Equilibri de Nash

Definició de joc simultani

Un joc simultani consisteix en : (i) un conjunt finit N de decisors (anomenats jugadors) ; (ii) per a cada jugador $i \in N$, un conjunt finit S_i de decisions (anomenades estratègies) que poden prendre; i (iii) per a cada jugador $i \in N$, una funció real $u_i : \prod_{i \in N} S_i \to \mathbb{R}$ que especifica la utilitat (o pagament) del jugador i que resulta quan cada jugador pren una decisió.

Una jugada d'un joc simultani consisteix en assignar a cada jugador una de les seves estratègies. Una jugada, per tant, pot identificar-se amb un vector $(s_i)_{i \in N}$ on, per a tot $i \in N$, $s_i \in S_i$. Acceptada aquesta identificació, el conjunt de jugades S és igual al producte cartesià $\prod_{i \in N} S_i$ de tots els conjunts d'estratègies. Com a resultat, per a tot jugador $i \in N$, la seva funció d'utilitat u_i indica, per a cada jugada $s \in S$ del joc, quin és el pagament que el jugador i rep quan es juga la jugada s.

Un joc simultani representa la situació on cadascun dels jugadors del conjunt N de jugadors ha de triar (jugar) una (i només una) de les seves estratègies, de forma que cada jugador rep a continuació el pagament associat amb la jugada resultant quan es combinen les estratègies triades pels jugadors.

		2	
		c	d
1	a	1 –1	–1 1
	b	–1 1	1 –1

Fig. 1. Un joc simultani

La Fig. 1 representa un joc simultani. En aquest joc hi ha dos jugadors: $N = \{1, 2\}$. El conjunt d'estratègies del jugador 1 és $S_1 = \{a, b\}$, la qual cosa significa que el jugador 1 ha d'escollir entre l'alternativa a i l'alternativa b. El conjunt d'estratègies del jugador 2 és $S_2 = \{c, d\}$, de forma que el jugador 2 ha de triar l'opció c o l'opció d. El conjunt de jugades S resulta de combinar una estratègia del jugador 1 amb una estratègia del jugador 2: $S = \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\}$. Hi ha, per tant, quatre jugades. Cada jugada representa una manera de jugar el joc. A la Fig. 1, cada jugada està associada amb una casella. Els números de cada casella són els pagaments dels jugadors obtinguts quan es juga la jugada corresponent a la casella. La convenció és que el primer número a cada casella és el pagament del jugador que tria files (el jugador 1) i el segon número és el pagament del jugador que tria columnes (el jugador 2). Així, $u_1(a, b) = 1$, $u_1(a, c) = -1$, $u_1(b, c) = -1$, $u_1(b, d) = 1$, $u_2(a, b) = -1$, $u_2(a, c) = 1$, $u_2(b, c) = 1$, $u_2(b, d) = -1$.

Solució d'un joc simultani

Solucionar un joc simultani vol dir identificar un conjunt de jugades que es considera que podrien ser jugades per jugadors racionals, això és, per jugadors que trien la seva estratègia amb l'objectiu d'obtenir el pagament més alt possible. John F. Nash (1950) va proposar el que es considera la solució de referència dels jocs simultanis: els equilibris de Nash.

Estratègies pures i estratègies mixtes

La definició d'equilibri de Nash requereix ampliar el conjunt d'estratègies dels jugadors, ja que es permet que els jugadors facin eleccions probabilístiques d'estratègia. Per a tot conjunt finit F, sigui $\Delta(F)$ el conjunt de distribucions de probabilitat sobre el conjunt F, això és, $\Delta(F)$ és el conjunt de funcions $p : F \to [0, 1]$ tals que $\sum_{x\in F} p(x) = 1$. El conjunt d'estratègies mixtes del jugador i es defineix com $\Delta(S_i)$. Les estratègies originals (les del conjunt S_i) es poden considerar estratègies mixtes: la seva particularitat és que assignen tota la probabilitat a una única estratègia. Per a distingir les estratègies originals de les estratègies afegides, s'acostuma a anomenar "estratègia pura" a aquella que només assigna probabilitat positiva a una estratègia.

