

Emparellament

Una de caçafortunes

A una celebració de l'alta societat, hi ha 4 vídues acabalades (A, B, C i D) i hi ha 4 gigolós (a, b, c i d) a la caça d'alguna d'aquestes vídues. La millor oportunitat la tenen amb ocasió d'un ball, moment en què cada gigoló proposarà ballar a alguna de les vídues, on cada vídua prefereix ballar amb algun dels gigolós a no ballar. Les preferències dels gigolós sobre les vídues, i d'elles sobre ells, són

a	b	c	d	A	B	C	D
A	A	A	B	d	c	c	a
B	C	C	C	c	b	a	d
C	B	D	A	b	a	d	b
D	D	B	D	a	d	b	c

on cada columna expressa un ordre de preferència estricta, de més preferit a menys preferit. Per exemple, la segona columna significa que el gigoló b prefereix la vídua A a totes les altres, la vídua C a les D i B i, finalment, la vídua D a la B . Una parella de ball (x, X) formada per l'home x i la vídua X és estable si no hi ha cap altra parella (y, Y) tal que: (i) x i Y preferirien ballar junts abans que ballar amb la parella que ara tenen; o bé (ii) y i X preferirien ballar junts abans que ballar amb la parella que ara tenen. Existeix alguna parella de ball estable?

http://en.wikipedia.org/wiki/Stable_marriage_problem

L'algorisme de Gale i Shapley (1962)

L'algorisme de Gale i Shapley permet determinar un emparellament estable a problemes del tipus anterior. Segons l'algorisme, a la primera etapa, cada home s'adreça a la dona que considera més preferida. Si totes les dones són sol·licitades per algun proponent, l'algorisme s'acaba i cada home és emparellat amb la dona sol·licitada. En cas contrari, les dones que reben més d'una proposta, mantenen a la reserva al proponent més preferit i rebutgen definitivament als altres. A la segona etapa, els homes rebutjats s'adrecen a la segona dona més preferida. Si totes les dones tenen un sol·licitant (els homes en la reserva es consideren sol·licitants), l'algorisme acaba. Si no totes en tenen algun, aleshores cada dona amb algun proponent manté en la reserva el més preferit i rebutja definitivament els demés. Aquest mateix procediment s'aplica a les següents etapes, fins que totes les dones tinguin algun sol·licitant, moment en què l'algorisme finalitza i s'emparella cada dona amb el seu únic sol·licitant. Per a il·lustrar com funciona l'algorisme, apliquem-lo al cas dels gigolós i les vídues. A l'etapa 1, els gigolós proposen de ballar a les vídues més preferides.

A	B	C	D
a	b	c	d

L'anterior representa el següent: A rep les propostes d' a, b i c ; B rep la proposta de d ; i ni C ni D reben cap proposta. Atès que no totes les dones tenen un pretendent, l'algorisme no termina. Llavors identifiquem les dones amb més d'una proposta (en aquest cas, A), mantenim a la reserva el seu proponent més preferit entre els qui la sol·liciten (c) i eliminem els demés (a i b).

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>a</i> <i>c</i>	<i>d</i>		

S'inicia ara l'etapa 2, on *A* manté a *c* a la reserva, *B* manté a *d* a la reserva i *a* i *b* s'adrecen a les seves segones opcions més preferides: *B* en el cas d'*a* i *C* en el cas de *b*.

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>c</i>	<i>d a</i>	<i>b</i>	

Ara és *B* qui té dos sol·licitants. Aleshores, manté a la reserva al més preferit dels dos (*a*) i dona carbasses a l'altre (*d*).

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>c</i>	<i>d</i> <i>a</i>	<i>b</i>	

A l'etapa 3, en haver estat rebutjat per la seva primera opció *B*, *d* passa a sol·licitar a la seva segona millor opció *C*.

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>c</i>	<i>a</i>	<i>b d</i>	

En tenir *C* dos sol·licitants, manté a la reserva al més preferit dels dos (*d*) i rebutja l'altre (*b*).

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>c</i>	<i>a</i>	<i>b</i> <i>d</i>	

A l'etapa 4, l'únic gícoló rebutjat (*b*), s'adreça a la vídua més preferida entre aquelles que no l'han rebutjat: *B*.

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>c</i>	<i>a b</i>	<i>d</i>	

Dels seus dos sol·licitants, *B* prefereix *b* a *a*. Per tant, manté a *b* i se'n desfà d'*a*.

