admissible; (b) només hi hagi tres jugades admissibles; i (c) totes les jugades siguin admissibles.

Lliçó 5. Equilibri de Nash d'un joc simultani

DEFINICIÓ 1. A un joc simultani amb 2 jugadors, *i* i *j*, l'estratègia *a* del jugador *i* és una millor resposta a l'estratègia *b* del jugador *j* si, per a tota estratègia *c* del jugador *i*, $p_i(a, b) \geq p_i(c, b)$.

- De manera equivalent, l'estratègia *a* del jugador *i* és una millor resposta a l'estratègia *b* del jugador *j* si no existeix cap altra estratègia *c* del jugador *i* tal que $p_i(c, b) > p_i(a, b)$. Això diu que *a* és una millor resposta a *b* si, donat que *b* es tria, el jugador que tria *a* no pot augmentar el seu pagament canviant l'estratègia *a* per una altra estratègia.

- Quan *a* és una millor resposta a *b*, mentre *b* es jugui, el jugador que tria *a* no necessita considerar jugar una estratègia diferent d'*a*: si el rival tria *b*, el jugador que tria *a* ja aconsegueix, triant *a*, el màxim pagament que és possible quan es juga *b*. A la Fig. 1, per exemple, *d* no és una millor resposta a *a*: donat *a*, *c* dóna més pagament a 2 que *d*. En canvi, tant *c* com *d* són millors respostes a *b* al joc (ii) de l'Exercici 9 de la Lliçó 3.

PROPOSICIÓ 2. Si l'estràtegia *a* del jugador *i* domina l'estratègia *b* del mateix jugador llavors *b* no pot ser una millor resposta a cap estratègia del jugador *j*.

PROPOSICIÓ 3. Si l'estràtegia *a* del jugador *i* és una estratègia dominant aleshores *a* és l'única millor resposta a cada estratègia del jugador *j*.

DEFINICIÓ 4. Un equilibri de Nash d'un joc simultani amb dos jugadors és una jugada (*a*, *b*) tal que: (i) *a* és una millor resposta a *b*; i (ii) *b* és una millor resposta a *a*.

- Quan es juga una jugada que és un equilibri de Nash cap dels jugadors no augmenta el seu pagament triant una estratègia diferent. Per tant, quan es juga un equilibri de Nash cap dels jugadors no té incentiu a canviar d'estratègia. En aquest sentit, un equilibri de Nash és una jugada estable: donat el que fa el rival, cap jugador no pot augmentar el pagament que obté canviant la seva estratègia de manera unilateral (però és possible que tots dos l'augmentin canviant a la vegada d'estratègia: Fig. 3).

- A la inversa, una jugada que no és equilibri de Nash representa una situació inestable, perquè algun dels jugadors pot augmentar el seu pagament si l'altre jugador tria la seva part de l'equilibri. Això indica que una solució raonable dels jocs simultanis només pot escollir jugades que siguin equilibris de Nash, atès que recomanar una jugada que no ho sigui dóna incentiu a algun jugador a no seguir la recomanació.

REMARCA 5. Per a què una jugada no sigui equilibri de Nash n'hi ha prou que un jugador augmenti el seu pagament canviant d'estratègia quan l'altre jugador juga l'estratègia que li correspon a la jugada; això és, n'hi ha prou que un jugador no estigui jugant una millor resposta a la jugada. En canvi, per a demostrar que una jugada és equilibri de Nash cal comprovar que no hi ha cap jugador que guanyi canviant d'estratègia quan l'altre jugador no canvia; això és, cal demostrar que tots els jugadors estan jugant una millor resposta. En resum, és més fàcil mostrar que una jugada no és un equilibri de Nash que mostrar que és un equilibri de Nash.

EXEMPLE 6. És la jugada (b, e) del joc de la Fig. 1 un equilibri de Nash? Per a ser-ho, cal: (i) que, donat b, el jugador 2 no augmenti el seu pagament reemplaçant e per una altra estratègia; i (ii) que, donat e, el jugador 1 no augmenti el seu pagament reemplaçant b per una altra estratègia. D'una banda, donat b, el jugador 2 no augmenta el seu pagament canviant d'estratègia: si 2 tria c, obté el pagament $p_2(b, c) = 5$; si tria d, obté $p_2(b, d) = 3$; i si tria e, obté $p_2(b, e) = 8$. Per tant, e és millor resposta a b i es compleix la condició (i). D'altra banda, b no és millor resposta a e, atès que $p_1(a, e) = 9 > 8 = p_1(b, e)$. Així, la condició (ii) no es compleix i (b, e) no és equilibri de Nash: tot i que e és el millor que 2 pot fer en resposta a b, b no és el millor que 1 pot fer en resposta a e.

- El fet que (b, e) no sigui un equilibri de Nash implica que, si els jugadors es posessin d'acord sobre com jugar el joc, difícilment acordarien jugar (b, e): si 1 expecta que 2 jugui e, el millor per a 1 no és triar b sinó a. Això fa que el jugador 1 no tingui incentiu a respectar el possible acord de jugar (b, e). Si un tal acord entre 1 i 2 sobre què jugar ha de ser estable, és necessari que sigui un equilibri de Nash.

EXEMPLE 7. La jugada (a, c) del joc de la Fig. 1 és un equilibri de Nash. En primer lloc, a és una millor resposta a c: si 1 canvia d'a a b mentre 2 juga c, el pagament d'1 disminueix d'1 a 0. I, en segon lloc, c és una millor resposta a a: si 2 canvia de c a d mentre 1 juga a, el pagament de 2 disminueix d'1 a 0; i si 2 canvia de c a e mentre 1 juga a, el pagament de 2 disminueix d'1 a −1. En resum: donat a, 2 no té incentiu a triar una estratègia diferent de c i, donat c, 1 no té incentiu a triar una estratègia diferent d'a. A la jugada (a, c), cada jugador està triant el millor donat el que fa l'altre, que és el que defineix un equilibri de Nash.

PROPOSICIÓ 8. *No tot joc simultani amb dos jugadors té algun equilibri de Nash* (Fig. 18).

- La Proposició 8 assenyala una limitació del concepte d'equilibri de Nash: un joc simultani pot no tenir cap equilibri de Nash. Aquest tret diferencia la solució basada en els equilibris de Nash de la solució basada en les jugades admissibles, ja que tot joc simultani té almenys una jugada admissible.

PROPOSICIÓ 9. *Hi ha jocs simultanis amb 2 jugadors que tenen més d'un equilibri de Nash* (Fig. 5).

- La Proposició 9 mostra una segona limitació del concepte d'equilibri de Nash: per a jocs simultanis on existeix algun equilibri de Nash, l'equilibri no és sempre únic. Aquest és un tret en comú amb la solució basada en les jugades admissibles.

PROPOSICIÓ 10. *Els pagaments de tots els jugadors a una jugada que no és equilibri de Nash d'un joc simultani amb 2 jugadors poden ser superiors als seus pagaments a un equilibri de Nash del mateix joc.*

- *Demostració.* L'únic equilibri de Nash del joc de la Fig. 3 és la jugada (A, A). Però en aquesta jugada tots dos jugadors obtenen un pagament més petit que a la jugada (N, N), que no és equilibri de Nash.■

- Per la Proposició 10, un equilibri de Nash no garanteix arribar a un "bon" resultat des d'un punt de vista col·lectiu.

PROPOSICIÓ 11. *Tot equilibri de Nash d'un joc simultani amb 2 jugadors és una jugada admissible.*

- *Demostració*. Sigui $s = (s_i, s_j)$ un equilibri de Nash d'un joc amb jugadors i i j. Hi ha dues alternatives: o bé s sobreviu l'eliminació successiva d'estratègies dominades o bé s no sobreviu l'eliminació. Suposem que no sobreviu. Si derivem una contradicció d'aquesta assumpció, provarem que la segona opció no és possible i, per tant, quedarà només la primera i haurem demostrat el que volem: si s és equilibri de Nash, aleshores s sobreviu l'eliminació i, en conseqüència, s és una jugada admissible. Però si s no sobreviu l'eliminació és perquè per a algun dels jugadors, sigui per exemple el jugador i, l'estratègia s_i que i juga a la jugada s és dominada per alguna altra estratègia a del jugador i. Això implica que, donada l'estratègia s_j de j a la jugada s, triar a és millor per a i que triar s_i. D'aquí resulta que s_i no és millor resposta a s_j i, per tant, s no és un equilibri de Nash, contradient-se la hipotèsi que s és un equilibri de Nash.■

PROPOSICIÓ 12. *No tota jugada admissible d'un joc simultani amb 2 jugadors és equilibri de Nash.*

- *Demostració*. Al joc de cara i creu (Fig. 18) cap jugador no té estratègies dominades. Així, totes les jugades són admissibles. Però el joc no té cap equilibri de Nash. Per tant, ser una jugada admissible no implica ser un equilibri de Nash.■

- La Proposició 12 fa evident que <u>la solució basada en els equilibris de Nash és un refinament de la solució basada en les jugades admissibles</u>: per a tot joc simultani amb dos jugadors, <u>els equilibris de Nash són un subconjunt de les jugades admissibles</u>. Per tant, els equilibris de Nash representen una solució més exigent (imposa més condicions per a què una jugada sigui solució) que les jugades admissibles.

REMARCA 13. S'han proposat moltes més solucions per als jocs simultanis, però pràcticament totes elles són refinaments de l'equilibri de Nash, que ha servit de punt de partida per a definir solucions més restrictives (= que seleccionen menys jugades com a raonables). D'altra banda, hi ha certs jocs molt simples que han servit per a posar a prova certes propietats que sembla raonable exigir a una solució. A continuació es presenten un quants d'aquests jocs.

EXEMPLE 14. <u>El joc de cara i creu</u>, Fig. 18. Dos jugadors decideixen alhora si mostrar la cara o la creu d'una moneda. Si les monedes mostren el mateix, el jugador 1 se les emporta; si no, se les emporta 2. <u>Aquest joc no té cap equilibri de Nash</u>: si 1 tria cara, el millor per a 2 és mostrar creu; però si 2 mostra creu, el millor per a 1 és mostrar creu; però si 1 mostra creu, el millor per a 2 és mostrar cara; però si 2 mostra cara, el millor per a 1 és mostrar cara; però 1 si tria cara…
http://en.wikipedia.org/wiki/Matching_pennies

EXEMPLE 15. <u>La batalla dels sexes</u>, Fig. 19. Ell, reusenc, i ella, tarragonina, han de decidir si passar el diumenge al Nou Estadi veient com perd el Nàstic o gaudint d'una obra al Teatre Bartrina. Com viuen a ciutats diferents, van acordar amb antelació on es trobarien. Però arriba diumenge i ningú no se'n recorda del que van acordar. Tots dos prefereixen estar junts (ja sigui al futbol o al teatre) a estar separats, però ell prefereix estar junts al futbol i ella junts al teatre.
http://en.wikipedia.org/wiki/Battle_of_the_sexes_%28game_theory%29

EXEMPLE 16. El dilema del presoner, Fig. 20. La policia ha detingut dos sospitosos de cometre un crim, que són separats i informats que si només un acusa l'altre, l'acusat rebrà la pena màxima (9 anys de presó) i l'acusador serà absolt; que si cap no acusa, sobre tots dos recaurà la pena inferior (1 any); i que si tots dos s'acusen, suportaran una pena intermèdia (4 anys).
http://en.wikipedia.org/wiki/Prisoner%27s_dilemma

EXEMPLE 17. El joc del gallina, Fig. 21. Hi ha un estudiant a un extrem del passadís principal d'una facultat i un segon estudiant a l'altre extrem. Engegen a córrer l'un contra l'altre i han de decidir si ser valents (i mantenir rumb de col·lisió) o ser cobards (i apartar-se). El millor resultat per a cada un és ser valent i que l'altre sigui cobard; si això no pot ser, el millor és que tots dos siguin cobards; i el pitjor de tot és que tots dos siguin valents i s'esclafin els caps en el xoc.
http://en.wikipedia.org/wiki/Chicken_%28game%29

EXEMPLE 18. El joc de la caça, Fig. 22 (*Jean-Jacques Rousseau*). Dos caçadors decideixen si anar a caçar un cérvol o una llebre. Un caçador no necessita ajuda per a caçar tot sol una llebre, però necessita la col·laboració de l'altre caçador per a caçar un cérvol. Aquest joc té en comú amb el joc del gallina que la mateixa estratègia pot portar tant al millor com al pitjor pagament.
http://en.wikipedia.org/wiki/Stag_hunt

- El joc de la caça il·lustra el conflicte que hi ha entre dues propietats desitjables de les solucions (i, en especial, de les solucions basades en els equilibris de Nash). La propietat 1 estableix que les jugades que siguin solució han d'atorgar als jugadors el màxim pagament possible. La propietat 2 estableix que les jugades que siguin solució no han de ser "arriscades".

- El joc de la caça té dos equilibris de Nash: (*cérvol*, *cérvol*) i (*llebre*, *llebre*). El primer expressa cooperació entre els caçadors; el segon, no cooperació. La propietat 1 portaria a escollir com a solució el primer equilibri, perquè tots dos jugadors obtenen un pagament més gran al primer que al segon equilibri. Però la propietat 2 portaria a escollir com a solució el segon equilibri, perquè amb l'estratègia *cérvol* cada jugador s'arrisca a obtenir el pitjor pagament (0), mentre que amb l'estratègia *llebre* cada jugador s'assegura un pagament intermedi (2). La recomanació basada en la propietat 2 esdevé més defensable com més proper estigui el pagament intermedi al superior i més distància hi hagi entre els pagaments superior e inferior (per exemple, si reemplacem els pagaments 2 i 3 per, respectivament, 999.999 i 1 milió).

