

EXERCICIS

1. Demuestra que si la preferència estricta \succ és asimètrica i negativament transitiva, aleshores la preferència feble \succeq és completa i transitiva, assumint que $x \succeq y$ si, i només si, $y \not\succeq x$.

2. Defineix:

- (i) loteria;
- (ii) valor esperat d'una loteria;
- (iii) utilitat esperada d'una loteria;
- (iv) propietat de continuïtat d'una relació de preferència definida sobre un conjunt de loteries;
- (v) propietat d'independència d'una relació de preferència definida sobre un conjunt de loteries;
- (vi) aversió al risc;
- (vii) equivalent cert d'una loteria;
- (viii) coeficient d'aversió absoluta al risc.

3. Considera la funció $u(x) = x^{1/2}$ d'utilitat sobre el conjunt de premis dels nombres reals no negatius. Determina el valor esperat i la utilitat esperada de totes les loteries indicades a continuació.

x_1	p_1	x_2	p_2	x_3	p_3	x_4	p_4
0	1/3	1	1/3	2	1/6	3	1/6
3	0	2	0	1	0	0	1
1	1/2	1	1/8	1	2/8	1	1/8
1	0	1	0	0	1/2	0	1/2
-3	1/5	-2	2/3	3	1/10	2	1/10
1	1/12	0	3/12	0	4/12	1	1/3
-2	2/7	1	3/8	3	1/3	5	1/2

4. Considera el conjunt de loteries sobre el conjunt de premis $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, on $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ i $x_3 = 5$. (i) Troba dues loteries sobre X que tinguin el mateix valor esperat. (ii) Troba dues loteries sobre X que tinguin la mateixa utilitat esperada. (iii) Troba totes les loteries sobre X que tenen un valor esperat 2 i on els tres premis tenen la mateixa probabilitat. (iv) Troba una loteria sobre X que tingui valor esperat 6, una altra que tingui valor esperat 1 i una altra que tingui valor esperat 0.

5. Demuestra que si $u(x) = 5x$ representa en forma d'utilitat esperada una determinada relació de preferència \succ sobre un conjunt de loteries definides sobre dos premis x_1 i x_2 , aleshores $v(x) = 2 + 15x$ també representa \succ .

6. En què representa la paradoxa d'Allais una crítica a la teoria de la utilitat esperada?

7. En què representa la paradoxa d'Ellsberg una crítica a la teoria de la utilitat esperada?

8. Especifica un conjunt de premis X i una funció d'utilitat u sobre X . Tria tres loteries p , q i r sobre X tals que: (i) el valor esperat $E(p)$ de la loteria p sigui igual a la seva utilitat esperada $u_E(p)$; (ii) $E(q) > u_E(q)$; i (iii) $E(r) < u_E(r)$.

9. $X = \{x_0, x_1, x_2\}$ és el conjunt de premis, on $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ i $x_2 = 2$. Les loteries p , q i r satisfan $p(x_0) = 1/3$, $p(x_1) = 1/3$, $p(x_2) = 1/3$, $q(x_0) = 1/2$, $q(x_1) = 0$, $q(x_2) = 1/2$, $r(x_0) = 0$, $r(x_1) = 1$ i $r(x_2) = 0$. Determina la loteria reduïda de cadascuna de les loteries compostes (combinacions convexes de loteries) indicades a continuació.

	p	q	r
loteria composta 1?	1	1/2	1/2
loteria composta 2?	0	1/3	2/3
loteria composta 3?	3/20	3/5	1/4
loteria composta 4?	3/8	9/16	1/16
loteria composta 5?	0	1	0
loteria composta 6?	-1/4	-1/4	3/2
loteria composta 7?	1/3	0	1/3

10. Representa gràficament les següents funcions, definides per al conjunt de nombres reals no negatius, i determina quines d'elles correspondrien a individus aversos al risc, quines a individus amants del risc i quines a individus neutrals envers el risc:

- (i) $u(x) = 3x^{1/3}$;
- (ii) $u(x) = 3 + 3x^{1/3}$;
- (iii) $u(x) = 3x$;
- (iv) $u(x) = 3 + 3x$;
- (v) $u(x) = 3x^3$;
- (vi) $u(x) = 3 + 3x^3$;
- (vii) $u(x) = \ln 3x$;
- (viii) $u(x) = \ln(3 + x)$;
- (ix) $u(x) = 3 + \ln(3 + x)$;
- (x) $u(x) = e^{3x}$;
- (xi) $u(x) = 3 + e^{3x}$.

