El mecanisme de Groves-Clarke

Una de celebracions

Els estudiants de Microeconomia Superior han aprovat tots l'assignatura i es plantegen fer una celebració. L'opció a és una microfesta on només hi participen els estudiants. L'opció b és muntar una macrofesta on hi pugui assistir tothom que vulgui. Per a cada estudiant i, la utilitat (neta) de l'opció $c \in \{a, b\}$ és $u_i(c) = v_i(c) - c_i(c)$, on $v_i(c)$ representa el benefici que c proporciona a i i $c_i(c)$ representa el cost de finançar l'opció c que ha d'assumir l'estudiant i.

Els estudiants adopten la següent regla de decisió (on el sumatori comprèn tots els estudiants): si $\sum_i u_i(a) > \sum_i u_i(b)$ aleshores es tria l'opció a; en cas contrari, es tria l'opció b. Suposem que l'objectiu és implementar aquesta regla: que quan $\sum_i u_i(a) > \sum_i u_i(b)$ es triï a i que quan $\sum_i u_i(a) \leq \sum_i u_i(b)$ es triï b. L'inconvenient és que cada u_i és informació privada: només i sap quina és la seva funció v_i (la funció c_i se suposa ja determinada pel col·lectiu d'estudiants).

L'inconvenient es resol dissenyant un mecanisme (directe) que indueixi els estudiants a revelar la utilitat real que li proporciona cada opció. Per a eliminar tota consideració estratègica a l'hora de revelar utilitats, es proposa que la implementació de la regla sigui mitjançant equilibris dominants. Això és, que revelar l'autèntica utilitat (dir la veritat) sigui sempre (revelin el que revelin els altres) una millor resposta per a cada estudiant. El <u>mecanisme de Groves-Clarke</u> (atribuït a Theodore Groves i Edward H. Clarke) ofereix una solució a aquest problema, ja que és un mecanisme que <u>incentiva a tot estudiant a revelar la utilitat que assigna a cada opció</u>.

El mecanisme de Groves-Clarke

El mecanisme s'entén aplicat per un agent coordinador (que podria ser un dels estudiants) que segueix mecànicament i fidel les 3 etapes en què s'organitza el mecanisme.

• <u>Etapa 1: revelació</u>. Cada estudiant i declara al coordinador els valors d'utilitat $\hat{u}_i(a)$ i $\hat{u}_i(b)$ que i atribueix a cada opció (atès que els valors $c_i(a)$ i $c_i(b)$ s'entenen coneguts per tothom, revelar els valors relatius a $u_i(a)$ i $u_i(b)$ equival a revelar els valors relatius a $v_i(a)$ i $v_i(b)$). Els valors $\hat{u}_i(a)$ i $\hat{u}_i(b)$ no tenen perquè coincidir amb els valors autèntics $u_i(a)$ i $u_i(b)$: cada estudiant decideix lliurement quins valors declarar.

• <u>Etapa 2: decisió</u>. El coordinador determina les sumes dels valors revelats per a cada opció. Si $\sum_i \hat{u}_i(a) > \sum_i \hat{u}_i(b)$ el coordinador declara que l'opció a seguir és a; si $\sum_i \hat{u}_i(a) \leq \sum_i \hat{u}_i(b)$, declara que és b.

• <u>Etapa 3: transferències</u>. A banda dels pagaments $c_i(a)$ i $c_i(b)$ que cada estudiant i hauria de fer per a costejar cada opció, el coordinador dicta que cada estudiant i ha pagar addicionalment l'import T_i calculat de la següent manera. Sigui i un estudiant, sigui c l'opció que se selecciona a l'etapa 2 i sigui d l'opció que es triaria a l'etapa 2 si i no participés en el mecanisme (si i no participés, el valors $\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a)$ i $\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b)$ determinarien l'opció a seguir).

(i) Si $c = d$ aleshores $T_i = 0$.

(ii) Si $c \neq d$ aleshores $T_i = \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(d) - \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(c)$.