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>c</i>	<i>a</i> <i>b</i>	<i>d</i>	

A l'etapa 5, després d'haver estat rebutjat, *a* proposa a la vídua més preferida entre aquelles que no l'han rebutjat: *C*.

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>c</i>	<i>b</i>	<i>a d</i>	

C manté a *a* i rebutja a *d*.

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>c</i>	<i>b</i>	<i>a</i> <i>d</i>	

A l'etapa 6, el rebutjat *d* s'adreça a *A*.

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>c d</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	

A manté a d i rebutja a c . En aquest punt, es pot treure una conclusió: d s'emparellarà amb A , ja que d és el gigoló més preferit per la vídua A , de forma que A rebutjarà a qualsevol altre gigoló que la pretengui.

A	B	C	D
ϵ d	b	a	

A l'etapa 7, després d'haver estat rebutjat per la seva primera opció A , c s'adreça a la seva segona opció, C .

A	B	C	D
d	b	a c	

En la mesura que C prefereix c a a , a és rebutjat per C .

A	B	C	D
d	b	a c	

A l'etapa 8, a sol·licita a l'única vídua que no l'ha rebutjat: D .

A	B	C	D
d	b	c	a

Però ara totes les vídues tenen un pretendent i l'algorisme finalitza amb l'emparellament anterior: $A-d$, $B-b$, $C-c$ i $D-a$ (el mal tràngol de D en no haver estat demanada per ningú fins a l'últim moment es compensa amb el fet d'emparellar-se amb el seu gigoló més preferit).

Verifiquem que es tracta d'un emparellament estable. Comencem per la parella (d, A) . És evident que, per a A , aquest emparellament és estable, ja que d és el gigoló més preferit per A . Amb relació a d , A és la tercera vídua favorita. Per tant, cal verificar que cap de les altres dues vídues més preferides que A (B i C) no prefereix ballar amb d que amb la parella respectiva (b en el cas de B i c en el cas de C). Considerem primer la possible parella (d, B) . És clar que d prefereix aquest emparellament a l'emparellament (d, A) , però també es clar que B prefereix mantenir la parella (b, B) a trencar-la en favor de (d, B) , perquè B prefereix qualsevol gigoló abans que a d . Amb la segona possible parella (d, C) passa el mateix: C prefereix c (la parella que li toca a l'emparellament construït per l'algorisme) a d . Conclusió: (d, A) és una parella estable.

Q1. Comprova que les altres 3 parelles (b, B) , (c, C) i (a, D) són estables.

L'algorisme de Gale i Shapley s'ha presentat en la versió "els homes proposen". També es pot definir en la versió alternativa "les dones proposen", on tot és igual tret que són les dones les que sol·liciten els homes i són aquests qui accepten o rebutgen.

Q2. A l'exemple de gigolós i vídues, verifica que l'algorisme on les vídues proposen finalitza amb el mateix emparellament que quan els gigolós proposaven.

Q3 demostra que les dues versions de l'algorisme no sempre generen el mateix emparellament.

Q3. Considera les preferències dels homes a, b, c i d per les dones A, B, C i D , i d'aquestes per aquells, indicades a continuació. Prova que si els homes proposen, l'algorisme de Gale i Shapley genera l'emparellament $A-d, B-c, C-b$ i $D-a$. Prova que si les dones proposen, l'algorisme de Gale i Shapley genera l'emparellament $A-d, B-a, C-b$ i $D-c$. Demuestra que cada emparellament és estable.

a	b	c	d
A	A	A	A
B	B	B	B
C	C	C	C
D	D	D	D

A	B	C	D
d	d	c	b
a	c	d	d
b	a	b	c
c	b	a	a

Propietats de l'algorisme de Gale i Shapley

- Tant en la versió on proposen els homes com en la versió on proposen les dones, l'algorisme finalitza en un màxim d' $n^2 - 2n + 2$ etapes, on n és el nombre d'homes (i de dones).
- Tant en la versió on proposen els homes com en la versió on proposen les dones, l'algorisme finalitza amb un emparellament estable.
- Si la versió on proposen els homes i la versió on proposen les dones generen el mateix emparellament, aleshores aquest emparellament és l'únic emparellament estable.