EXEMPLE 19. El joc de la coordinació, Fig. 23. Alguns dels jocs anteriors (com la batalla dels sexes) es poden veure com a jocs de coordinació. El de la Fig. 23 és un joc de coordinació pur en el sentit que no hi ha conflicte perquè un jugador prefereixi un equilibri a un altre. El joc de la Fig. 23 té autèntic interès quan els jugador no poden prèviament comunicar-se.
http://en.wikipedia.org/wiki/Coordination_game

DEFINICIÓ 20. Quan hi ha més de 2 jugadors, una estratègia a d'un jugador i és una millor resposta a la jugada parcial b de la resta de jugadors del joc si, per a tota estratègia c del jugador i, $p_i(a, b) \geq p_i(c, b)$.

- Per exemple, al joc de la Fig. 6, l'estratègia *b* del jugador 1 no és una millor resposta a la jugada parcial (*d*, *g*) dels jugadors 2 i 3, perquè si 2 i 3 trien (*d*, *g*) és millor per al jugador 1 triar *a* (i emportar-se el pagament 1 de la jugada resultant (*a*, *d*, *g*)) que triar *b* (cas en què 1 s'emporta el pagament 0 resultant de la jugada (*b*, *d*, *g*)). En canvi, *b* sí és una millor resposta a (*c*, *g*), perquè $p_3(b, c, g) = p_3(a, c, g) = 0$: el màxim pagament que el jugador 1 pot assolir quan els rivals juguen (*c*, *g*) s'aconsegueix triant tant *b* com *a*.

- Tanmateix, es pot definir que l'estratègia *a* del jugador *i* és una millor resposta a la jugada parcial *b* de la resta de jugadors si <u>no existeix</u> cap estratègia *c* del jugador *i* tal que $p_i(c, b) > p_i(a, b)$. Amb aquesta definició equivalent, *b* al joc de la Fig. 6 és una millor resposta a (*c*, *g*) perquè canviant de *b* a una altra estratègia (en aquest joc, només és possible canviar a *a*), el pagament d'1 no augmenta.

DEFINICIÓ 21. Amb <u>més de 2 jugadors</u>, un <u>equilibri de Nash</u> d'un joc simultani és una jugada tal que cada estratègia de la jugada és una millor resposta <u>a la resta d'estratègies de la jugada</u>.

- Per exemple, la jugada (*b*, *c*, *g*) de la Fig. 6 és un equilibri de Nash perquè se satisfan 3 condicions. Primer, *b* és una millor resposta a (*c*, *g*). Segon, *c* és una millor resposta a (*b*, *g*). I tercer, *g* és una millor resposta a (*b*, *c*). Per tant, si els jugadors estiguessin d'acord en jugar (*b*, *c*, *g*), cap d'ells no incrementaria el seu pagament canviant d'estratègia mentre els altres dos mantinguessin les seves estratègies a la jugada.

REMARCA 22. Les Proposicions 2, 3, 8, 9, 10, 11 i 12 són totes vàlides per a jocs simultanis amb més de 2 jugadors.

1 \ 2	*cara*	*creu*
cara	1 −1	−1 1
creu	−1 1	1 −1

Fig. 18. Joc de cara i creu

ell \ ella	*futbol*	*teatre*
futbol	3 1	0 0
teatre	0 0	1 3

Fig. 19. Batalla dels sexes

1 \ 2	*acusar*	*callar*
acusar	−4 −4	0 −9
callar	−9 0	−1 −1

Fig. 20. Dilema del presoner

1 \ 2	*valent*	*cobard*
valent	−2 −2	1 −1
cobard	−1 1	0 0

Fig. 21. Joc del gallina

1 \ 2	*cérvol*	*llebre*
cérvol	3 3	1 2
llebre	2 1	2 2

Fig. 22. Joc de la caça

1 \ 2	*c*	*d*
a	1 1	0 0
b	0 0	1 1

Fig. 23. Joc de coordinació

Exercicis de la Lliçó 5

1. Pot una estratègia dominant ser part d'un equilibri de Nash? I una estratègia dominada?

2. Implica un equilibri de Nash que cada jugador obté el pagament més gran que té al joc?

3. Demostra les Proposicions 2 i 3. Demostra les Proposicions 8 i 9 quan hi ha 3 jugadors.

4. Calcula els equilibris de Nash dels jocs de les Figs. 3, 5, 6, 14 i 18-23; dels jocs de l'Exercici 9 de la Lliçó 3; i dels jocs de l'Exercici 2 de la Lliçó 4.

5. Hi ha algun joc simultani on tots els jugadors rebin el pagament més petit a algun equilibri de Nash? I el més gran? Construeix exemples en cas de resposta afirmativa.

Lliçó 6. Com es calculen tots els equilibris de Nash d'un joc simultani?

Hi ha almenys dues maneres de calcular els equilibris de Nash d'un joc simultani.

• **Procediment 1.** Es procedeix jugada a jugada comprovant si la jugada satisfà les condicions per a ser un equilibri de Nash. Les jugades que no satisfacin alguna de les condicions es van marcant. Al final de procés, les jugades no marcades són els equilibris de Nash. Aquest procediment és més útil quan el joc té relativament poques jugades.

• **Procediment 2.** Es procedeix jugador a jugador: fixades successivament les estratègies dels altres jugadors, marquem les jugades en què el jugador no està fent una millor resposta a les estratègies fixades del altres. Les jugades marcades no poden ser equilibris de Nash. La diferència amb l'altre procediment és que, d'una tacada, es poden eliminar moltes jugades com a candidats a equilibris de Nash. No cal procedir fins a l'últim jugador perquè és possible que, després de considerar uns quants jugadors, el nombre de jugades que són candidates a ser equilibri de Nash sigui prou reduït com per a aplicar el Procediment 1.

EXEMPLE 1. Calculem els equilibris de Nash del joc de la Fig. 1 seguint el procediment 1. Hi ha 6 jugades. Es poden considerar en qualsevol ordre. Jugada 1: (b, e). Aquesta jugada no és equilibri de Nash perquè b no és millor resposta a e. Descobert aquest fet ja no cal comprovar si e és millor resposta a b: ho sigui o no, (b, e) no pot ser equilibri de Nash. Jugada 2: (b, d). No és equilibri de Nash perquè d no és millor resposta a b. Jugada 3: (b, c). No és equilibri de Nash tant perquè c no és millor resposta a b com perquè a no és millor resposta a c. Jugada 4: (a, e). No és equilibri de Nash perquè e no és millor resposta a a. Jugada 5: (a, d). No és equilibri de Nash tant perquè d no és millor resposta a a com perquè a no és millor resposta a d. Jugada 6: (a, c). És equilibri de Nash perquè a és millor resposta a c i, a la vegada, c és millor resposta a a.

EXEMPLE 2. Tornem a calcular els equilibris de Nash del joc de la Fig. 1 però seguint el procediment 2. És més convenient començar pel jugador 2 (per què?) i fixar les estratègies del jugador 1. Fixem a. Trobem les millors respostes a a. Només n'hi ha una: c. Per tant, descartem (a, d) i (a, e) com a equilibris de Nash, tal i com s'indica a la Fig. 24. Ara fixem b. Atès que la millor resposta a b és e, descartem (b, c) i (b, d) com a equilibris de Nash. La Fig. 25 mostra que, després de considerar el jugador 2, només hi ha dues jugades que poden ser equilibris de Nash. Ara procedim amb el jugador 1, fixant les estratègies del jugador 2. No cal preocupar-se per fixar *d*, perquè hem descobert que no hi ha cap equilibri de Nash on es jugui *d*. Si fixem *e*, la millor resposta és *a*. Per tant, descartem la jugada (*b*, *e*). I si fixem *c*, *a* és la millor resposta. Donat que (*a*, *c*) és l'única jugada no marcada, (*a*, *c*) és l'únic equilibri de Nash del joc.

Jugador 1 \ Jugador 2	*c*	*d*	*e*
a	1 1	~~0 0~~	~~9 −1~~
b	0 5	7 3	8 8

Fig. 24

Jugador 1 \ Jugador 2	*c*	*d*	*e*
a	1 1	~~0 0~~	~~9 −1~~
b	~~0 5~~	~~7 3~~	8 8

Fig. 25

EXEMPLE 3. Calculem els equilibris de Nash del joc de la Fig. 6 seguint el procediment 2. Comencem pel jugador 3 (en general, no és indiferent per quin jugador començar: amb uns es poden eliminar més jugades que amb d'altres). Fixem una jugada parcial que involucri els altres jugadors, 1 i 2. Aquestes jugades parcials són 4: (*a*, *c*), (*a*, *d*), (*b*, *c*) i (*b*, *d*). Són justament les jugades parcials que es troben a cadascuna de les tres matrius.

- Comencem per (*a*, *d*), jugada parcial que pot associar-se amb la casella superior dreta de cada matriu, perquè totes les jugades on es juga *a* i *d* es troben a la casella superior dreta de les tres matrius. La millor resposta a (*a*, *d*) és *g*, ja que $p_3(a, d, g) = 4 > 3 = p_3(a, d, f)$ i $p_3(a, d, g) = 4 > 0 = p_3(a, d, e)$. Per tant, eliminem com a candidats a equilibri de Nash les jugades (*a*, *d*, *e*) i (*a*, *d*, *f*), identificades a la Fig. 26 amb ①.

- Continuem amb (*b*, *d*), jugada parcial que pot associar-se amb la casella inferior dreta de cada matriu. La millor resposta a (*b*, *d*) és *g*. Per aquest motiu, eliminem les jugades (*b*, *d*, *e*) i (*b*, *d*, *f*), identificades a la Fig. 26 amb ②.

- Prosseguim amb (*b*, *c*), jugada parcial que pot associar-se amb la casella inferior esquerra de cada matriu. La millor resposta a (*b*, *c*) és *g*. Així, eliminem les jugades (*b*, *c*, *e*) i (*b*, *c*, *f*), identificades a la Fig. 26 amb ③.

- Finalitzem amb (*a*, *c*), jugada parcial que pot associar-se amb la casella superior esquerra de cada matriu. La millor resposta a (*a*, *c*) és *e*. Això implica eliminar les jugades (*a*, *c*, *f*) i (*a*, *c*, *g*), identificades a la Fig. 26 amb ④.

- Les jugades no marcades a la Fig. 26 són els candidats a ser equilibri de Nash un cop s'han considerat les restriccions que imposa el jugador 3. Podríem prosseguir amb els jugadors 1 i 2, però com que només hi ha 4 jugades, pot aplicar-se el Procediment 1. L'únic equilibri de Nash és (*b*, *c*, *g*): a (*a*, *c*, *e*) i (*b*, *d*, *g*) el jugador 1 no tria una millor resposta; i a (*a*, *d*, g) és el jugador 2 que no tria una millor resposta.

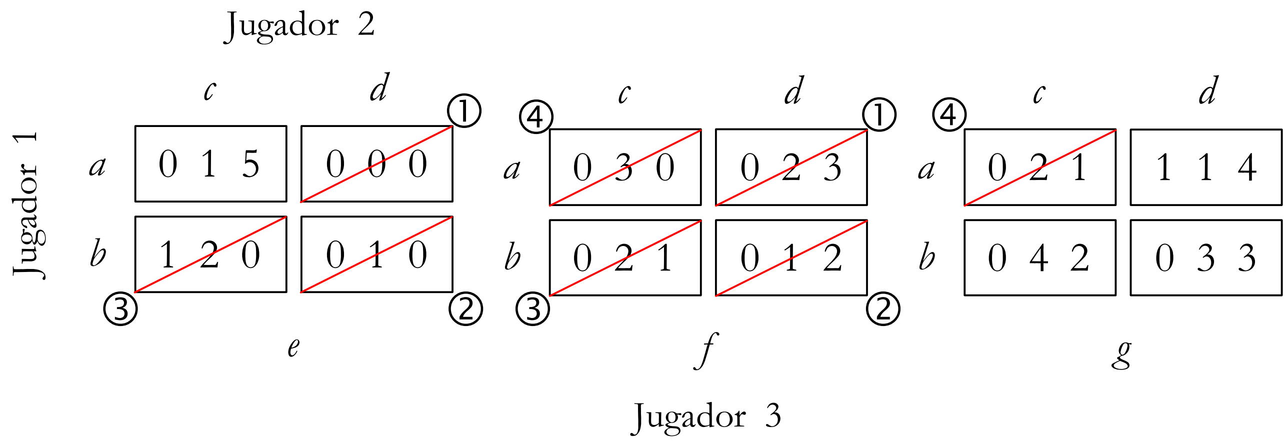


Fig. 26. Eliminant candidats a ser equilibri de Nash

Exercicis de la Lliçó 6

1. Representa cadascuna de les següents situacions com a joc simultani i obté els equilibris de Nash.

(i) Dues empreses rivals decideixen si fer o no una campanya de publicitat. Si una empresa fa la campanya i l'altra no, qui la fa duplica el benefici que té quan ningú no fa publicitat i qui no la fa obté la quarta part del benefici que té quan ningú no fa publicitat. Si les dues fan publicitat, el benefici de cadascuna és la meitat del benefici que tenen quan ningú no fa publicitat.

(ii) Un nou mercat d'un servei s'acaba de crear i les dues primeres empreses que hi formen part han de decidir, ignorant el que decideix la rival, si establir un preu alt o un preu baix del servei. Si totes dues fixen un preu baix, el benefici de cadascuna és 0; si és alt, totes dues obtenen un benefici d'1; i si una fixa un preu alt i l'altra un preu baix, qui fixa el preu alt té un benefici negatiu i qui fixa el preu baix duplica el benefici obtingut quan tothom fixa un preu alt.

(iii) Un país només té dues cadenes de televisió, Puf i Paf, que han de decidir si programar, en una determinada franja horària, esports o pel·lícula. Si ambdues programen esports, Paf s'emporta el 60% de l'audiència i Puf el 40% restant. Si programen pel·lícula, el resultat s'inverteix. Si Paf programa pel·lícula i Puf esports, Paf aconsegueix el 55%. En el cas restant, l'audiència es reparteix al 50%.