Per exemple, al joc de la Fig. 1, un element del conjunt $\Delta(S_1)$ d'estratègies mixtes del jugador 1 seria la distribució de probabilitat p tal que $p(a) = 1/3$ i $p(b) = 2/3$. Per a facilitar la presentació, aquesta estratègia es designarà, simplement, $a = 1/3$ (de forma que a representa tant el nom d'una estratègia com la probabilitat amb què es juga). L'estratègia mixta $a = 1/3$ significa que el jugador 1 tria aleatòriament la seva estratègia: amb una probabilitat d'un terç tria a i amb una probabilitat de dos terços tria b. La distribució de probabilitat p' tal que $p'(a) = 1$ i $p'(b) = 0$ defineix una estratègia mixta que s'identifica amb l'estratègia pura a, ja que implementar p' implica triar a amb seguretat.

Per extensió, una jugada passarà ser una especificació d'una estratègia mixta per a cada jugador. Per tant, el conjunt de jugades és ara $\prod_{i\in N} \Delta(S_i)$. Resta per definir el pagament (o utilitat) associat amb una jugada on les estratègies són mixtes. La hipòtesi és que la utilitat de pagaments ponderats per probabilitats coincideix amb la utilitat esperada dels pagaments. Per tant, per a tota jugada $\sigma \in \prod_{i\in N} \Delta(S_i)$, $u_i(\sigma) = \sum_{s\in S} \sigma(s)\cdot u_i(s)$, on $\sigma(s)$ és la probabilitat de la jugada s quan els jugadors juguen la jugada mixta σ.

Per exemple, al joc de la Fig. 1, sigui $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ la jugada on σ_1 és l'estratègia mixta del jugador 1 tal que $\sigma_1(a) = 1/3$ i $\sigma_1(b) = 2/3$ i on σ_2 és l'estratègia mixta del jugador 2 tal que $\sigma_2(c) = 3/4$ i $\sigma_2(d) = 1/4$. Aleshores, la probabilitat $\sigma(a, c)$ de la jugada (a, c) és $\sigma_1(a) \cdot \sigma_2(c) = 1/3 \cdot 3/4 = 1/4$; la probabilitat $\sigma(a, d)$ de la jugada (a, d) és $\sigma_1(a) \cdot \sigma_2(d) = 1/3 \cdot 1/4 = 1/12$; la probabilitat $\sigma(b, c)$ de la jugada (b, c) és $1/2$; i la probabilitat $\sigma(b, d)$ de la jugada (b, d) és $1/6$. En resum, la jugada mixta σ genera la distribució de probabilitat sobre les jugades originals representada a la Fig. 2.

		2	
		c	d
1	a	1 / 4	1 / 12
	b	1 / 2	1 / 6

Fig. 2. Probabilitat de cada jugada amb estratègies mixtes

En aquest cas, $u_1(\sigma) = \sum_{s\in S} \sigma(s)\cdot u_1(s) = \sigma(a, c)\cdot u_1(a, c) + \sigma(a, d)\cdot u_1(a, d) + \sigma(b, c)\cdot u_1(b, c) + \sigma(b, d)\cdot u_1(b, d) = 1/4\cdot 1 + 1/12\cdot(-1) + 1/2\cdot 1 + 1/6\cdot(-1) = 1/2$. Aquesta és la utilitat esperada (o pagament esperat) per part del jugador 1 quan es juga la jugada $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ tal que $\sigma_1(a) = 1/3$ i $\sigma_2(c) = 3/4$.

Q1. Determina quina és la utilitat esperada del jugador 2 quan es juga la jugada $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ tal que $\sigma_1(a) = ⅓$ i $\sigma_2(c) = ¾$ al joc de la Fig. 1.

Q2. Determina quina és la utilitat esperada dels jugadors 1 i 2 quan es juga la jugada $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ tal que $\sigma_1(a) = ⅖$ i $\sigma_2(c) = ½$ al joc de la Fig. 1.