Q4. (Gura i Maschler (2008, p. 25)). El següent exemple demostra que, per a $n = 4$, l'algorisme (on proposen els homes) finalitza en exactament $n^2 - 2n + 2 = 10$ etapes. Troba l'emparellament resultant i compara'l amb l'emparellament que resulta quan les dones proposen.

a	b	c	d
A	A	B	C
B	B	C	A
C	C	A	B
D	D	D	D

A	B	C	D
c	d	a	d
d	a	b	c
a	b	c	a
b	c	d	b

Q5. Amb homes a, b i c i dones A, B i C , determina preferències que facin que $a-A, b-B$ i $c-C$ siguin un emparellament estable. Troba preferències que facin que aquest sigui l'únic emparellament estable.

Q6. (Gura i Maschler (2008, p. 9)). Demuestra que, amb les següents preferències, són estables els emparellaments: (i) $A-a, B-b, C-c, D-d$ i $E-e$; (ii) $A-e, B-a, C-b, D-c$ i $E-d$; (iii) $A-d, B-e, C-a, D-b$ i $E-c$; i (iv) $A-c, B-d, C-e, D-a$ i $E-b$.

a	b	c	d	e
A	B	C	D	E
B	C	D	E	A
C	D	E	A	B
D	E	A	B	C
E	A	B	C	D

A	B	C	D	E
b	c	d	e	a
c	d	e	a	b
d	e	a	b	c
e	a	b	c	d
a	b	c	d	e

Q7. (Gura i Maschler (2008, p. 43)). Amb les següents preferències, quin emparellament genera l'algorisme de Gale i Shapley quan els homes proposen? I quan ho fan les dones? És estable l'emparellament $A-a, B-b, C-c$ i $D-d$. Demostra que només hi ha 3 emparellaments estables.

a	b	c	d
B	C	D	C
A	B	A	B
D	A	C	D
C	D	B	A

A	B	C	D
d	c	a	a
b	b	c	d
a	d	b	c
c	a	d	b

Estabilitat i optimalitat dels emparellaments

Per a recordar, un emparellament és estable si, per a totes les parelles (x, X) i (y, Y) , no és el cas que (i) x prefereix Y a X i Y prefereix x a y o que (ii) X prefereix y a a i y prefereix X a Y . Un emparellament E és òptim per a l'home (o dona) α si no existeix cap emparellament estable E' tal que α prefereix la parella que li assigna E' a la parella que li assigna E .

Per exemple, els únics emparellaments estables amb la preferències de Q7 són: (i) $A-a, B-d, C-b$ i $D-c$; (ii) $A-d, B-b, C-c$ i $D-a$; i (iii) $A-a, B-b, C-c$ i $D-d$. Considerem la dona D . Aquesta dona prefereix l'emparellament (ii) al (iii) i el (iii) a l'(i). Això fa que ni (i) ni (iii) siguin òptims per a D . Per a D , només (ii) és òptim. En canvi, per a C , tant (ii) com (iii) són òptims, ja que de les parelles que obté a algun emparellament estable (b i c), el més preferit de totes dues (c) s'obté tant a (ii) com a (iii).

Q8. Amb les preferències de Q7, per a cada home, quins són els seus emparellaments òptims? Existeix un emparellament estable que sigui òptim per a tots els homes? I per a totes les dones?

Optimalitat dels emparellaments de l'algorisme de Gale i Shapley

L'emparellament generat per l'algorisme de Gale i Shapley quan els homes proposen és òptim per a tots els homes. L'emparellament generat per l'algorisme quan les dones proposen és òptim per a totes les dones.

Q9. Verifica el resultat anterior quan les preferències són les de Q7.

Q10. (Gura i Maschler (2008, p. 52)). Amb les següents preferències, comprova que l'únic emparellament estable és $A-c, B-d, C-a$ i $D-b$.

a	b	c	d
A	A	B	D
B	D	A	B
C	C	C	C
D	B	D	A

A	B	C	D
d	b	d	c
c	d	a	b
a	a	b	a
b	c	c	d

Bibliografia

- Gura, Ein-ya i Maschler, Michael B. (2008): *Insights into Game Theory: An Alternative Mathematical Experience*. Cambridge University Press: Cambridge, capítol 1.
- Gale, David i Shapley Lloyd S. (1962): "College admissions and the stability of marriage", *American Mathematical Monthly* 69, 9–15.