(iv) El professor P s'ha de sotmetre a una enquesta docent que respon el delegat D del curs. P pot ser dur o tou amb els estudiants i D pot revelar una opinió favorable o desfavorable. D prefereix que P sigui tou a dur i, sigui P dur o tou, prefereix donar una opinió favorable. P prefereix que D manifesti una opinió favorable a una desfavorable i, sigui favorable o no, prefereix ser dur a tou.

2. <u>Política antiterrorista</u> (Jack Hirshleifer i Amihai Glazer). La política tradicional del país P ha estat no cedir al xantatge de terroristes. Un grup terrorista ha segrestat ciutadans de P i exigeix al govern de P el pagament d'un rescat, al·legant que si el govern no paga, assassinaran els segrestats. El grup decideix, ignorant què farà el govern de P, si allibera o assassina els segrestats. El govern de P ha de decidir, ignorant què farà el grup terrorista, si pagar o no. El govern prefereix primer de tot l'alliberament dels ciutadans i, en segon lloc, prefereix no pagar a pagar. Obté els equilibris de Nash en els següents casos.

(a) Els terroristes prefereixen no complir a complir l'amenaça (prefereixen alliberar a assasinar) però sempre prefereixen rebre el pagament a no rebre'l.

(b) El terroristes prefereixen obtenir el pagament a no rebre'l i, passi el que passi, prefereixen liquidar els segrestats a no fer-ho.

(c) Com a (b) amb la diferència que els terroristes prefereixen alliberar els segrestats a liquidar-los.

3. *Hi ha un professor i dos estudiants (ell i ella). Ell decideix si copiar o no d'ella durant un examen. Ella decideix si es deixa copiar o no. El professor decideix si posa o no un parany a l'examen per a descobrir si algú ha copiat. Ella obté un 9 a l'examen tret del casos on el professor posa un parany i ell copia; en aquests casos, ella obté un 0. Ell obté un 0 excepte en tres casos: si no copia i el professor posa el parany; si copia quan ella es deixa i el professor no posa el parany; i si no copia quan ella no es deixa i el professor no posa el parany. En aquests tres casos, ell obté un 5. El pagament més alt per al professor resulta quan: posa el parany, ell copia i ella es deixa; i no el posa i ell no copia. El pagament més baix del professor l'obté quan posa el parany, ell copia i ella no es deixa. A la resta de casos, el professor obté un pagament intermedi.*

4. Al darrer segon d'un partit de futbol un davanter ha de llençar un penal: a la dreta, a l'esquerra o al centre. El porter ha de decidir si llençar-se a la dreta, a l'esquerra o al centre. Hi ha gol si el xut no es llença en la mateixa direcció que es llença el porter. Considera els 4 casos següents:

(i) abans de llençar-se el penal, el resultat és 0-0;
(ii) 1-0 a favor de l'equip del porter;
(iii) 0-1 a favor de l'equip del davanter; i
(iv) 2-0 a favor de l'equip del porter.

5. A un episodi de la temporada 2 de la sèrie "Criminal minds" un home segresta tres noies i diu que les matarà a totes si alguna d'elles no lleva la vida a alguna altra.

6. Troba un joc simultani amb tres jugadors i dues estratègies cadascun que:

(i) no tingui cap equilibri de Nash;
(ii) només tingui un equilibri de Nash;
(iii) tingui més jugades admissibles que equilibris de Nash; i
(iv) tingui menys jugades admissibles que equilibris de Nash.

7. Troba els equilibris de Nash dels jocs dels exercicis de la Lliçó 2.

8. Considera els jocs (i), (ii) i (iii) de l'Exercici 4 de la Lliçó 4.

- *A (i), determina un valor d'x i un altre d'y que facin que (c, d) sigui equilibri de Nash. Fes el mateix per a què (c, d) no sigui equilibri de Nash.*
- *A (ii), determina un valor d'x que faci que (b, c) sigui equilibri de Nash i un altre que faci que no ho sigui.*
- *A (ii), determina un valor d'y que faci que (a, d) sigui equilibri de Nash i un altre que faci que no ho sigui.*
- *A (iii), determina un valor d'x i un altre d'y que facin que: (a) (a, c) sigui equilibri de Nash i (a, d) no ho sigui; (b) (a, c) no sigui equilibri de Nash i (a, d) sí que ho sigui; (c) (a, c) i (a, d) no siguin equilibris de Nash; i (d) (a, c) i (a, d) siguin tots dos equilibris de Nash.*

9. Representa com a joc simultani el joc de pedra, paper i tisores. Troba els equilibris de Nash.

10. Representa com a joc simultani el joc de pedra, paper i tisores amb 3 jugadors. Troba els equilibris de Nash.

11. És possible que a un joc simultani totes les jugades siguin equilibri de Nash? Cas que sí, indica un exemple.

Lliçó 7. Què és un joc seqüencial?

Un joc simultani s'entén que representa situacions on l'ordre en què els jugadors juguen no té cap rellevància: en la mesura que cap jugador no sap si els altres han jugat, que un triï abans o després és irrellevant. De fet, a un joc simultani és *com si* els jugadors decidissin simultàniament i d'aquí el nom de joc simultani.

Els jocs seqüencials incorporen com a element que descriu la situació de presa de decisions interdependents l'ordre temporal en què aquestes decisions es produeixen. La inclusió de l'ordre en què els jugadors juguen pot crear una diferència substancial en el joc. Per exemple, quan s'ha de llençar un penal, no és el mateix que davanter i porter hagin de decidir al mateix temps on xutar la pilota i on llençar-se, respectivament, que un dels dos sàpiga què ha fet l'altre i aleshores prengui la decisió. Justament, en el procés de llençament d'un penal, porter i davanter intenten que l'altre s'avanci en la decisió i aconseguir així l'avantatge que els porti a aconseguir el resultat més favorable.

La definició formal de joc seqüencial és més complexa que la d'un joc simultani, perquè a més d'especificar en quin ordre juguen els jugadors cal indicar, per a cada jugador, quines decisions observa dels que han jugat abans. En la resta de lliçons es considerarà un tipus particular de joc seqüencial. I com als jocs simultanis, se suposarà que els jugadors són racionals.

DEFINICIÓ 1. Un joc seqüencial és amb informació perfecta si, en el moment de decidir què jugar, un jugador sap què han jugat tots els jugadors que han jugat abans que ell. D'ara endavant, "joc seqüencial" voldrà dir "joc seqüencial amb informació perfecta".

En comptes de presentar la definició formal d'un joc seqüencial, és més convenient explicar com és seguint un exemple. La Fig. 27 mostra la representació gràfica d'un joc seqüencial.

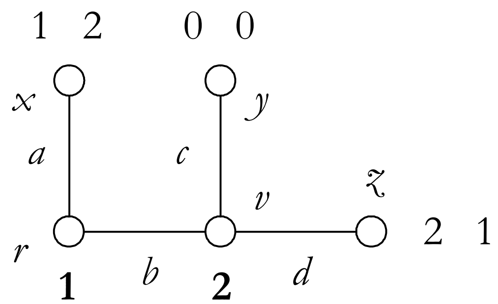


Fig. 27. Exemple d'un joc seqüencial

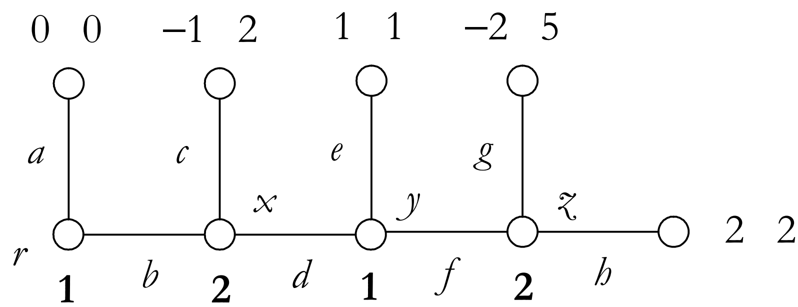


Fig. 28. Un altre joc seqüencial

- Un joc seqüencial es representa mitjançant una seqüència ordenada de nodes en forma d'arbre. Cada node indica un moment del temps. Els nodes del joc a la Fig. 27 es representen mitjançant cercles. Hi ha dos tipus de nodes: els de decisió i els terminals.

- Els nodes de decisió representen moments del temps on algun jugador ha de prendre una decisió. A la Fig. 27, els nodes de decisió són r i v. El joc comença a un node inicial, anomenat arrel del joc. A la Fig. 27, el node r és l'arrel. Cada node de decisió s'assigna a un jugador, que és el jugador que ha de prendre una decisió al node. L'arrel s'ha assignat al jugador 1 i el node v al jugador 2.

- De cada node de decisió surten branques que conecten aquest node amb altres nodes. Cada branca que surt d'un node s'anomena acció i identifica una decisió que es pot prendre al node. El jugador assignat a un node només pot escollir una de les accions disponibles al node. A la Fig. 27, del node r surten dues branques, anomenades a i b. Per tant, el joc s'inicia al node r, on el jugador 1 juga primer i ha de triar una de dues accions, a o b. El segon node de decisió, el node v, s'assigna el jugador 2, que ha de triar una de dues accions, c o d. Observa que 2 juga només si 1 tria b.

- Els nodes que no són de decisió s'anomenen nodes terminals. Els nodes terminals assenyalen el final del joc. A la Fig. 27, els nodes terminals són x, y i z. El que distingeix els nodes terminals dels de decisió és que els terminals no estan assignats a cap jugador, perquè als nodes terminals no cal prendre cap decisió. Cada node terminal té assignat números. Aquests números són els pagaments de tots els jugadors. Seguint la convenció dels jocs simultanis, el primer número expressa el pagament del jugador 1 i el segon, el pagament del jugador 2. Així, nodes de decisió, nodes terminals, accions, jugadors i pagaments defineixen un joc seqüencial.

- La interpretació del joc de la Fig. 27 és la següent. El node r representa el moment d'inici del joc. Atès que r s'assigna al jugador 1, el jugador 1 és el primer en prendre una decisió: o tria l'acció a o tria l'acció b. Si tria l'acció a, s'arriba al node terminal x, on el joc s'acaba i es generen els pagaments per a tots jugadors, hagin jugat o no. A la Fig. 27, si el jugador 1 tria l'acció a al node r, el jugador 1 rep el pagament 1 i el jugador 2 rep el pagament 2. En canvi, si 1 tria l'acció b al node r, s'arriba al node de decisió v i, per consegüent, el joc continua. Atès que el jugador 2 està assignat al node v, 2 ha de prendre una decisió: o tria l'acció c o tria l'acció d. Totes dues accions posen fi al joc, ja que totes dues accions condueixen a un node terminal. Si 2 tria c, s'arriba al node terminal y i tots dos jugadors obtenen un pagament de 0. Per contra, si 2 tria d, s'arriba al node terminal z, on el jugador 1 rep 2 i el jugador 2 rep 1.

REMARCA 2. A un joc simultani, cada jugador juga i, a més, juga només un cop. A un joc seqüencial, no sempre tots els jugadors juguen i és possible que un jugador jugui més d'un cop.

- Al joc de la Fig. 27, si 1 tria a al node r, el joc s'acaba i 2 no juga. Al joc de la Fig. 28, si 1 tria b a r i, a continuació, 2 tria d a x, s'arriba al node de decisió y, on 1 torna a jugar.

DEFINICIÓ 3. Una acció d'un jugador a un joc seqüencial és tota decisió que pot ser presa a un node de decisió (cadascuna d'aquestes decisions està associada amb una branca al node de decisió).

DEFINICIÓ 4. Una estratègia d'un jugador a un joc seqüencial és una assignació d'una acció a cada node de decisió del jugador. Per tant, si a un jugador li corresponen n nodes, una estratègia serà per a ell una seqüència d'n accions: un pla que indica què triar a cada node.

- Al joc de la Fig. 27, el jugador 1 té assignat només un node. El jugador tindrà tantes accions com branques surtin del node. Així, {*a*, *b*} és el conjunt d'accions del jugador 1. En canvi, al joc de la Fig. 27, 1 té assignats dos nodes, *r* i *y*. El seu conjunt d'accions és la unió de les accions a cada node: {*a*, *b*, *e*, *f*}.

- Atès que el jugador 1 del joc de la Fig. 27 té només un node, el conjunt d'estratègies del jugador 1 serà el conjunt de maneres de triar accions al node. Això fa que el conjunt d'estratègies d'1 sigui {*a*, *b*}. D'altra banda, en tenir el jugador 1 del joc de la Fig. 28 dos nodes, *r* i *y*, el conjunt d'estratègies d'1 consisteix en el conjunt de maneres de triar accions <u>als dos nodes</u>. Una estratègia indicarà què triar al node *r* i què triar al node *y*. Cada estratègia pot representar-se mitjançant un parell d'accions (α, β), on α és una acció a un node del jugador i β és una acció a l'altre node del jugador. Així, el conjunt d'estratègies d'1 al joc de la Fig. 28 consta de quatre elements, que són (*a*, *e*), (*a*, *f*), (*b*, *e*) i (*b*, *f*). <u>Les estratègies del tipus (α, β) de vegades s'abreujaran com αβ</u>.

REMARCA 5. Quan un jugador d'un joc seqüencial només té assignat un node, el seu conjunt d'accions és igual al seu conjunt d'estratègies.

- Una estratègia és un <u>pla d'acció total</u> a un joc. Cada estratègia d'un jugador indica què triaria el jugador a cadascun dels seus nodes, <u>s'arribi al node o no</u>. Una estratègia diu al jugador què fer en cada possible situació en què es pugui trobar el jugador. Atès que hi ha situacions que no s'esdevindran, en general hi haurà parts d'una estratègia que no s'hauran (ni es podran) implementar.

- Per exemple, un estudiant pot tenir decidit a l'inici d'un curs de Microeconomia I què fer si aprova i què fer si no aprova: si aprova, se'n va de vacances; si no, es queda a casa estudiant. Aquest pla que cobreix totes les contingències és una estratègia. Naturalment, després només una de les dues possibilitats es realitzarà i, per consegüent, només una part de l'estratègia "es jugarà": o anar-se'n o quedar-se.