L'etapa 3 és la clau del mecanisme perquè elimina els incentius a revelar valoracions falses de les opcions. La condició (i) diu que l'estudiant i no ha de fer cap contribució addicional si la seva participació no altera el resultat que s'hauria produït sense la seva participació. Per exemple, suposem que a es tria a l'etapa 2. Per a què a també es triï a l'etapa 2 sense la participació d'i cal que $\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a) > \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b)$. Així doncs, si $\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a) > \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b)$ i a és l'opció triada aleshores i no ha de pagar més del valor $c_i(a)$ ja establert. La raó és que la valoració que faci i d'a o de b no afecta la decisió presa a l'etapa 2: amb ell, es tria a; sense ell, es triaria també a. El principi que justifica (i) és que si i no altera la decisió amb les seves valoracions, ja està bé amb el inicialment s'havia determinat que havia de pagar.

Q1. L'anàlisi anterior demostra que, quan a és escollida a l'etapa 2, aleshores $T_i = 0$ en els següents tres casos: $\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a) > \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b)$ i $\hat{u}_i(a) > \hat{u}_i(b)$; $\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a) > \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b)$ i $\hat{u}_i(a) = \hat{u}_i(b)$; i $\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a) > \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b)$ i $\hat{u}_i(a) < \hat{u}_i(b)$. Determina en quins casos $T_i = 0$ quan b és escollida a l'etapa 2.

Q2. Si a és escollida a l'etapa 2, per què $\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a) \leq \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b)$ i $\hat{u}_i(a) \leq \hat{u}_i(b)$ no és un cas possible?

La condició (ii) estableix que i ha de pagar més de l'inicialment acordat $c_i(c)$ només en cas que les valoracions comunicades per i al coordinador modifiquin l'opció que s'escolliria a l'etapa 2 si i no participés. Quan això passa, i ha de pagar la pèrdua d'utilitat (el cost) que la seva participació causa als demés.

Per exemple, suposem que a se selecciona a l'etapa 2. Si la participació d'i altera el resultat, llavors s'ha de tenir que, sense i, es triaria b. Per tant, $\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a) \leq \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b)$: si i no participés, la regla de decisió de l'etapa 2 dictaria que, amb $\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a) \leq \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b)$, b fos l'opció escollida. Per a què les valoracions d'i modifiquin aquest resultat, cal que $\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a) + \hat{u}_i(a) > \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b) + \hat{u}_i(b)$. Com a conseqüència, cal que $\hat{u}_i(a) > \hat{u}_i(b)$. Així que, quan a se selecciona a l'etapa 2, l'únic cas en què (ii) s'aplica té lloc quan $\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a) \leq \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b)$ i $\hat{u}_i(a) > \hat{u}_i(b)$. Quan aquest és el cas, l'estudiant i ha de pagar $T_i = \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b) - \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a)$. Aquesta diferència és el cost que representa per als demés estudiants passar de prendre l'opció b a prendre l'opció a. Sense i, s'hauria pres l'opció b, la qual cosa suposa que $\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b) \geq \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a)$. Amb i, s'hauria pres l'opció a i, atès que $\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b) \geq \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a)$, el canvi de decisió causa un perjudici a la resta d'estudiants igual a $\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b) - \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a) \geq 0$. L'etapa 3 diu que si l'individu i és decisiu (la seva intervenció altera el resultat) llavors i ha de pagar pel perjudici que la seva participació crea en els demés. Atès que el perjudici seria la diferència, $\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b) - \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a)$ és aquest mateix import el que i ha de pagar en forma de transferència (o impost) $T_i = \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b) - \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a)$.

Q3. Fes l'anàlisi anterior si b és escollida a l'etapa 2, això és, determina les combinacions dels valors $\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a)$, $\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b)$, $\hat{u}_i(a)$ i $\hat{u}_i(b)$ que fan que la participació d'i canviï el resultat d'a a b. A cadascun d'aquests casos, calcula T_i.

Q4. Fes una taula on es determini el valor T_i combinant les 3 possibles relacions entre $\hat{u}_i(a)$ i $\hat{u}_i(b)$ [$\hat{u}_i(a) > \hat{u}_i(b)$, $\hat{u}_i(a) = \hat{u}_i(b)$ i $\hat{u}_i(a) < \hat{u}_i(b)$] amb les 3 possibles relacions entre $\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a)$ i $\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b)$.