11. A cadascuna de les funcions de l'exercici 10, determina l'equivalent cert i la prima de risc de la loteria que assigna probabilitat $1/2$ al premi $x_1 = 1$ i probabilitat $1/2$ al premi $x_2 = 27$.

12. A cadascuna de les funcions de l'exercici 10 que expressin aversió al risc, calcula el coeficient d'Arrow-Pratt d'aversió absoluta al risc.

13. Determina la cobertura que maximitza la utilitat esperada d'un individu amb funció d'utilitat sobre la renda $u(m) = m^{1/2}$, si la renda m és 36, la pèrdua és 10, la probabilitat és $\pi = 0'1$: (i) si la prima p és actuarialment justa; (ii) si p és el doble de π ; i (iii) si p és la meitat de π .

14. Calcula l'expressió que defineix la cobertura que maximitza la utilitat esperada d'un individu amb funció d'utilitat sobre la renda $u(m) = \ln(1 + m)$, tant si $p = \pi$ com si $p > \pi$. Al cas de prima actuarialment injuta, determina l'efecte sobre la cobertura d'una variació de: (i) només la renda m ; (ii) només la pèrdua r ; (iii) només la prima p ; (iv) només la probabilitat π . Obtingueu el valor de la cobertura amb les dades de l'exercici 13.

15. Calcula l'expressió que defineix la cobertura que maximitza la utilitat esperada d'un individu amb funció d'utilitat sobre la renda $u(m) = 3m^{1/3}$, tant si $p = \pi$ com si $p > \pi$. Al cas de prima actuarialment injusta, determina l'efecte sobre la cobertura d'una variació de: (i) només la renda m ; (ii) només la pèrdua r ; (iii) només la prima p ; (iv) només la probabilitat π . Obté el valor de la cobertura si $m = 27$, $r = 9$, $\pi = 0'5$ i $p = 0'6$.

16. La paradoxa de Simpson: el que és cert per a grups por tornar-se fals en agregar-los. Per exemple, imaginem que la següent taula descriu la proporció aprovats/suspesos en Teoria Econòmica de la Decisió, segons es tracti d'homes o dones i segons resideixin a Reus o Tarragona.

	Homes	Dones
Reus	3 / 4	1 / 1
Tarragona	0 / 1	1 / 4
Total	3 / 5	2 / 5

A cada ciutat, el percentatge de dones que aproven és més alt que el percentatge d'homes que aproven, però en agregat són els homes qui tenen el percentatge més gran. Quina relació hi ha entre la paradoxa de Simpson i els axiomes del teorema de von Neumann-Morgenstern?

17. Més sobre la paradoxa del predictor. Imagina que el professor de Teoria Econòmica de la Decisió et planteja la següent situació. A la capsa A introdueix un paper que diu que, si aproves, t'atorga una matrícula d'honor a l'assignatura. A la capsa B ha introduït un de dos possibles papers. A un paper diu que tens un 0 com a nota final. A l'altre, que tens un 5. El professor et dona a escollir: o tries les dues capsas o tries només la capsa B. El professor t'informa que, si ell creu que triaràs només la capsa B, haurà ficat a la capsa l'escrit on diu que tens un 5. I que si ell creu que triaràs ambdues capsas, haurà ficat a la capsa B l'escrit on diu que tens un 0. A més, et fa saber que porta enfrontant-se a aquesta situació durant 25 anys i que sempre ha encertat l'elecció de tots els seus estudiants (com ets un desconfiat/da, els preguntes a tots aquests estudiants i et confirmen el que t'ha assenyalat el professor : mai no s'ha equivocat). Quina elecció fas? Per què?

18. [Inspirat per una situació que té lloc a la sèrie de televisió *Carnivàle*] Algú t'apunta amb un revòlver de 6 bales i has de decidir si prefereixes que et disparin dos cops amb una bala al tambor (carregador) del revòlver o que et disparin un cop amb dues bales a dins. Hi ha alguna diferència si, en el cas de dues bales, aquestes es troben una a continuació immediata de l'altra? Hi ha alguna diferència si, en el cas dels dos trets, aquests són consecutius o si, fet un tret, el segon es realitza després de girar el tambor?

19. La paradoxa d'Ellsberg. A una capsa hi ha 90 boles de color vermell, negre i blanc. 30 boles són de color blanc. Has de triar a l'atzar una bola. Comprova que triar p (rebutjant q) i triar p^* (rebutjant q^*) són eleccions inconsistentes amb la teoria de la utilitat esperada.

p = si la bola que treus és blanca, reps 100 €

q = si la bola que treus és negra, reps 100 €

p^* = si la bola que treus no és negra, reps 100 €

q^* = si la bola que treus no és blanca, reps 100 €