- Als jocs simultanis, una estratègia és un pla que sempre s'executa completament. Als seqüencials, una estratègia és un pla format per un seguit de decisions <u>potencials</u>, algunes d'elles portades a la pràctica i d'altres que no es podran executar.

- Considerem l'estratègia (*a*, *f*) del jugador 1 al joc de la Fig. 28. Un podria preguntar-se: per què planejar què faràs al node *y* si abans prens una acció, l'acció *a*, que fa impossible arribar al node *y*? La raó és que per a què el jugador 1 triï *a* al node *r* ha de comparar què expecta obtenir de triar *a* amb què expecta de triar *b*. I si tria *b*, arribar a *y* és possible, de forma que cal tenir previst què fer si el joc assoleix el node *y*. La importància de fer una planificació completa de possibles decisions s'evidenciarà quan parlem de les solucions per als jocs seqüencials: per a esbrinar si una acció a un node és el millor per a un jugador, <u>cal analitzar què passaria si passés el que no passa</u>.

DEFINICIÓ 6. Com als jocs simultanis, una <u>jugada</u> d'un joc seqüencial és una assignació a cada jugador d'una de les seves estratègies.

REMARCA 7. Als jocs seqüencials és menys immediat que als jocs simultanis determinar els pagaments resultants d'una jugada.

- Als jocs simultanis, per a determinar els pagaments d'una jugada, n'hi ha prou amb identificar la casella associada amb la jugada. <u>Als jocs seqüencials, per a determinar els pagaments d'una jugada, cal traçar el camí que la jugada segueix al llarg del joc</u>.

- A tall d'exemple, la Fig. 29 mostra com trobar els pagaments de la jugada (*be*, *ch*) al joc de la Fig. 28: simplement marquem amb una fletxa les accions que conformen la jugada (*b* al node *r*, *e* al node *y*, *c* al node *x* i *h* al node *z*) i seguim les fletxes fins que arribem a un node terminal. Els pagaments d'aquest node són els pagaments que s'obtenen si es juga la jugada. En el cas de (*be*, *ch*), el vector de pagaments és (–1, 2). Observa que totes les jugades que continguin les accions *b* i *c* portaran al mateix vector (–1, 2) de pagaments: (*be*, *ch*), (*be*, *cg*), (*bf*, *ch*) i (*bf*, *cg*). A cadascuna d'aquestes jugades, 1 tria *b* a *r* i després 2 tria *c* a *x*, posant fi al joc.

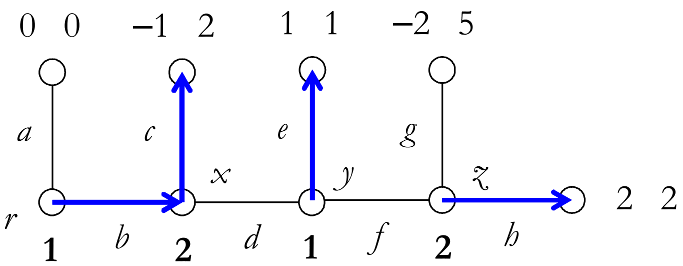


Fig. 29. Trobant els pagaments de la jugada (*be*, *ch*)

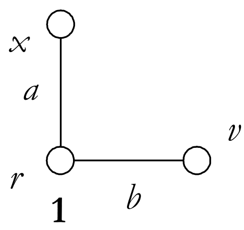


Fig. 30

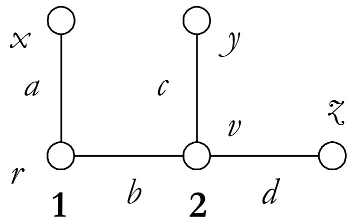
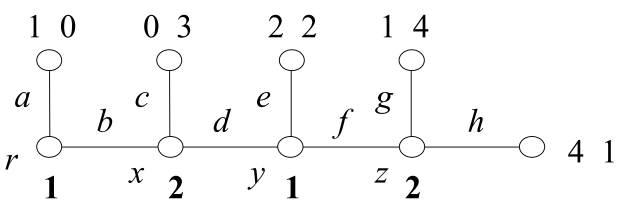


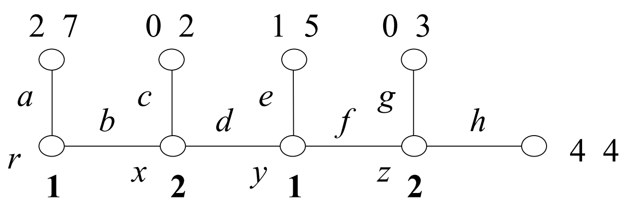
Fig. 31

Exercicis de la Lliçó 7

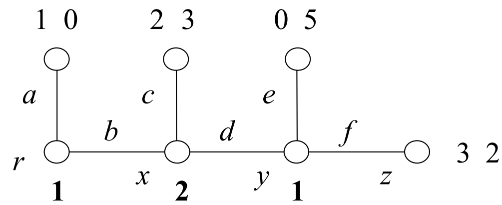
1. Determina les accions i les estratègies de cada jugador als següents jocs seqüencials. Indica totes les jugades dels jocs (iv) i (v).



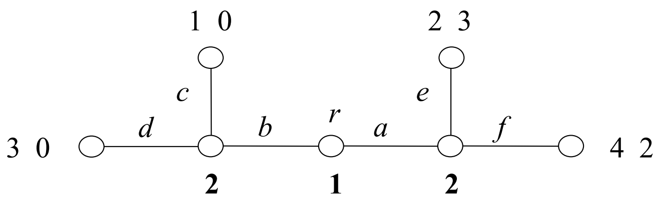
(i)



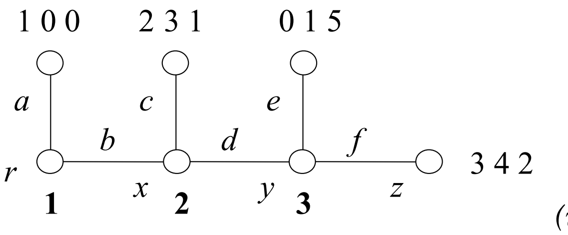
(ii)



(iii)



(iv)



(v)

2. Pot un jugador d'un joc seqüencial tenir més accions que estratègies? I més estratègies que accions? Per què?

3. Identifica els nodes de decisió i els terminals als jocs (i), (ii), (iii), (iv) i (v). Al cas del joc (v), com canviarien les estratègies dels jugadors si els jugadors 2 i 3 permutessin els seus pagaments?

4. Determina totes les jugades que, al joc (i), porten al vector de pagaments (0, 3). Fes el mateix per al joc (ii) i el mateix vector. Fes el mateix per al joc (iii) i els vectors (3, 2) i (1, 0).

5. Al joc (i), indica les accions i estratègies del dos jugadors si el node z fos l'arrel del joc. Fes el mateix si l'arrel fos el node x.

Lliçó 8. Com es construeix un joc seqüencial?

EXEMPLE 1. Una estudiant de Microeconomia I ha de decidir si fa una consulta al professor. Si decideix fer-la, el professor observa des del seu despatx que l'estudiant s'apropa i aleshores ha de decidir si fugir del despatx per una porta lateral o atendre l'estudiant. L'estudiant vol per damunt de tot que el professor l'atengui, però el que menys prefereix és presentar-se al despatx i que el professor no hi sigui. El professor vol primer de tot que l'estudiant no faci la consulta i, en segon lloc, s'estima més atendre l'estudiant si ella ha decidit fer la consulta.

- El procediment per a transformar una situació on es prenen seqüencialment decisions interdependents és menys mecànic que el procediment en el cas dels jocs simultanis. Primer de tot cal establir si la manera apropiada de representar-la és mitjançant un joc simultani o un joc seqüencial (tot i això, la Lliçó 9 mostra que totes aquests situacions de presa de decisions interdependents poden ser representades com a joc simultani). A l'Exemple 1, el professor observa la decisió de l'estudiant i tria a continuació. Per tant, un jugador juga abans que l'altre i aquest segon juga sabent què ha fet el primer. Això fa que la situació sigui susceptible de ser representada com a joc seqüencial.

- Atès que representarem la situació com a joc seqüencial, cal determinar el nombre de jugadors, quantes vegades poden ser cridats a jugar cadascú i, en cada cas en què poden ser cridats, de quantes accions disposen en el moment de jugar. Amb aquesta informació s'ha de construir l'arbre de decisió que defineix el joc.

- A l'Exemple 1, hi ha dos jugadors, l'estudiant (jugador 1) i el professor (el jugador 2). Atès que l'estudiant decideix inicialment, l'arrel s'assigna a l'estudiant. De l'arrel surten dues branques representant les dues accions de què disposa l'estudiant, a = no fer la consulta i b = fer la consulta. Després de donar noms, x i v, als nodes connectats amb l'arrel a través de les accions a i b, resulta la Fig. 30, que mostra l'estat inicial de construcció del joc.

- L'estudiant ja no torna a jugar. Cal determinar si els dos nodes construïts a partir de les accions de l'estudiant són terminals o de decisió. Si l'estudiant tria no fer la consulta (acció a) el joc s'acaba, ja que el professor és cridat a prendre una decisió sobre si fugir (acció c) o atendre l'estudiant (acció d) només quan l'estudiant tria fer la consulta (acció b). Per tant, x és un node terminal i v és un node de decisió assignat al professor. Del node v surten dues branques, que representen les accions c i d del professor. Atès que el professor tampoc no torna a jugar, els nodes als que porten c i d (nodes y i z) són tots dos terminals. Això finalitza la construcció de l'arbre de decisions. Aquesta etapa del procés de construcció del joc es mostra a la Fig. 31.

- L'última etapa del procés consisteix en assignar els pagaments als nodes terminals. L'Exemple 1 no indica els pagaments. Però, com a l'Exemple 2 de la Lliçó 2, podem associar pagaments amb als nodes terminals basant-nos en l'ordre de preferència dels jugadors pels nodes terminals (que expressen resultats del joc). L'estudiant vol per damunt de tot que el professor l'atengui. Això significa assolir el node z, ja que aquest node s'assoleix només quan l'estudiant decideix fer la consulta i el professor l'atén. Per tant, z és el node terminal (o resultat) més preferit per l'estudiant. El node terminal menys preferit és y, que correspon a la seqüència de decisions on ella decideix fer la consulta i el professor fuig. En resum, de més a menys, la preferència de l'estudiant sobre els nodes terminals és $z \rightarrow x \rightarrow y$. Triem tres números i assignem-los respectant aquest ordre. Si triem 0, 1 i 2, el pagament de l'estudiant a z és 2, a x és 1 i a y és 0.

- Faríem el mateix per al professor. La seva preferència, de més a menys, seria $x \rightarrow z \rightarrow y$. Si triem també 0, 1 i 2 (podríem triar altres valors), el pagament del professor a x és 2, a z és 1 i a y és 0. El joc resultant és el de la Fig. 27, on l'estudiant és el jugador 1 i el professor és el jugador 2 (i els pagaments s'indiquen seguint aquesta tria de valors).

Exercicis de la Lliçó 8

1. Representa cada situació com a joc seqüencial.

(i) Hi ha classe de Microeconomia I un cert dia d'11 a 13. Un examen d'una hora s'ha de realitzar durant la sessió i la qüestió és si fer-lo d'11 a 12 i després fer classe o fer primer classe i després fer l'examen de 12 a 13. El professor decideix a les 11 si fer l'examen ja o fer-lo a les 12. Si l'examen es fa immediatament, el curs en bloc decideix si assistir a classe a les 12 o no. El que el curs s'estima més és fer l'examen a les 11 i no assistir a classe després; el que menys, fer-lo a les 12. Per al professor, el millor és complaure al curs fent l'examen a les 11 i el pitjor és accedir a fer-lo a les 11 i que després no assisteixi ningú a classe.

(ii) El joc de pedra, paper i tisores on un jugador mostra abans que l'altre què ha escollit i el segon jugador sap què ha escollit el primer.

(iii) Hi ha dos jugadors i un pot inicial de 1000 €. El primer jugador tria agafar-los o afegir 1000 € més. El segon jugador, sabent què ha fet el primer, tria entre agafar el pot acumulat de 2000 € o afegir 1000 € més. A continuació, el primer jugador, sabent què ha fet el segon, tria entre apropiar-se el pot acumulat de 3000 € o afegir 1000 € més. Finalment, el segon jugador, sabent què ha fet el primer, tria entre agafar el pot acumulat de 4000 € o regalar els 4000 € al primer jugador.

(iv) La situació és la de l'Exercici 2(i) de la Lliçó 2, amb la diferència que el davanter xuta abans que el porter es llenci i el porter sap on va el xut.

(v) La situació és la de l'Exercici 2(i) de la Lliçó 2, amb la diferència que el porter es llença abans que el davanter xuti i el davanter sap on s'ha llençat el porter.

Lliçó 9. Transformació d'un joc seqüencial en un joc simultani

REMARCA 1. Cada joc seqüencial es pot transformar en un únic joc simultani, però no hi ha un procediment per a transformar un joc simultani en un de seqüencial.

DEFINICIÓ 2. La representació en forma de joc simultani J^* d'un joc seqüencial J s'obté de la següent manera.

- *Jugadors*: el joc simultani J^* té el mateix conjunt de jugadors que el joc seqüencial J.
- *Estratègies*: per a cada jugador i del joc simultani J^*, el conjunt d'estratègies d'i a J^* coincideix amb el seu conjunt d'estratègies al joc seqüencial J.
- *Pagaments*: per a cada jugador i del joc simultani J^* i per a cada jugada s al joc J^*, el pagament d'i a J^* corresponent a la jugada s és el pagament que i rep al joc seqüencial J quan es juga la jugada s.