Definició d'equilibri de Nash

Un equilibri de Nash d'un joc simultani $(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ és una jugada $\sigma \in \prod_{i\in N} \Delta(S_i)$ formada per estratègies mixtes tal que

$$\forall i \in N \quad \forall s_i \in S_i \quad u_i(\sigma) \geq u_i(s_i, \sigma_{-i}),$$

on (s_i, σ_{-i}) és la jugada on el jugador i tria l'estratègia (pura) s_i i la resta de jugadors trien les estratègies que els corresponen a la jugada (mixta) σ.

Una jugada σ és un equilibri de Nash si, i només si, <u>cap jugador *i* no pot incrementar el seu pagament esperat reemplaçant la seva estratègia σ_i a la jugada σ per una altra estratègia quan la resta de jugadors juguen d'acord amb la jugada σ</u>. Verificar que una jugada és un equilibri semblaria, en principi, que exigiria haver de verificar que cap estratègia d'un conjunt infinit (el conjunt d'estratègies mixtes de cada jugador és infinit) no és millor que l'estratègia recomanada a la jugada. Per fortuna, com estableix la definició anterior, només cal verificar que cap estratègia <u>pura</u> no és millor que l'estratègia de la jugada. Així que per a què σ sigui un equilibri cal que cap jugador i no pugui augmentar el seu pagament esperat reemplaçant σ_i per una estratègia pura s_i, <u>quan s'assumeix que la resta de jugadors juguen d'acord amb σ</u>.

Els equilibris de Nash expressen la idea d'<u>estabilitat estratègica</u>: tot equilibri de Nash es pot entendre com un acord que cap jugador no té incentiu a trencar quan espera que la resta de jugadors respecti l'acord.

El concepte de millor resposta

L'estratègia $\sigma_i \in \Delta(S_i)$ del jugador i és una <u>millor resposta</u> al vector d'estratègies σ_{-i} de la resta de jugadors si, per a tot $s_i \in S_i$, $u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(s_i, \sigma_{-i})$, on $(\sigma_i, \sigma_{-i}) \in \prod_{i\in N} \Delta(S_i)$ és la jugada on i tria l'estratègia σ_i i la resta de jugadors trien les estratègies especificades a σ_{-i}. En paraules: σ_i és una <u>millor resposta</u> a σ_{-i} si triar σ_i dóna al jugador i el pagament més alt possible donat que els altres jugadors estan jugant σ_{-i}. Quan σ_i és una <u>millor resposta</u> a σ_{-i}, el jugador i no pot incrementar el seu pagament triant una estratègia (pura, de fet) diferent de σ_i, assumint que la resta de jugadors juga σ_{-i}.

Per exemple, al joc de la Fig. 1, l'estratègia c és una millor resposta a l'estratègia b : quan el jugador 1 tria b, jugar c maximitza el pagament del jugador 2. L'estratègia c és també una millor resposta a l'estratègia (mixta) del jugador 1 on $a = ⅓$: si 2 tria c, el pagament esperat és $-1\cdot⅓ + 1\cdot⅔ = ⅓$; però si tria d, el pagament esperat de 2 és $1\cdot⅓ - 1\cdot⅔ = -⅓$. Finalment, si $a = ½$ totes les estratègies del jugador 2 són una millor resposta. Això evidencia que un jugador pot tenir més d'una millor resposta a les estratègies triades pels altres jugadors (per tant, es parlaria de correspondències de millor resposta i no de funcions de millor resposta).

Q3. Comprova que si a = ½ al joc de la Fig. 1 totes les estratègies del jugador 2 són una millor resposta.

Q4. Al joc de la Fig. 1, identifica totes les estratègies del jugador 2 per a les quals a és una millor resposta. Identifica totes les estratègies del jugador 2 per a les quals a = ½ és una millor resposta.