Q5. Quin és l'espai de missatges M del mecanisme de Groves-Clarke? I la funció de resultats r? Es tracta d'un mecanisme directe?

El mecanisme de Groves-Clarke no incentiva revelacions falses a l'etapa 1

Triem i i suposem que, per a tot $j \neq i$, j declara, a l'etapa 1, els valors $\hat{u}_j(a)$ i $\hat{u}_j(b)$, que poden no coincidir amb els valors reals $u_j(a)$ i $u_j(b)$. Es tracta de verificar que declarar els valors autèntics $u_i(a)$ i $u_i(b)$ a la primera etapa constitueix una millor resposta d'i a les declaracions dels demés. Hi ha dos casos: $\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a) + u_i(a) > \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b) + u_i(b)$; i $\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a) + u_i(a) \leq \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b) + u_i(b)$. <u>El primer cas és aquell on el mecanisme selecciona l'opció *a* quan, donat el que manifesten els altres, *i* revela la seva autèntica utilitat</u>. El segon cas és aquell on el mecanisme tria b quan i també revela la seva autèntica utilitat, donat el que declaren els altres. El cas 1 s'analitza a continuació. El cas 2 es deixa com a exercici Q9. El cas 1 es pot dividir en quatre subcasos.

• <u>Subcas 1</u>: $u_i(a) > u_i(b)$ i $\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a) > \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b)$. El fet que $u_i(a) > u_i(b)$ significa que i prefereix l'opció a a la b. A més, el cas que s'està considerant (cas 1: $\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a) + u_i(a) > \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b) + u_i(b)$) fa que l'opció escollida sigui, precisament, a. Això fa que <u>*i* no necessiti mentir sobre les seves utilitats per a què *a* sigui escollida</u>: revelant les utilitats reals, l'opció més preferida a ja és seleccionada.

Q6. Al subcas 1, existeixen valors $\hat{u}_i(a)$ i $\hat{u}_i(b)$ que, declarats per i a l'etapa 1, fessin que es triés b a l'etapa 2? Existeixen valors $\hat{u}_i(a)$ i $\hat{u}_i(b)$ que provoquessin que la transferència T_i que i hagués de pagar fos positiva? Quin valor pren T_i quan, al subcas 1, i declara els valors reals $u_i(a)$ i $u_i(b)$?

• <u>Subcas 2</u>: $u_i(a) > u_i(b)$ i $\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a) \leq \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b)$. Si i diu la veritat a l'etapa 1 i revela els valors $u_i(a)$ i $u_i(b)$ es garanteix que a (la opció més preferida per i) sigui l'opció escollida (perquè el cas 1 que s'està analitzat suposa que a l'etapa 2 se selecciona a quan i diu la veritat). Ara, però, si i no participés al mecanisme, b seria l'opció seleccionada, ja que $\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a) \leq \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b)$. Com a resultat, i ha de pagar, en aquest subcas, $T_i = \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b) - \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a)$. Atès que <u>$T_i$ no depèn del que *i* digui a l'etapa 1</u>, no hi ha manera de reduir aquest pagament si no és alterant l'opció que selecciona el mecanisme a l'etapa 2. Per tant, per a determinar si a i li convé revela informació certa a l'etapa 1, cal comparar la utilitat neta d'i quan el mecanisme tria a amb la utilitat neta d'i quan el mecanisme tria b. Quan es tria a, la utilitat neta d'i és $u_i(a) - T_i$. Quan es tria b, la utilitat neta d'i és $u_i(b)$ i, en aquest cas, i s'estalvia pagaments addicionals.

Q7. Per què $T_i = 0$ si i declara valors $\hat{u}_i(a)$ i $\hat{u}_i(b)$ que facin que el mecanisme triï b al subcas 2?