EXEMPLE 3. El joc J_{31} de la Fig. 31 és la representació en forma de joc simultani del joc seqüencial J_{27} de la Fig. 27. S'ha obtingut de la següent manera.

- Atès que el conjunt de jugadors de J_{27} és {1, 2}, el conjunt de jugadors de J_{31} és també {1, 2}.

- El conjunt d'estratègies del jugador 1 de J_{27} és $\{a, b\}$. D'aquí que $\{a, b\}$ sigui el conjunt d'estratègies del jugador 1 a J_{31}. El conjunt d'estratègies del jugador 2 de J_{27} és $\{c, d\}$. Això fa que $\{c, d\}$ sigui el conjunt d'estratègies del jugador 2 a J_{31}. Per tant, J_{31} té quatre jugades: (a, c), (a, d), (b, c) i (b, d).

- Finalment, cal associar pagaments amb cada jugada. Considerem primer la jugada (a, c). Els pagaments dels jugadors a J_{31} quan es juga (a, c) són els pagaments quan es juga (a, c) a J_{27}. El primer jugador cridat a jugar el joc J_{27} és el jugador 1. Així, que es jugui la jugada (a, c) significa que el jugador 1 comença triant a i, si s'arribés al node v del jugador 2, aquest triaria c. Però com jugar a a l'arrel r implica que el joc s'acaba, l'estratègia del jugador 2 és irrellevant per a determinar els pagaments. D'aquesta manera, si es juga (a, c), s'arriba al node x, on el vector de pagaments és (1, 2). Per tant, el vector de pagaments a J_{31} corresponent a la jugada (a, c) és (1, 2). Aquest és també el vector de pagaments corresponent a (a, d). Els pagaments de la jugada (b, c) són (0, 0). Aquest pagament resulta del fet que jugar la jugada (b, c) vol dir que 1 tria b a r, decisió que condueix al node v del jugador 2. Atès que el jugador 2 té l'oportunitat de jugar i que la jugada (b, c) diu que si el jugador 2 té l'oportunitat de jugar triarà c, el joc acaba al node y. Com a resultat, el vector de pagaments de la jugada (b, c) és (2, 1).

EXEMPLE 4. El joc J_{32} de la Fig. 32 és la representació en forma de joc simultani del joc seqüencial J_{28} de la Fig. 28. S'ha obtingut de la següent manera.

- El conjunt de jugadors de J_{32} és {1, 2} perquè {1, 2} és el conjunt de jugadors de J_{28}.

- El jugador 1 del joc J_{28} té 4 estratègies, (*a*, *e*), (*a*, *f*), (*b*, *e*) i (*b*, *f*). Aquestes són les estratègies del jugador 1 del joc J_{32}, abreujades com *ae*, *af*, *be* i *bf*. El jugador 2 del joc J_{28} té 4 estratègies, (*c*, *g*), (*c*, *h*), (*d*, *g*) i (*d*, *h*). Aquestes són les estratègies del jugador 2 del joc J_{32}, abreujades com *cg*, *ch*, *dg* i *dh*.

- El vector de pagaments dels jugadors a tota jugada on 1 juga *a* és (0, 0), perquè jugar *a* a l'arrel del joc J_{28} implica arribar al node terminal amb pagaments (0, 0). Per això, les caselles de les dues primeres files de la matriu del joc J_{32} tenen (0, 0) com a pagaments. Les 4 caselles del cantó inferior esquerre de la matriu del joc J_{32} representen jugades on 1 tria *b* a *r* i després 2 tria *c* a *x* (de forma que el joc no arriba mai als nodes *y* o *z*). Això implica obtenir els pagaments (–1, 2). Els pagaments de les jugades (*be*, *dg*) i (*be*, *dh*) són idèntics perquè la diferencia entre les jugades és l'acció que es prendria a *z*, que és un node al qual no s'arriba en aquestes jugades. De fet, tant a (*be*, *dg*) com a (*be*, *dh*), el joc començaria amb 1 triant *b* a *r*, després 2 triant *d* a *x* i, finalment, 1 triant *e* a *y*. El resultat d'aquestes decisions és el vector de pagaments (1, 1). Per últim, el vector de pagaments de la jugada (*bf*, *dg*) és (–2, 5) i el de la jugada (*bf*, *dh*) és (2, 2).

Jugador 1 \ Jugador 2	*c*	*d*
a	1 2	1 2
b	0 0	2 1

Fig. 31. Joc simultani del joc de la Fig. 27

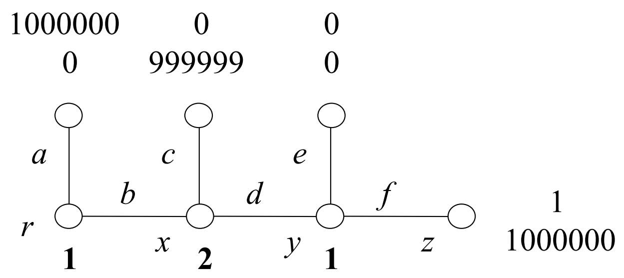
Jugador 1 \ Jugador 2	*cg*	*ch*	*dg*	*dh*
ae	0 0	0 0	0 0	0 0
af	0 0	0 0	0 0	0 0
be	–1 2	–1 2	1 1	1 1
bf	–1 2	–1 2	–2 5	2 2

Fig. 32. Joc simultani del joc de la Fig. 28

Exercicis de la Lliçó 9

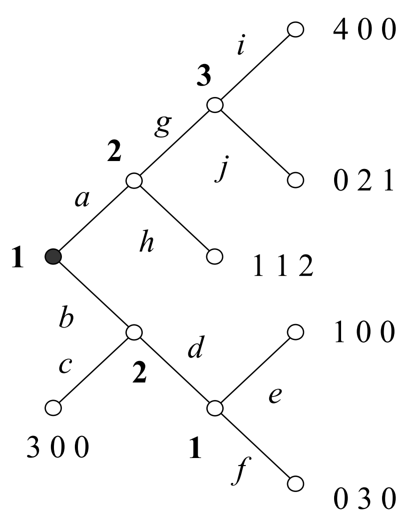
1. Representa en forma de joc simultani tots els jocs seqüencials de l'Exercici 1 de la Lliçó 7.

2. Transforma el següent joc en simultani, on el pagament del jugador 1 és el de dalt.



3. Representa en forma de joc simultani tots els jocs seqüencials dels exercicis de la Lliçó 8.

4. Representa en forma de joc simultani el següent joc seqüencial, on l'arrel és el node negre.



Lliçó 10. L'equilibri de Nash d'un joc seqüencial

DEFINICIÓ 1. Una jugada d'un joc seqüencial és un equilibri de Nash si, i només si, la jugada és un equilibri de Nash en la representació com a joc simultani del joc seqüencial original.

- Tot i que els equilibris de Nash d'un joc seqüencial es poden calcular directament al joc seqüencial, és més fàcil calcular-los a la representació en forma de joc simultani.

- Per exemple, la jugada (a, d) del joc de la Fig. 27 no és un equilibri de Nash del joc, perquè el jugador 1 augmenta el seu pagament canviant d'a a b. D'altra banda, la jugada (a, c) és un equilibri de Nash del joc de la Fig. 27. Primer, perquè canviant d'a a b el jugador 1 redueix el seu pagament: passaria d'1 a 0. I segon, perquè, donat a, l'estratègia que triï 2 no afecta el pagament resultant: el vector de pagaments de la jugada (a, c) és el mateix que el de la jugada (a, d), que és (1, 2). Per tant, canviant de c a d, el jugador 2 no augmenta el seu pagament, donat que 1 tria a.

EXEMPLE 2. Calculem els equilibris de Nash del joc seqüencial J_{28} de la Fig. 28. Tot i que en aquest joc és fàcil determinar si una jugada és un equilibri de Nash, és força complex calcular directament sobre el joc tots els equilibris de Nash.

- Per exemple, la jugada (ae, cg) és un equilibri de Nash del joc J_{28}: donat que 2 triaria c al node x i triaria g al node z, el jugador 1 no té cap forma d'escollir accions als seus dos nodes de forma que incrementi el pagament 0 que 1 obté a la jugada (ae, cg). En relació amb el jugador 2, en vista que 2 no té l'oportunitat de jugar a la jugada (ae, cg), qualsevol elecció d'estratègia li dóna el mateix pagament 0. En conseqüència, (ae, cg) és un equilibri de Nash: cap dels dos jugadors no pot augmentar el seu pagament si l'altre juga segons la jugada.

- Però com podem saber quins són tots els equilibris de Nash de J_{28}? Aquí és on ajuda la representació de J_{28} en forma de joc simultani, que es mostra a la Fig. 32. Els equilibris de Nash del joc de la Fig. 32 són 4: (ae, cg), (ae, ch), (af, cg) i (af, ch). Tots porten al vector de pagaments (0, 0).

- Es pot comprovar directament sobre J_{28} perquè les altres jugades no són equilibris de Nash. Per exemple, considerem la jugada (be, dh), que proporciona un pagament a cada jugador superior al pagament que reben als equilibris de Nash. La Fig. 33 mostra les eleccions que es fan a cada node d'acord amb aquesta jugada. D'una banda, be no és millor resposta a dh, perquè, en comptes d'e, és millor per a 1 triar f al node y. De l'altra, tampoc no és dh millor resposta a be, ja que per a 2 és millor triar c que d a x.

PROPOSICIÓ 3. *Tot joc seqüencial té al menys un equilibri de Nash.*

- *Demostració.* La Proposició 3 és un corol·lari de les Proposicions 2 i 6 de la Lliçó 11.■

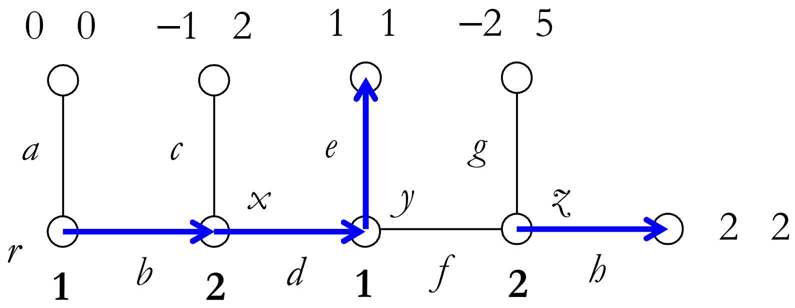


Fig. 33. Resultat de la jugada (*be*, *dh*)

REMARCA 4. La Proposició 3 evidencia una diferència significativa entre els jocs seqüencials (amb informació perfecta!) i els jocs simultanis: mentre els simultanis poden no tenir cap equilibri de Nash, tots els jocs seqüencials (amb informació perfecta) en tenen almenys un.

REMARCA 5. Hi ha una altra diferència significativa entre els jocs seqüencials amb informació perfecta i els simultanis: tot i que hi ha motius per a jutjar estable tot equilibri de Nash d'un joc simultani, hi ha equilibris de Nash d'un joc seqüencial que són manifestament inestables.

- A tall d'exemple, el joc de la Fig. 27 té dos equilibris de Nash: (*a*, *c*) i (*b*, *d*). Però el primer és estratègicament inestable, perquè, essent racional, el jugador 2 mai no executaria el pla d'acció que marca la jugada (*a*, *c*) si es veiés en la situació haver-lo d'acomplir. La jugada (*a*, *c*) s'interpreta en el sentit que el jugador 2 planeja triar *c* si el joc arriba al seu node, això és, si el jugador 1 tria *b*. Però com 1 tria *a* a la jugada (*a*, *c*), la implementació de la jugada no posa al jugador 2 en el tràngol d'haver d'executar aquest pla d'acció. Per això (*a*, *c*) és un equilibri de Nash: atès que 2 no juga, qualsevol elecció d'estratègia li dóna el mateix pagament en vista que 1 juga *a*; i atès que 2 pretén jugar *c*, el millor per a 1 és escollir *a* per a obtenir un pagament d'1 i evitar el pagament de 0 que obtindria si el joc arribés al node *v* i 2 triés *c* allà. En aquest sentit, es pot interpretar que l'elecció de *c* per part de 2 és una amenaça que té com a objectiu que 1 no doni l'oportunitat de jugar a 2 (observa que el pagament més alt per a 2 s'obté quan 1 tria *a*, és a dir, quan 2 no és cridat a jugar).

- El que fa que (*a*, *c*) sigui un equilibri de Nash inestable és que l'amenaça de 2 de jugar *c* en cas que li toqui el torn de jugar no és creïble. Si el jugador 2 és racional i li arribés el torn de prendre una decisió al node *v*, mai no triaria *c* sinó *d*. Com a conseqüència, en la mesura que 1 sàpiga que 2 és racional, 1 sabrà que, si es posa a 2 en situació d'acomplir la seva amenaça, la seva racionalitat l'impedirà d'acomplir-la: si 1 posa a prova a 2 i tria *b*, 2 ha fracassat en el seu intent de forçar 1 a triar *a*, de forma que jugar *c* ja no pot complir el propòsit de dissuadir el jugador 1 de triar *b*. Això fa que, un cop *b* s'ha jugat, 2 no tingui cap més remei que triar *d*. Per tot plegat, (*a*, *c*) no és estable: 1 jugaria *b* sabent que el seu canvi d'estratègia forçarà a 2 a també canviar la seva.

Exercici de la Lliçó 10

Obté tots els equilibris de Nash de tots els jocs seqüencials de lliçons i exercicis anteriors.

Lliçó 11. La inducció cap enrere aplicada a jocs seqüencials

Com s'ha fet per a identificar l'existència d'un equilibri de Nash inestable al joc de la Fig. 27? Aquesta lliçó s'encarrega d'explicar-ho apel·lant a la noció d'inducció cap enrere.