La noció de millor resposta permet redefinir el concepte d'equilibri de Nash: la jugada σ és un equilibri de Nash si, i només, si, per a tot jugador i, la seva estratègia σ_i a la jugada σ és una millor resposta a les estratègies σ_{-i} que la resta de jugadors juguen a la jugada σ.

Representació gràfica de les correspondències de millor resposta

Sigui el joc de la Fig. 3. Les fórmules que determinen el pagament esperat del jugador 1 són les següents.

• Pagament esperat del jugador 1 quan tria l'estratègia a i 2 juga l'estratègia c amb probabilitat c
$2c + 0(1 - c) = 2c$

• Pagament esperat del jugador 2 quan tria l'estratègia a i 2 juga l'estratègia c amb probabilitat c
$0c + 1(1 - c) = 1 - c$

		2	
		c	d
1	a	2 1	0 0
	b	0 0	1 2

Fig. 3. Un joc de coordinació

Per tant, a és l'única millor resposta si, i només si, el pagament esperat $2c$ de jugar a és més gran que el pagament esperat $1 - c$ de jugar b; això és, a és l'única millor resposta a l'estratègia del jugador 2 on es juga c amb probabilitat c si, i només si, $2c > 1 - c$. D'aquí resulta c > ⅓: si el jugador 2 tria c amb probabilitat superior a ⅓, aleshores l'única millor resposta d'1 és escollir a (amb probabilitat 1). Aquesta relació entre els valors probabilístics d'a i c es mostra al tram A de la gràfica de la Fig. 4.

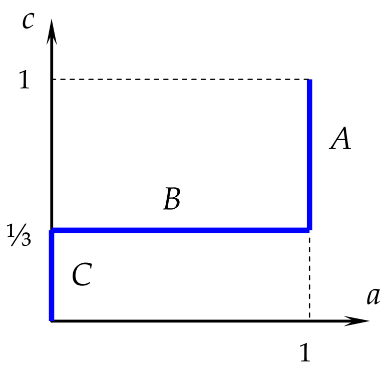


Fig. 4. Millors respostes d'1

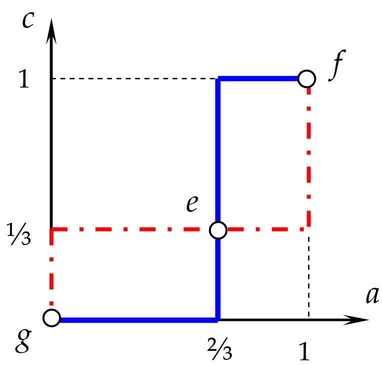


Fig. 5. Equilibris de Nash

De manera anàloga, b és l'única millor resposta si, i només si, $2c < 1 - c$. Per tant, b és estrictament millor que a per al jugador 1 si, i només si, $c < ⅓$. Aquesta part de la correspondència de millor resposta d'1 es correspon amb el tram C a la Fig. 4. Finalment, quan $c = ⅓$, el jugador 1 és indiferent entre a i b, ja que el pagament esperat de totes dues estratègies és ⅔. Això fa que qualsevol combinació entre a i b també sigui una millor resposta, de forma que totes les estratègies (mixtes) del jugador 1 són millor resposta a l'estratègia mixta $c = ⅓$ (tram B a la Fig. 4). <u>La Fig. 4 representa la correspondència de millor resposta del jugador 1</u>: per a cada estratègia (mixta) del jugador 2 (per a cada valor de c), quines són les estratègies mixtes d'1 (quins són els valors d'a) que maximitzen el pagament esperat d'1.

Q5. Representa gràficament la correspondència de millor resposta del jugador 2 al joc de la Fig. 3.

La Fig. 5 superposa les correspondències de millor resposta de tots dos jugadors. <u>Els equilibris de Nash es troben a les interseccions de les dues correspondències</u>. En aquest cas, els punts f, e i g. El punt f representa l'equilibri de Nash (amb estratègies pures) on $a = c = 1$, és a dir, la jugada (a, c). El punt g representa l'equilibri de Nash (amb estratègies pures) on $a = c = 0$, és a dir, la jugada (b, d). El punt e representa l'únic equilibri de Nash on algun jugador <u>randomitza</u> (tria aleatòriament). Aquest equilibri de Nash (amb estratègies mixtes) és $[a, c] = (⅔,⅓)$.