Així que, per a determinar si a i li convé mentir a la primera etapa, només cal comparar el resultat $u_i(a) - T_i$ de dir la veritat amb l'únic resultat alternatiu $u_i(b)$ que es pot aconseguir mentint. Per la hipòtesi del cas 1, $\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a) + u_i(a) > \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b) + u_i(b)$. D'aquí, $\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a) - \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b) + u_i(a) > u_i(b)$. De manera equivalent, $u_i(a) - [\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b) - \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a)] > u_i(b)$. Per definició, $T_i = \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b) - \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a)$. En conseqüència, $u_i(a) - T_i > u_i(b)$. Conclusió: i no guanya res no revelant els valors reals d'utilitat de les opcions a i b al subcas 2.

• <u>Subcas 3</u>: $u_i(a) < u_i(b)$. Quan $u_i(a) < u_i(b)$, i prefereix b a a. Al cas 1 que s'està tractant, a és l'opció escollida si i declara els valors reals $u_i(a)$ i $u_i(b)$. Es tracta d'esbrinar si a i li surt a compte mentir i forçar el canvi d'a a b. Si i revela els valors reals $u_i(a)$ i $u_i(b)$, a és l'opció triada. Això vol dir que $\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a) + u_i(a) > \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b) + u_i(b)$. Si $\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a) \leq \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b)$, aleshores $u_i(a) < u_i(b)$ implicaria $\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a) + u_i(a) < \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b) + u_i(b)$, contradient la condició que defineix el cas 1 que s'està analitzant. Per tant, $\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a) > \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b)$. Se segueix de $\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a) > \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b)$ que el mecanisme seleccionaria a si i no participés. Com a conseqüència, si i declarés valors $\hat{u}_i(a)$ i $\hat{u}_i(b)$, on almenys un dels dos no és el valor real, de forma que b fos l'opció seleccionada, i hauria de pagar una transferència positiva $T_i = \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a) - \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b)$, perquè la seva declaració provocaria el canvi d'a a b. Ara comparem les dues alternatives d'i: dir la veritat revelant els autèntics valors $u_i(a)$ i $u_i(b)$ o mentir declarant valors $\hat{u}_i(a)$ i $\hat{u}_i(b)$ que provoquessin l'elecció de b.

Q8. Per què no cal considerar l'opció on i declara valors falsos $\hat{u}_i(a)$ i $\hat{u}_i(b)$ que no alteren el fet que el mecanisme selecciona a? Quin incentiu tindria i a declarar tals valors?

Si i declara el valors reals d'utilitat $u_i(a)$ i $u_i(b)$, a se selecciona i la seva utilitat neta és $u_i(a)$, perquè $T_i = 0$. De fet, com ja s'ha demostrat, $\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a) > \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b)$. Això fa que a també se seleccionés si i no participés. En no provocar la declaració d'i un canvi en l'elecció d'opció, $T_i = 0$. D'altra banda, si i declara valors $\hat{u}_i(a)$ i $\hat{u}_i(b)$ que provoquen l'elecció de b, la utilitat neta d'i és $u_i(b) - T_i = u_i(b) - [\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a) - \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b)]$. Atès que (per tractar-se del cas 1) $\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a) + u_i(a) > \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b) + u_i(b)$, se segueix que $u_i(a) > [\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b) - \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a)] + u_i(b) = u_i(b) - [\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a) - \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b)] = u_i(b) - T_i$. En resum, i no augmenta la seva utilitat neta mentit i forçant el canvi d'a a b.

• <u>Subcas 4</u>: $u_i(a) = u_i(b)$. Ara i és indiferent entre a i b. Si revela els valors reals, $u_i(a)$ i $u_i(b)$, el mecanisme selecciona a, pel fet que s'està analitzant el cas 1. Justament pel cas 1, $\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a) + u_i(a) > \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b) + u_i(b)$. Si $u_i(a) = u_i(b)$, aleshores $\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a) > \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b)$. Això implica que, si i no participés, a també seria l'opció seleccionada. Per tant, $T_i = 0$. En resum, dient la veritat a l'etapa 1, la utilitat neta d'i és $u_i(a)$. Si i és plantegés declarar $\hat{u}_i(a)$ i $\hat{u}_i(b)$ que provoquessin l'elecció de b, $T_i = \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a) - \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b) > 0$. En tal cas, la utilitat neta seria $u_i(b) - T_i(a) < u_i(b) = u_i(a)$. Així doncs, i no augmenta la seva utilitat neta mentit i forçant el canvi d'a a b.