La inducció cap enrere és un procediment per a obtenir la solució de problemes de decisió on s'han de prendre decisions a diferents moments del temps o etapes. En aquest tipus de problema (anomenats problemes dinàmics o seqüencials), la millor decisió a una etapa depèn de quina sigui la decisió presa en etapes posteriors. La inducció cap enrere comença la resolució del problema a l'etapa final, que és on el problema de decisió és més simple (en no dependre la presa de decisions del que passi després). Trobada la millor decisió en el moment final, se substutueix la part final del problema per la seva solució. Això fa que la penúltima etapa es pugui considerar com si fos l'etapa final. Es resol el problema de decisió a la penúltima etapa, se'l substitueix per la seva solució i es continua cap enrere solucionant etapes prèvies sobre la base de les solucions trobades a etapes posteriors fins que s'arriba a l'etapa inicial.

DEFINICIÓ 1. Aplicació de la inducció cap enrere a un joc seqüencial. Una jugada d'un joc seqüencial s'obté (o és seleccionada) per inducció cap enrere si sobreviu el següent procés.

- A cada node just abans d'un node terminal, identifiquem les accions que donen el màxim pagament al jugador assignat al node.
- Retenim aquestes accions i eliminem la resta d'accions que hi ha al node.
- Passem després als nodes just abans dels nodes just abans dels nodes terminals i identifiquem les accions que donen el màxim pagament al jugador del node donades les accions retingudes.
- Eliminem les altres accions i continuem cap enrere fins arribar al node inicial.

PROPOSICIÓ 2. *Tota jugada seleccionada per inducció cap enrere és un equilibri de Nash.*

EXEMPLE 3. Apliquem la inducció cap enrere al joc de la Fig. 27.

- Primer cal identificar tots els nodes de decisió on cada acció al node porta a un node terminal; això és, cal buscar els nodes on totes les accions posen fi al joc. L'arrel r no compleix aquesta condició, perquè prendre l'acció b no posa fi al joc. En canvi, el node v és tal que tots els nodes que van després de v són nodes terminals: si es pren c a v, s'arriba al node y i el joc s'acaba; i si es pren d a v, s'arriba al node z i el joc s'acaba.

- Per tant, la inducció cap enrere comença a aplicar-se al node v. El problema de decisió al node v és el més simple, perquè el jugador assignat a v (el jugador 2) no necessita considerar què fara l'altre jugador: ja ho sap. De fet, si s'arriba al node v, 2 ja sap que 1 ha pres l'acció b: si hagués pres a en comptes de b, el joc s'hauria acabat. Així, si el joc avancés fins al node v, 2 tindria un problema senzill a resoldre: si tria c, s'arriba a y i 2 rep un pagament de 0; i si tria d, s'arriba a z i 2 rep un pagament d'1. Essent racional, 2 triarà d si es troba al node v. Això soluciona el joc al node v.

- Ara fixem aquesta solució: atès que si el joc arriba a v, es jugaria d, eliminem la branca que representa l'acció c. Solucionat el joc a v, passem a trobar la solució al node que precedeix v: l'arrel. Havent eliminat la possibilitat de triar c, la solució a r és senzilla: si

1 tria *a* a *r*, obté un pagament d'1; en canvi, si tria *b* a *r*, el joc arriba a *v* i, atès que s'ha determinat que *d* serà l'acció escollida si s'arriba a *v*, 1 acabarà obtenint un pagament de 2. En resum, la millor elecció a *r*, donat que es triarà *d* a *v*, és escollir l'acció *b*. La jugada obtinguda per inducció cap enrere al joc de la Fig. 27 resulta ser (*b*, *d*). Aquest seria l'equilibri de Nash "bo" del joc; l'altre equilibri, (*a*, *c*), seria l'equilibri "dolent".

REMARCA 4. La inducció cap enrere aplicada a un joc seqüencial identifica aquells equilibris de Nash del joc consistents amb la premissa que els jugadors són racionals a cadascun dels seus nodes, amb independència que el joc porti o no a aquells nodes.

- Per exemple, la inducció cap enrere no selecciona l'equilibri de Nash (*a*, *c*) perquè *c* no és una elecció al node *v* on s'hauria de prendre consistent amb la racionalitat del jugador 2 a aquell node: si 2 fos cridat a fer una elecció al node *v*, no triaria mai *c*.

- Una hipòtesi implícita de la inducció cap enrere és que quan un jugador, abans que el joc s'iniciï, considera quina acció escollir a un determinat node, la tria suposant que es troba en aquell node. Per al jugador 2 pot tenir sentit dir que triarà *c* al node *v* si sap que el joc no arribarà al node *v*. Però si 2 és forçat a fer la tria del que farà a *v* suposant que s'arribarà a *v*, llavors *c* no té cap justificació.

EXEMPLE 5. Apliquem la inducció cap enrere al joc de la Fig. 28.

- La inducció cap enrere comença al node *z*, que és l'únic node de decisió on totes les accions acaben el joc. Si el jugador assignat a *z*, que és 2, es trobés a *z* triaria *g*: escollint *g*, rep 5 de pagament; escollint *h*, només 2. Així doncs, eliminem *h*, tal i com mostra la Fig. 34. L'eliminació de parts del joc és més convenient per a determinar quins són els vectors de pagaments que són possibles d'acord amb la inducció cap enrere. Per a determinar quines són les jugades que selecciona la inducció cap enrere, és més útil fer ressaltar les accions obtingudes per inducció cap enrere. En aquest cas, la Fig. 35 mostra que *g* és l'acció triada a *z* per la inducció cap enrere.

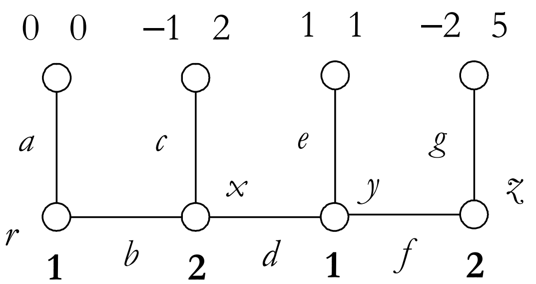


Fig. 34

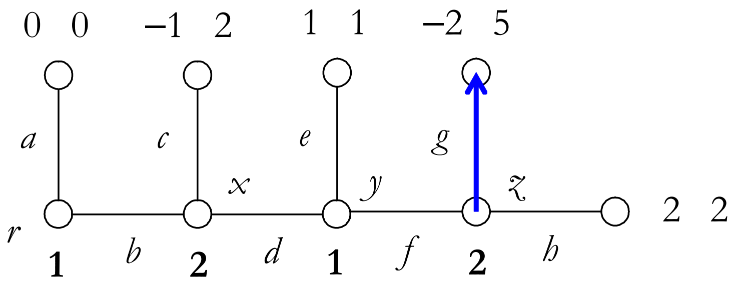


Fig. 35

- Sabent què passarà si s'arriba a *z*, considerem el node de decisió que precedeix *z*. Aquest node és *y*. Si el jugador assignat a *y*, que és 1, es trobés a *y* i sapigués que a *z* es triaria *g*, què jugaria? Si selecciona *e*, el pagament és 1; si opta per *f*, és –2. Per tant, la inducció cap enrere selecciona *e* a *y*. Si eliminem *f* (i tot el que hi ha després d'*f*) de la Fig. 34, passem a la Fig. 36; si fem ressaltar *f* a la Fig. 35, passem a la Fig. 37.

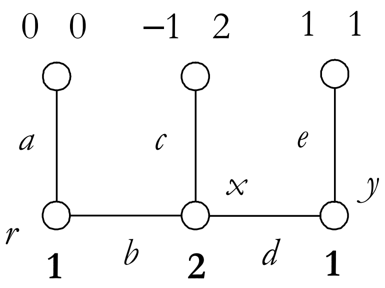


Fig. 36

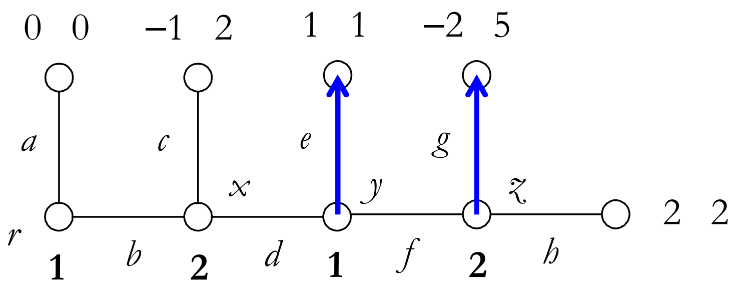


Fig. 37

➤ Sabent què passarà si s'arriba a *y*, considerem el node de decisió que precedeix *y*. Aquest node és *x*. Si el jugador assignat a *x*, que és 2, es trobés a *x* i sapigués que a *y* es triaria *e* i a *z* es triaria *g*, què jugaria? Si selecciona *c*, el pagament és 2; si opta per *d*, és 1. Per tant, la inducció cap enrere escull *c* a *x*. Si eliminem *d* (i tot el que hi ha després de *d*) de la Fig. 36, s'obté la Fig. 38. Si fem ressaltar *c* a la Fig. 37, s'obté la Fig. 39.

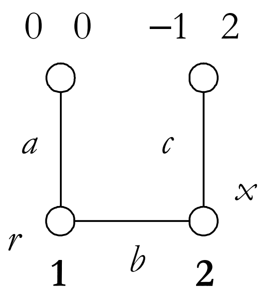


Fig. 38

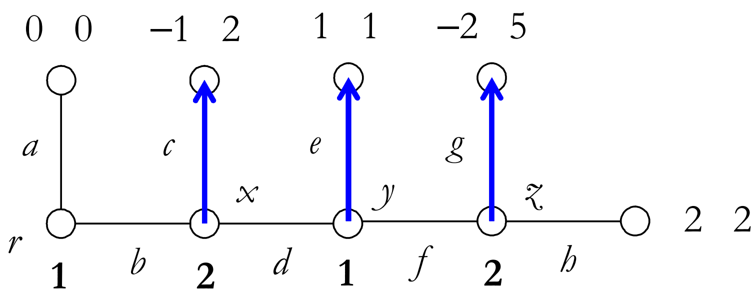


Fig. 39

➤ Sabent què passarà si s'arriba a *x*, considerem finalment el node de decisió que precedeix *x*: l'arrel *r* del joc. Si el jugador assignat a *r*, que és 1, sapigués que a *x* es triaria *c*, què jugaria? Si selecciona *a*, el pagament és 0; si opta per *b*, és –1. Per tant, la inducció cap enrere selecciona *a* a *r*. En eliminar *b* de la Fig. 38, resulta la Fig. 40. En fer ressaltar *a* a la Fig. 39, resulta la Fig. 41. A la Fig. 41 queda clar que ((*a*, *e*), (*c*, *g*)) és l'única jugada que ha seleccionat la inducció cap enrere. A la Fig. 40 queda clar que el vector de pagaments resultant és (0, 0), que és justament el vector de pagaments que resultaria si es jugués la jugada ((*a*, *e*), (*c*, *g*)) obtinguda per inducció cap enrere.

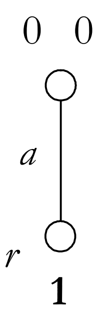


Fig. 40

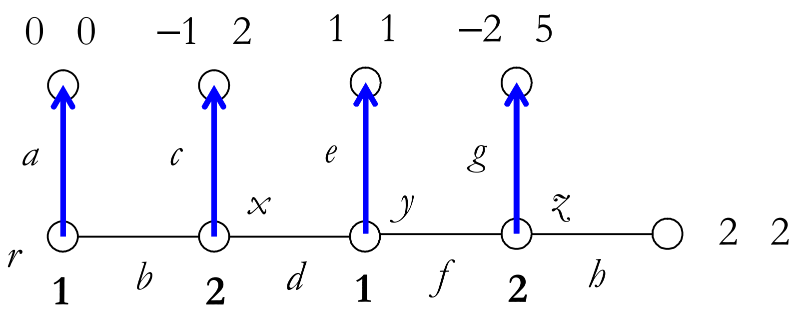


Fig. 41

PROPOSICIÓ 6. *Tot joc seqüencial té almenys una jugada que és seleccionada per la inducció cap enrere.*

REMARCA 7. La inducció cap enrere fa un ús implícit d'hipòtesis sobre la racionalitat dels jugadors, sobre el coneixement dels jugadors de la racionalitat dels altres jugadors, sobre el coneixement dels jugadors sobre el coneixement dels jugadors de la racionalitat dels altres…

- Per exemple, al joc de la Fig. 28, la inducció cap enrere selecciona g al node z. Això presum que 2 és racional. El següent pas de la inducció cap enrere porta a seleccionar e al node y. Però per a què 1 triï e al node y, cal que 1 sàpiga que 2 és racional, per tal de poder replicar la conclusió obtinguda per la inducció cap enrere segons la qual 2 triarà g al node z. El tercer pas de la inducció porta a seleccionar c al node x. Però per a què 2 triï c al node x, cal que 1 pugui derivar la conclusió que 1 triarà e al node y. Això significa que cal que 2 sàpiga tot el que 1 ha necessitat per a concloure que ha de triar e al node y; això és, cal que 2 sàpiga que 1 sap que 2 és racional i cal que 2 sàpiga que 1 és racional. Amb la primera hipòtesi, 2 sabrà que 1 sap que a z el jugador 2 triarà g; amb la segona hipòtesi, 2 sabrà que 1, sabent què farà 2 a z, triarà e al node y. Finalment, la inducció selecciona a a l'arrel. Per a què 1 pugui justificar la tria d'a, ha de ser capaç de replicar tot el raonament que 2 fa a x. Això requereix que 1 sàpiga que 2 sap que 1 sap que 2 és racional, que 1 sàpiga que 2 sap que 1 és racional i que 1 sàpiga que 2 és racional.

- La Fig. 42 indica a cada node <u>quines hipòtesis sobre racionalitat i el coneixement de racionalitat són necessàries per a avalar la selecció d'accions que fa la inducció cap enrere</u>, on R_i abreuja "el jugador i és racional" i S_i abreuja "el jugador i sap que". La Fig. 42 evidencia la quantitat de munició necessària per a què funcioni l'artilleria de la inducció cap enrere: són les hipòtesis que permeten que els jugadors repliquin cada conclusió obtinguda en el procés d'inducció cap enrere. D'aquí, si alguna d'aquestes hipòtesis no està present, els jugadors podrien jugar una jugada diferent a la què selecciona la inducció cap enrere.