Q6. Comprova que $a = ⅔$ és millor resposta a $c = ⅓$ i que $c = ⅓$ és millor resposta a $a = ⅔$.

Q7. (Fudenberg i Tirole (1991), pp. 37 i 39) (i) Representa gràficament les correspondències de millor resposta dels dos jugadors del joc de la Fig. 6 i identifica els equilibris de Nash a la gràfica. (ii) Troba l'únic equilibri de Nash del joc de la Fig. 7.

		2	
		c	d
1	a	1 –1	3 0
	b	4 2	0 –1

Fig. 6

			2	
		d	e	f
	a	1 –2	–2 1	0 0
1	b	–2 1	1 –2	0 0
	c	0 0	0 0	1 1

Fig. 7

Q8. (Fudenberg i Tirole (1991, p. 17)) <u>El joc de la inspecció</u>. Troba tots els equilibris de Nash del següent joc. Hi ha dos jugadors, el treballador i el propietari de l'empresa. El primer decideix si treballar o no. El segon, si fer una inspecció al treballador o no. El cost de la inspecció per al propietari és $h > 0$. El cost de treballar per al treballador és $c > h$. Si el treballador treballa, obté el salari $w > c$ i el propietari obté un producte per valor $v > 0$.

Q9. Demostra que si un joc amb dos jugadors i dues estratègies cadascun té un únic equilibri de Nash i cada estratègia (pura) de cada jugador pot ser en alguna ocasió una millor resposta aleshores l'equilibri ha de ser amb estratègies mixtes.

Q10. (Shubik (1992, p. 243)) Troba tots els equilibris de Nash dels següents jocs. Torna a calcular els equilibris de Nash del segon joc si tots els pagaments es multipliquen per 10.

Jugador 1 (files), jugador 2 (columnes):

1 \ 2	*c*	*d*
a	2 6	4 2
b	6 0	0 4

1 \ 2	*d*	*e*	*f*
a	0 0	5 4	4 5
b	4 5	0 0	5 4
c	5 4	4 5	0 0

Jugador 3 tria *e* o *f*:

1 \ 2	*c*	*d*	*c*	*d*
	e		*f*	
a	1 1 1	0 0 0	0 0 0	1 2 1
b	0 0 0	2 1 1	1 1 2	0 0 0

1 \ 2	*c*	*d*	*c*	*d*
	e		*f*	
a	0 0 0	2 0 1	2 1 0	1 2 2
b	0 1 2	1 2 1	1 2 1	2 1 1

Q11. (i) Troba tots els equilibris de Nash del joc de l'esquerra, on el pagament del jugador 3 és el tercer valor en els vectors de pagaments. (ii) Torna a calcular els equilibris si el pagament del jugador 1 és el segon valor en els vectors, el pagament del 2 és el tercer valor i el pagament del 3 és el primer valor.

Inconvenient dels equilibris de Nash amb estratègies mixtes

1 \ 2	*c*	*d*
a	1 1	0 0
b	1 0	0 1

<u>Si σ és un equilibri de Nash i σ_i és una estratègia mixta, totes les estratègies pures que reben probabilitat positiva a σ_i proporcionen al jugador *i* el mateix pagament esperat</u> (assumint que la resta de jugadors juga d'acord amb σ_{-i}). Per exemple, a l'únic equilibri de Nash de la Fig. 1, $a = c = ½$ i, donat $c = ½$, el jugador 1 obté el mateix pagament esperat (zero) jugant *a* que jugant *b*. La qüestió és doncs quins incentius té el jugador 1 a triar *a* amb probabilitat ½ i no amb una altra probabilitat (i el mateix s'aplica al jugador 2). Amb tot, aquesta aparent inestabilitat dels equilibris amb estratègies mixtes també es produeix amb el equilibris amb pures. A tall d'exemple, al joc de l'esquerra, en relació amb l'equilibri de Nash [*a*, *c*], què incentiva al jugador 1 a triar *a* si el jugador 1 és <u>sempre</u> indiferent entre *a* i *b*?