Q9. Analitza el cas 2: demostra que, quan $\sum_{j\neq i} \hat{u}_j(a) + u_i(a) \leq \sum_{j\neq i} \hat{u}_j(b) + u_i(b)$, i tampoc no té incentiu a revelar, a l'etapa 1, valors d'utilitat diferents dels autèntics valors.

Un exemple

Tres individus (1, 2 i 3) han de decidir entre a i b. La Fig. 1 mostra els valors $u_i(a)$ i $u_i(b)$ i el pagament T_i que, segons el mecanisme, cada individu i ha d'assumir.

i	1	2	3
$u_i(a)$	2	4	6
$u_i(b)$	9	1	3
T_i	6	0	0

Fig. 1

i	1	2	3
$u_i(a)$	2	6	6
$u_i(b)$	9	1	3
T_i	–	–	–

Fig. 2

La utilitat total d'a és $u_1(a) + u_2(a) + u_3(a) = 2 + 4 + 6 = 12$. La utilitat total de b és $u_1(b) + u_2(b) + u_3(b) = 9 + 1 + 3 = 13$. Aplicant la regla de triar l'opció amb més utilitat total, l'opció escollida seria b. Aquesta regla és manipulable. Per exemple, si 2 canviés $u_2(a) = 4$ per $\hat{u}_2(a) = 6$ (tal i com es reflecteix a la Fig. 2), l'opció seleccionada seria a. El canvi d'elecció beneficiaria a 2: abans, amb la selecció de b, la seva utilitat era $u_2(b) = 1$; ara, amb la selecció d'a, la seva utilitat seria $u_2(a) = 4$. Així, 2 té incentiu a mentir si la regla de decisió es basa en comparar utilitats totals revelades.

El mecanisme de Groves-Clarke, aplicat a les utilitats de la Fig. 1, faria que l'opció escollida fos *b* amb l'afegit que 1 hauria de pagar $T_1 = 6$. Aquest seria el resultat si tothom, a l'etapa 1, declarés les seves valoracions reals. Comprovem que ningú no té incentiu a revelar una valoració diferent de la real quan els altres també revelen les valoracions reals.

• <u>Individu 1</u>. La utilitat neta d'1 quan revela honestament és $u_1(b) - T_1 = 9 - 6 = 3$. No hi ha manera d'1 de reduir el pagament de $T_1 = 6$ quan *b* és l'opció triada, perquè T_1 depèn de les utilitats revelades pels altres individus (T_1 és la utilitat total que perden els altres individus quan 1 participa al mecanisme: $u_2(a) + u_3(a) - u_2(b) - u_2(b) = 4 + 6 - 1 - 3 = 6$). L'única alternativa que 1 pot plantejar-se és declarar valors $\hat{u}_1(a)$ i $\hat{u}_1(b)$ que alterin l'opció escollida pel mecanisme. Si 1 força el canvi d'opció (de *b* a *a*), T_1 seria 0 i la utilitat neta d'1 seria $u_1(a) = 2$. Per tant, 1 aconsegueix més utilitat neta quan (declarant els altres la veritat sobre les seves valoracions) ell mateix declara honestament que quan falseja la seva declaració forçant un canvi en l'opció escollida.

• <u>Individu 2</u>. La utilitat neta de 2 quan revela honestament és $u_2(b) = 1$. Atès que, sense 2, *b* encara seria l'opció escollida, $T_2 = 0$. L'incentiu a què 2 reveli informació falsa sobre les seves valoracions només pot provenir de la possibilitat que, forçant un canvi en l'opció que tria el mecanisme, la utilitat neta de 2 augmentés. Si 2 força el canvi de *b* a *a*, $T_2 = (9 + 3) - (2 + 6) = 4$, que és la pèrdua d'utilitat total que provocaria el canvi de *b* a *a* forçat per 2. Així, la utilitat neta de 2 quan menteix (i provoca que *a* s'esculli en comptes de *b*) seria $u_2(a) - T_2 = 4 - 4 = 0$. Conclusió: 2 no millora la seva utilitat neta i, en conseqüència, no té incentiu a mentir quan els altres no ho fan.