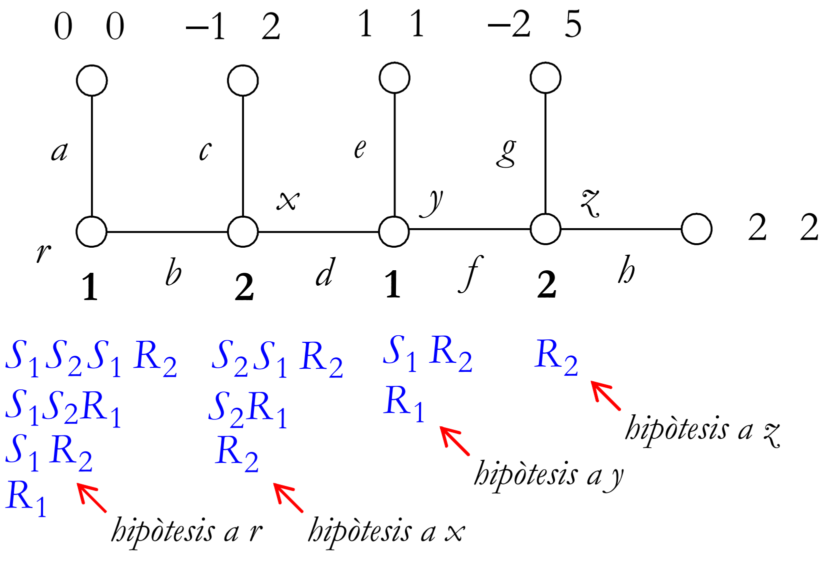


Fig. 42. Hipòtesis necessàries per a fer funcionar la inducció cap enrere

REMARCA 8. <u>Les jugades obtingudes per inducció cap enrere no són immunes a objeccions</u>.

Una paradoxa de la inducció cap enrere

Les classes de Microeconomia I tenen lloc dilluns, dimarts i dimecres. Al final d'una sessió de dimecres, el professor anuncia que farà un examen per sorpresa algun dia de classe de la propera setmana.

Els estudiants apliquen la inducció cap enrere per a intentar anticipar el dia de l'examen. El raonament comença el dimecres, que és l'últim dia on hi pot haver examen. Pot un examen per sorpresa tenir lloc el dimecres? No: si dilluns i dimarts han passat i no hi ha hagut examen, l'examen només pot ser el dimecres i no serà un examen per sorpresa.

Aquest raonament deixa el dimarts com l'últim dia on hi pot haver un examen per sorpresa. Però llavors si dilluns passa i no hi ha examen, se sap que l'examen serà el dimarts i tampoc no serà un examen per sorpresa.

Per tant, descartats dimecres i dimarts, l'únic dia on hi pot haver un examen per sorpresa és dilluns. En tal cas, l'examen tampoc no seria per sorpresa: un cop el professor fa l'anunci un dimecres que dilluns, dimarts o dimecres vinent hi haurà un examen per sorpresa, la inducció cap enrere porta a la conclusió que l'examen serà dilluns i, així, no serà cap sorpresa.

La inducció cap enrere sembla que fa impossible que el professor posi un examen per sorpresa. Tanmateix, arriba dimarts i el professor posa l'examen. I agafa tothom per sorpresa!

- Per a il·lustrar la Remarca 8, sigui el joc de la Fig. 43. La inducció cap enrere selecciona la jugada (a, c, e). La justificació d'(a, c, e) és que <u>1 és racional</u> (i tria e al node y), que <u>2 sap que 1 és racional</u> (d'on sap que 1 tria e al node y), que <u>2 és racional</u> (i tria c al node x), que <u>1 sap que 2 sap que 1 és racional</u> (d'on sap que 2 sap que 1 tria e al node y) i que <u>1 sap que 2 és racional</u> (d'on sap que 2 tria c al node x). Amb S_i = "el jugador i sap que" i R_i = "el jugador i és racional", la inducció cap enrere fa servir implícitament les hipòtesis R_1, R_2, S_2R_1, S_1R_2 i $S_1S_2R_1$.

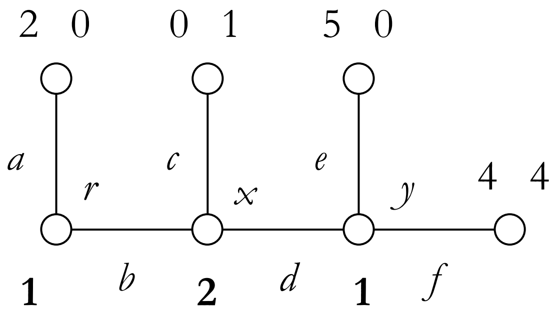


Fig. 43

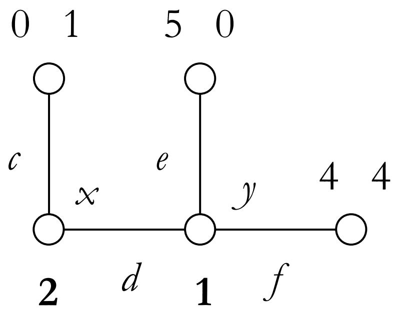


Fig. 44

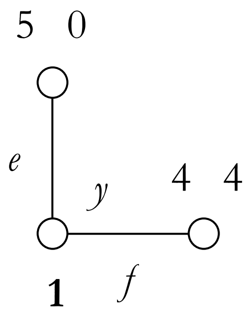


Fig. 45

- Però què passa si, després de tot, el jugador 1 no tria a sinó b? Aleshores 2 ha d'inferir que alguna de les hipòtesis relatives al jugador 1 que implicaven triar a és falsa: o R_1 és falsa, o S_1R_2 és falsa, o $S_1S_2R_1$ és falsa (o un subconjunt de les tres). Per tant, quan s'arriba al node x del joc de la Fig. 43, 2 pot creure que 1 no és racional o que 1 no sap que 2 és racional o que 1 no sap que 2 sap que 1 és racional. Suposem que 2 creu que 1 no és racional. Aquesta creença pot justificar triar d si s'expecta que 1 jugarà f.

- I si el jugador 1 creu que triar b induirà el jugador 2 a creure que 1 no és racional i, per tal motiu, el portarà a triar d, aleshores 1 tindrà incentiu a no jugar a r l'acció que prescriu la inducció cap enrere: l'acció a. La raó és que si 1 creu que 2 jugarà d, jugar b i f generarà un pagament de 4 per al jugador 1, superior al pagament de 2 corresponent a la jugada obtinguda per inducció cap enrere. Al joc de l'Exercici 2 de la Lliçó 9 també es pot qüestionar la recomanació que fa la inducció cap enrere al node x.

REMARCA 9. La inducció cap enrere pot seleccionar més d'una jugada a un joc seqüencial.

- Considerem el joc de la Fig. 46. La inducció cap enrere es comença aplicant a tot aquell node on cada acció del node posa fi al joc. En aquest cas, són dos aquests nodes: x i y. A x, la millor acció per a 2 és e. Per tant, tota jugada seleccionada per inducció cap enrere tria e al node x. En canvi, al node y, tant c com d donen al jugador 2 el màxim pagament. Això significa que la identificació de les jugades seguint la inducció cap enrere ha de considerar les dues possibilitats: què passa si es tria c a y (Fig. 46) i què passa si es tria d a y (Fig. 47).

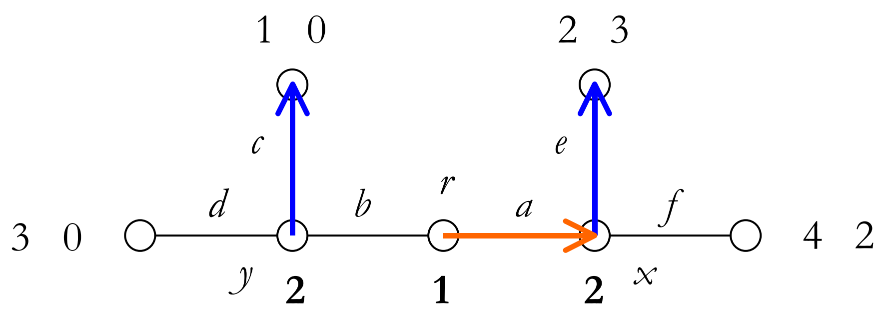


Fig. 46. Un joc on la inducció cap enrere selecciona més d'una jugada (1a jugada)

- A la Fig. 46, c es tria a y. Així, sabent què es tria a x i a y, es pot passar a determinar què es tria a r. En aquest cas, a és la millor elecció a r: triant a, 1 obté 2; i triant b, 1 obté 1. A la Fig. 47, d es tria a y. Com abans, sabent-se què es tria a x i a y, pot prendre's una decisió a r. Ara és b la millor elecció a r: triant a, 1 obté 2; i triant b, 1 obté 3.

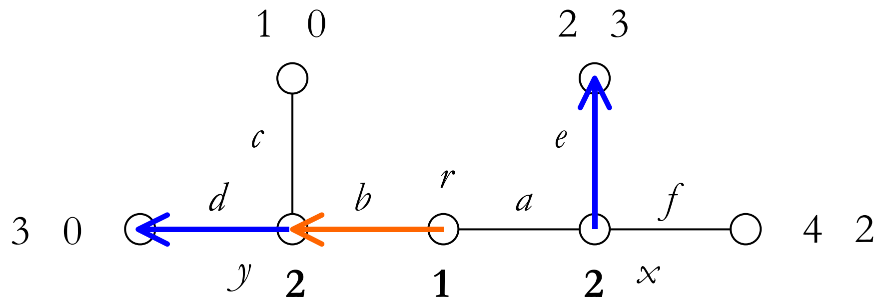


Fig. 47. Un joc on la inducció cap enrere selecciona més d'una jugada (2a jugada)

Exercici de la Lliçó 11

Troba les jugades que la inducció cap enrere selecciona als jocs seqüencials de lliçons i exercicis anteriors.

Lliçó 12. L'equilibri perfecte en subjocs

DEFINICIÓ 1. Un <u>subjoc</u> d'un joc seqüencial és un joc que té com a arrel un node de decisió del joc seqüencial i que està format per aquell node i tot el que hi ha a continuació del node.

- Tot subjoc d'un joc seqüencial s'obté triant un node de decisió i eliminant tot el que no es troba després del node. Per tant, <u>un joc seqüencial té tants subjocs com nodes de decisió</u>.

EXEMPLE 2. El joc de la Fig. 43 té tres subjocs: el mateix joc de la Fig. 43, el de la Fig. 44 i el de la Fig. 45. El primer és el subjoc amb arrel r; el segon, el subjoc amb arrel x; i el tercer, el subjoc amb arrel y.

DEFINICIÓ 3. Un <u>equilibri perfecte en subjocs</u> d'un joc seqüencial J és un equilibri de Nash e de J tal que, per a tot subjoc J^* de J, la part d'e que es juga a J^* és també un equilibri de Nash de J^*.

- Un equilibri perfecte en subjocs d'un joc seqüencial és un equilibri de Nash que genera equilibris de Nash a cada subjoc del joc.

EXEMPLE 4. La jugada (a, c, f) és un equilibri de Nash del joc J_{43} de la Fig. 43. Per a què (a, c, f) sigui un equilibri perfecte en subjocs del joc J_{43}, cal que, quan s'aplica la jugada (a, c, f) a cada subjoc del joc J_{43}, el que resulta és un equilibri de Nash del subjoc. Les Figs. 48, 49 i 50 mostren tots els subjocs del joc J_{43}. A cada subjoc s'ha indicat la part d'(a, c, f) que es jugaria al subjoc. Al subjoc de la Fig. 48, la part d'(a, c, f) que es jugaria és tota la jugada, perquè el subjoc de la Fig. 48 és el mateix joc J_{43}. Per tant, (a, c, f) és equilibri de Nash al primer subjoc. La part d'(a, c, f) que es jugaria al segon subjoc, el de la Fig. 49, és (c, f). Aquesta jugada del subjoc no constituteix un equilibri de Nash del subjoc, perquè d és millor que c donat f. Com a resultat, (a, c, f) no és un equilibri perfecte en subjocs del joc J_{43}. És casual que (a, c, f) no sigui una jugada seleccionada per la inducció cap enrere al joc J_{43}?

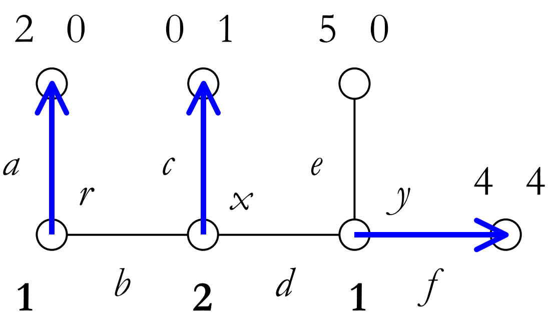


Fig. 48

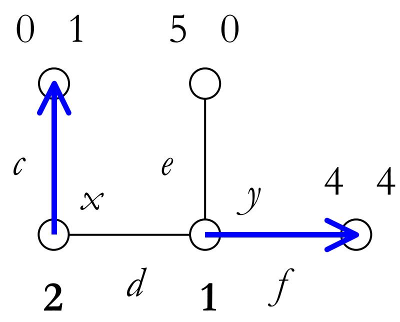


Fig. 49

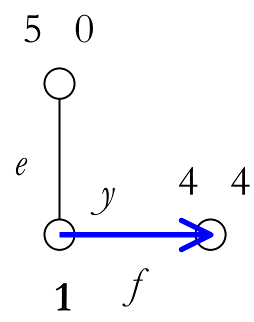


Fig. 50

PROPOSICIÓ 5. *Un equilibri de Nash d'un joc seqüencial és un equilibri perfecte en subjocs si, i només si, la inducció cap enrere selecciona l'equilibri.*

EXEMPLE 6. L'únic equilibri perfecte en subjocs del joc de la Fig. 27 és (*b*, *d*), que és la jugada seleccionada per inducció cap enrere. L'únic equilibri perfecte en subjocs del joc de la Fig. 28 és ((*a*, *e*), (*c*, *g*)), que és la jugada seleccionada per inducció cap enrere. I els dos equilibris perfectes en subjocs del joc de la Fig. 43 són (*a*, (*e*, *c*)) i (*b*, (*e*, *d*)), que són les dues jugades seleccionades per inducció cap enrere

PROPOSICIÓ 7. *A tot joc seqüencial hi ha almenys un equilibri perfecte en subjocs.*

Exercici de la Lliçó 12

Troba els equilibris perfectes en subjocs a tots els jocs seqüencials de lliçons i exercicis anteriors.