Virtuts de l'equilibri de Nash

Una de les virtuts més importants del concepte d'equilibri de Nash és la seva <u>estabilitat estratègica</u>: si els jugadors es posen d'acord en jugar un equilibri de Nash aleshores cap jugador, per separat, no té incentiu a canviar d'estratègia. Al contrari, si una jugada no és un equilibri de Nash és que algun jugador té incentiu a canviar d'estratègia quan espera que els altres juguin la seva part de la jugada. Sembla una opinió fermament establerta que si un joc simultani té una solució aquesta ha de ser un equilibri de Nash.

Propietat fonamental dels equilibris de Nash
Tot joc simultani té almenys un equilibri de Nash.

Febleses de l'equilibri de Nash
Els pagaments dels equilibris de Nash no són sempre Pareto eficients. Per exemple, al joc de la Fig. 8, l'únic equilibri de Nash [*b*, *d*] proporciona a tots els jugadors un pagament inferior a la jugada [*a*, *c*]. Fins i tot, els pagaments d'un equilibri de Nash poden ser Pareto superiors als pagaments d'un altre equilibri: a la Fig. 9, l'equilibri de Nash [*b*, *d*] atorga a tots els jugadors pagaments més alts que l'equilibri de Nash [*a*, *c*]. A més, hi ha el problema de la multiplicitat: en general, un joc simultani tindrà més d'un equilibri de Nash (de fet, genèricament, un joc simultani té un nombre senar d'equilibris de Nash), la qual cosa porta al problema d'identificar criteris per a seleccionar-ne un (o descartar alguns). Per últim, un equilibri de Nash pot involucrar jugada estratègies feblement dominades (aquest terme es defineix a l'epígraf *Equilibri perfecte*). Per exemple, al joc de la Fig. 10, [*b*, *d*] és un equilibri de Nash i *b* és una estratègia feblement dominada per *a*.

		2	
		c	*d*
1	*a*	3 3	0 4
	b	4 0	1 1

Fig. 8. Dilema del presoner

		2	
		c	*d*
1	*a*	1 1	0 0
	b	0 0	2 2

Fig. 9. Joc de coordinació

		2	
		c	*d*
1	*a*	1 1	0 0
	b	0 0	0 0

Fig. 10

Càlcul dels equilibris de Nash
Per a il·lustrar el càlcul, sigui el següent joc, tret de Myerson (1991). En aquest joc hi ha 3 possibles tipus d'equilibri de Nash. Tipus 1: equilibris on ningú no randomitza (equilibris amb estratègies pures). Tipus 2: equilibris on només un jugador randomitza. Tipus 3 : equilibris on tothomo randomitza. Els equilibris de tipus 1 són fàcils de calcular: només cal inspeccionar jugada a jugada i comprovar si algun jugador augmenta el seu pagament fent una altra estratègia. El joc no té cap equilibri de Nash amb estratègies pures. En relació als de tipus 2, suposem primer que només randomitza el jugador 1. Per tant, el jugador 2 tria una estratègia pura. Si 2 tria *c*, 1 no randomitza, perquè *a* és millor que *b* (per a randomitzar, el jugador ha d'obtenir el mateix pagament esperat de cada estratègia a la què assigna probabilitat positiva). Per tant, no hi ha cap equilibri de Nash on 2 juga *c* i 1 randomitza. Si 2 tria *d*, 1 tampoc no randomitza: donat *d*, 1 no és indiferent entre *a* i *b*. Per últim, si 2 tria *e*, 1 no

			2	
		c	*d*	*e*
1	*a*	7 2	2 7	3 6
	b	2 7	7 2	4 5

posaria probabilitat positiva en a, perquè l'única millor resposta és b. En resum, no hi ha cap equilibri de Nash on només 1 randomitza. El cas on només 2 randomitza és similar. En conclusió, no hi ha cap equilibri de Nash on només un jugador randomitza.

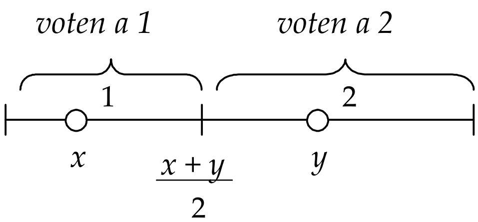
Passem finalment als equilibris de tipus 3 : tothom randomitza. Que el jugador 1 randomitzi vol dir que assigna probabilitat positiva tant a a com a b. Però el jugador 2 té quatre opcions de randomització: randomitzar entre c i d (i, per tant, e rep probabilitat 0); randomitzar entre c i e; randomitzar entre d i e; i randomitzar entre c, d i e. Considerem la primera opció: 2 randomitza entre c i d. Atès que això significa que e rep probabilitat 0, podem limitar (de moment) l'atenció al joc reduït representat a continuació, obtingut del joc original eliminant l'estratègia e.

		2	
		c	d
1	a	7 2	2 7
	b	2 7	7 2

Aquest joc té un equilibri de Nash on tothom randomitza: $a = c = ½$. Per tant, la jugada σ tal que $\sigma(a) = \sigma(b) = \sigma(c) = \sigma(d) = ½$ i $\sigma(e) = 0$ resulta ser un candidat a equilibri de Nash (quan tothom randomitza i 2 només assigna probabilitat positiva a c i d) del joc original. Cal finalment retornar al joc original i comprovar que, efectivament, el jugador 2 fa bé de posar probabilitat 0 sobre e. Però el cas és que no fa bé, perquè $c = d = ½$ no és millor resposta a l'estratègia $a = ½$: donat $a = ½$, triar e dóna un pagament esperat d'$\frac{11}{2}$, que és superior al pagament esperat de jugar l'estratègia mixta on $c = d = ½$ (pagament de $\frac{9}{2}$). En resum, no hi ha cap equilibri on tots dos randomitzen i 2 randomitza entre c i d.

Q12. Finalitza el càlcul dels equilibris de Nash del joc anterior.

Q13. (Martin Osborne, http://www.economics.utoronto.ca/osborne/igt/index.html) Competència electoral. Els votants es troben distribuïts arbitràriament a llarg d'un interval (per exemple, [0, 1]). Els valors de l'interval mesuren la posició ideològica (per exemple, 0 = extrema esquerra i 1 = extrema dreta). Dos candidats, 1 i 2, han de triar situar-se en un punt de l'interval. Els votants voten al candidat que tenen més a prop. La figura il·lustra qui vota a qui si 1 tria la posició x i 2 tria la y. Si tots dos trien la mateixa posició, es reparteixen els votants al 50%. Guanya el candidat que rep més vots. Si hi ha d'empat, cadascú té una probabilitat del 50% de guanyar. Troba els equilibris de Nash del joc. [Pista: sigui m la posició del votant medià, això és, el votant que té tant a l'esquerra com a la dreta el 50% dels votants. Analitza què passa si un candidat no tria la posició m.]



Bibliografia

- Nash, John F. (1950): "Equilibrium points in n-person games", *Proceedings of the National Academy of Sciences* 36, 48–49.
- Fudenberg, Drew i Tirole, Jean (1991): *Game Theory*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, pp. 3–29. [658.012 Fud]
- Myerson, Roger B. (1991): *Game Theory. Analysis of Conflict*. Harvard University Press: Cambridge, Massachusetts, pp. 88–108. [658.012 Mye]
- Shubik, Martin (1992): *Teoría de juegos en las Ciencias sociales. Conceptos y soluciones*. Fondo de Cultura Económica: México, pp. 25–40 i 232–240. [658.012 Shu]