Preguntes de tipus test del Tema 1

1. Quina afirmació no és falsa?
(a) Tot joc simultani té algun equilibri de Nash
(b) Hi ha jocs seqüencials sense equilibris de Nash
(c) Un equilibri perfecte en subjocs pot no ser un equilibri de Nash
(d) Les tres afirmacions anteriors són falses

2. Si una estratègia és dominant per a un jugador
(a) també serà dominant per als demés
(b) dóna al jugador el pagament més alt del joc
(c) no és part d'un equilibri de Nash
(d) no és una estratègia dominada per cap altra estratègia

3. Una jugada d'un joc simultani és un equilibri de Nash si
(a) proporciona a tots els jugadors el màxim pagament que poden obtenir al joc
(b) és una estratègia dominant
(c) no és un equilibri perfecte en subjocs
(d) Res de l'anterior

4. Quina afirmació no és certa?
(a) Jugar un equilibri de Nash pot fer que tots els jugadors rebin el pagament més alt del joc
(b) Jugar un equilibri de Nash pot fer que tots els jugadors rebin el pagament més baix del joc
(c) L'eliminació successiva d'estratègies dominades pot acabar eliminant totes les estratègies d'algun jugador tret d'una
(d) L'eliminació successiva d'estratègies dominades sempre permet eliminar alguna estratègia d'algun jugador

5. En el cas dels jocs seqüencials, la inducció cap enrere és un procediment per a seleccionar
(a) subjocs
(b) equilibris no perfectes en subjocs
(c) jugadors
(d) jugades

6. Un node de decisió és el mateix que
(a) un node terminal
(b) una acció
(c) un equilibri perfecte en subjocs
(d) Res de l'anterior

7. Un tret dels jocs seqüencials és que
(a) tots els jugadors tenen els mateixos pagaments
(b) tot jugador té sempre més estratègies que accions
(c) és sempre impossible calcular tots els equilibris de Nash del joc
(d) sempre hi ha algun equilibri perfecte en subjocs

8. La inducció cap enrere
(a) s'aplica a jocs simultanis
(b) pot seleccionar jugades que no són equilibris de Nash
(c) comença a aplicar-se pel node que té assignades més accions
(d) identifica jugades que són equilibris perfectes en subjocs

9. Una jugada a un joc simultani és
(a) una estratègia
(b) un pagament
(c) un equilibri de Nash
(d) res de l'anterior

10. Una jugada a un joc seqüencial és
(a) una estratègia i una acció
(b) un pagament
(c) un equilibri de Nash
(d) res de l'anterior

11. Si una jugada és equilibri de Nash a un joc simultani
(a) tots els jugadors obtenen el pagament més alt
(b) algun jugador obté el pagament més baix
(c) tots els jugadors tenen una estratègia dominant
(d) res de l'anterior

12. Al JOC 2
(a) només l'equilibri ((*b*, *f*), (*d*, *h*)) és consistent amb la inducció cap enrere
(b) jugar la jugada ((*b*, *e*), (*d*, *h*)) fa que el jugador 1 obtingui un pagament de 3
(c) el jugador 2 juga primer
(d) totes les jugades fan que el joc arribi al node *z*

13. Quina afirmació és certa?
(a) A tots els jocs simultanis hi ha sempre almenys un jugador que té una estratègia dominant
(b) A tots els jocs simultanis hi ha sempre almenys un jugador que té una estratègia dominada
(c) Hi ha jocs simultanis sense equilibris de Nash
(d) Res de l'anterior

14. Quina afirmació no és falsa?
(a) La representació com a joc simultani d'un joc seqüencial pot fer que algun jugador tingui més estratègies de les que té al joc seqüencial
(b) Els jugadors dels jocs seqüencials mai no tenen estratègies dominants o dominades
(c) Els equilibris de Nash d'un joc seqüencial s'obtenen tots per inducció cap enrere
(d) Si a un joc simultani amb dos jugadors i dues estratègies, tots dos jugadors tenen una estratègia dominant aleshores el joc té almenys un equilibri de Nash

15. S'entén que un jugador és racional si
(a) no té estratègies
(b) no té pagaments
(c) té una estratègia dominada
(d) res de l'anterior

16. Un tret dels jocs seqüencials és que
(a) no tots els jugadors tenen pagaments
(b) es crea la distinció entre "acció" i "estratègia"
(c) només poden jugar un nombre senar de jugadors
(d) tot l'anterior

17. L'eliminació successiva d'estratègies dominades a un joc simultani
(a) crea un joc seqüencial que no té equilibris de Nash
(b) pot acabar no eliminant cap estratègia d'algun jugador
(c) pot acabar eliminant totes les estratègies d'algun jugador
(d) res de l'anterior

18. L'eliminació successiva d'estratègies dominades a un joc simultani
(a) crea un joc seqüencial
(b) pot acabar eliminant totes les estratègies d'un jugador tret d'una
(c) pot acabar eliminant totes les estratègies d'algun jugador
(d) res de l'anterior

19. Al JOC 1, hi ha 9
(a) jugades
(b) jugadors
(c) estratègies
(d) equilibris de Nash

20. Al JOC 1, l'estratègia a
(a) domina l'estratègia b
(b) domina l'estratègia d
(c) domina l'estratègia c
(d) tot l'anterior

21. El JOC 1
(a) no té cap equilibri de Nash
(b) té només un equilibri de Nash
(c) té més d'un equilibri de Nash
(d) res de l'anterior

22. Quina afirmació no és falsa?
(a) El JOC 1 és la representació com a joc simultani del JOC 2
(b) El JOC 2 no té cap equilibri de Nash
(c) El JOC 2 no té només un equilibri de Nash
(d) La inducció cap enrere selecciona la jugada (a, d) al JOC 1

23. Al JOC 2
(a) tots dos jugadors tenen 4 accions i 4 estratègies
(b) a tota jugada, el jugador 1 sempre acaba jugant dos cops
(c) la inducció cap enrere comença a aplicar-se al node r
(d) la inducció cap enrere selecciona l'equilibri de Nash (3, 3)

24. Una diferència entre els jocs simultanis i els seqüencials és que
(a) els jocs simultanis tenen més jugadors que els seqüencials
(b) tots els jocs simultanis tenen almenys un equilibri de Nash i cap dels jocs seqüencial no en té, d'equilibris de Nash
(c) que a un joc seqüencial és possible que algun jugador no acabi jugant però a un joc simultani tots els jugadors juguen el joc
(d) res de l'anterior

25. Quina afirmació sobre el JOC 2 és certa?
(a) La seva representació com a joc simultani té 16 jugades
(b) El joc no té cap equilibri de Nash
(c) La inducció cap enrere estableix que el jugador 2 sempre jugaria c al node x
(d) A tota jugada el jugador 2 és sempre l'últim a jugar

26. Al JOC 1,
(a) totes les estratègies del jugador 1 són dominants
(b) alguna estratègia és dominada
(c) alguna estratègia és dominant
(d) el jugador 2 té alguna estratègia dominada

27. Quina afirmació no és falsa?
(a) JOC 1 representa el JOC 2 com a joc simultani
(b) Tota jugada del JOC 2 és equilibri de Nash
(c) Al JOC 2, el jugador 2 té més estratègies que 1
(d) La inducció cap enrere selecciona només una jugada al JOC 2

28. Al JOC 3 amb $x = y = z = -1$, l'estratègia b
(a) domina l'estratègia a
(b) domina l'estratègia d
(c) no domina cap estratègia
(d) Res de l'anterior

29. Al joc simultani que representa el JOC 4,
(a) hi ha 4 jugadors
(b) el vector de pagaments que correspon a la jugada ((a, c), (e, g)) és (0, 2)
(c) cada jugador té dues estratègies
(d) hi ha algun equilibri de Nash

30. Al JOC 3
(a) tota jugada és equilibri de Nash si $x = y = z$
(b) $z = 4$ fa que (c, f) sigui un equilibri de Nash
(c) $y = 4$ fa que (a, f) sigui un equilibri de Nash
(d) $x = z = 4$ fa que (a, f) sigui un equilibri de Nash

31. Quina afirmació no és falsa?
(a) El JOC 4 no es pot representar com a joc simultani
(b) El JOC 3 no té equilibris de Nash si $x = y = z = 5$
(c) El JOC 4 no té cap subjoc
(d) El JOC 3 no té equilibris de Nash si $x = y = z = 0$

32. Al JOC 4
(a) 1 té les mateixes accions que estratègies
(b) el jugador 2 té més accions que estratègies
(c) tota jugada fa que s'hi arribi al node z del jugador 2
(d) per a cada acció hi ha un equilibri de Nash on es triaria l'acció

33. En relació amb el JOC 4,
(a) només $((b, f), (d, h))$ és consistent amb la inducció cap enrere
(b) $((b, e), d)$ és una jugada que, a més, és un equilibri de Nash
(c) la seva representació com a joc simultani té 8 jugades
(d) hi ha més d'una jugada consistent amb la inducció cap enrere.

34. Quina afirmació no és falsa?
(a) No totes les jugades d'un joc simultani són necessàriament equilibris de Nash
(b) Tot joc simultani té més equilibris de Nash que jugades
(c) Un joc seqüencial pot no tenir cap equilibri perfecte en subjocs
(d) Hi ha jocs seqüencials sense subjocs

35. Una estratègia dominada per a un jugador d'un joc simultani
(a) és una estratègia dominant per a algun altre jugador del joc
(b) no és eliminada durant el procés d'eliminació d'estratègies dominades
(c) és una assignació d'una acció a cada node de decisió del jugador
(d) Res de l'anterior

36. Un equilibri de Nash d'un joc seqüencial és
(a) una jugada del joc que compleix certes propietats
(b) un subjoc on cada jugador és racional
(c) una estratègia dominant
(d) el pagament més alt que un jugador pot obtenir al joc

37. La representació com a joc simultani d'un joc seqüencial
(a) és un joc simultani que sempre tindrà almenys un equilibri de Nash
(b) elimina totes les estratègies dominades d'un jugador
(c) és una manera d'obtenir les jugades per inducció cap enrere
(d) és una estratègia que és millor resposta per a algun jugador

38. Al JOC 5,
(a) totes les afirmacions següents són falses
(b) no hi ha cap valor d'x que faci que l'estratègia a domini l'estratègia b
(c) el jugador 2 té alguna estratègia dominant o dominada
(d) per a algun valor d'x i z el joc té algun equilibri de Nash

39. Quina afirmació no és certa?
(a) Una jugada obtinguda per inducció cap enrere a un joc seqüencial pot no ser un equilibri de Nash del joc
(b) Si un equilibri de Nash d'un joc seqüencial no és un equilibri perfecte aleshores no s'obté per inducció cap enrere
(c) L'aplicació de la inducció cap enrere a un joc seqüencial pot seleccionar totes les jugades del joc
(d) Un jugador d'un joc seqüencial no pot tenir més accions que estratègies

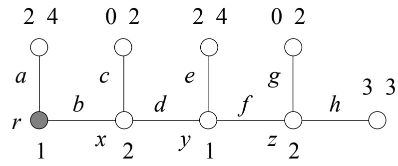
40. El JOC 6 és tal que
(a) amb independència del valor d'x, a tota jugada obtinguda per inducció cap enrere el jugador 2 tria c al node x
(b) amb independència del valor d'x, la representació com a joc simultani no té cap equilibri de Nash
(c) no és un joc seqüencial perquè no pot ser que el jugador 2 tingui només un node de decisió i el jugador 1 en tingui tres
(d) el jugador 1 té vuit estratègies

41. La inducció cap enrere,
(a) selecciona només un equilibri de Nash al JOC 5 quan $x = z = 4$
(b) sempre selecciona, a tot joc seqüencial, només un equilibri de Nash
(c) comença a aplicar-se pel node que té assignades menys accions
(d) identifica totes les jugades que són equilibris perfectes en subjocs

42. Quan $x = 5$, el JOC 6
(a) te un únic equilibri de Nash
(b) té cinc jugades
(c) té tres subjocs
(d) té més d'un equilibri de Nash

1 \ 2	d	e	f
a	9 0	7 0	5 1
b	8 0	6 1	4 0
c	3 1	2 0	5 0

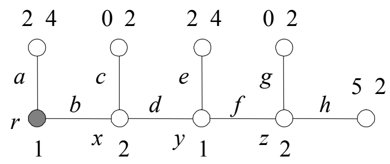
JOC 1



JOC 2

1 \ 2	d	e	f
a	9 0	7 0	x 1
b	8 0	6 1	4 0
c	3 y	2 0	z 0

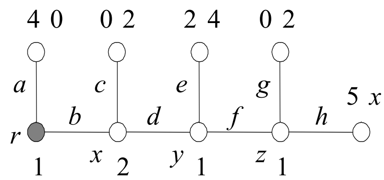
JOC 3



JOC 4

1 \ 2	d	e	f
a	9 0	7 0	x 1
b	8 0	6 1	4 0
c	3 1	2 0	z 0

JOC 5



JOC 6