• <u>Individu 3</u>. L'anàlisi dels incentius de 3 és anàloga a l'anàlisi dels incentius de 2.

Q10. Demostra que, a l'exemple de la Fig. 1, 3 no té incentiu a revelar una valoració diferent de la real quan 1 i 2 revelen informació autèntica sobre les seves preferències.

Q11. Demostra que, a l'exemple de la Fig. 1, ningú no té incentiu a revelar una valoració diferent de la real revelin el que revelin els altres.

Q12. Determina els pagaments addicionals T_i que genera el mecanisme de Clarke-Groves al cas de la Fig. 2. Justifica que ningú no té incentiu a no revelar les valoracions autèntiques.

Què es fa amb els pagaments addicionals T_i del mecanisme?
En general, el mecanisme de Groves-Clarke genera uns pagaments addicionals $\sum_i T_i$. Què es fa amb aquest superàvit?

Q13. És possible, al mecanisme de Groves-Clarke, que el pagament addicional T_i que hagi de fer algun individu *i* sigui negatiu? I que la suma total $\sum_i T_i$ recol·lectada pel mecanisme sigui negativa (existència de dèficit)?

Q14. Troba un exemple amb 3 individus i 2 opcions (com el de la Fig. 1) on el mecanisme de Groves-Clarke faci que, per a tot *i*, $T_i = 0$.

Es podria pensar que no hi hauria cap problema en distribuir el superàvit $\sum_i T_i$ entre els individus. Malauradament, la distribució de l'excedent $\sum_i T_i$ alteraria els incentius a dir la veritat. Aquest problema es pot il·lustrar amb l'exemple de la Fig. 1. Suposem que tothom sap que l'excedent $\sum_i T_i$ es reparteix igualitàriament entre els individus. Aleshores 2 augmentaria la seva utilitat neta declarant $\hat{u}_2(b) = 1/2$ en comptes d'$u_2(b) = 1$. Declarant $u_2(b) = 1$, la utilitat neta de 2 seria $u_2(b) + T_1/3 = 1 + 4/3 = 1 + 8/6$. Declarant $\hat{u}_2(b) = 1/2$, b és encara l'opció escollida però ara es tindria $T_1' = 13/2$, de forma que la nova utilitat neta de 2 seria superior: $u_2(b) + T_1'/3 = 1 + 13/6$.

Més inconvenients del mecanisme de Groves-Clarke

La impossibilitat general de repartir l'excedent entre els individus provoca que el resultat del mecanisme de Groves-Clarke no sigui Paretoeficient. Això condueix al següent dilema. Per a què el mecanisme no sigui manipulable (i, per tant, ningú no tingui incentiu a mentir), els excedents en general no es podran distribuir; però si aquests excedents no es distribueixen, el resultat del mecanisme no serà Paretoeficient perquè, donada l'elecció feta pel mecanisme, tothom estaria més bé amb una part de l'excedent que genera el mecanisme.

A més, el mecanisme de Groves-Clarke no necessàriament satisfà l'anomenada restricció de participació. Segons aquesta restricció, participar en el mecanisme no pot produir un resultat pitjor per a algun individu que no participar. Per exemple, al cas de la Fig. 1, suposem que, sense el mecanisme, la decisió presa seria a. La utilitat de l'individu 2 seria $u_2(a) = 4$. Si el mecanisme s'aplica, la decisió presa seria b i la utilitat neta de 2 seria $u_2(b) - T_2 = 1 - 0 = 1$. Conclusió: 2 estaria millor si el mecanisme no s'apliqués.

A més a més, el mecanisme de Groves-Clarke no és immune a manipulació per part de coalicions. Per exemple, a la situació representada per la Fig. 1, suposem que els individus 2 i 3 declaren $\hat{u}_2(a) = 7$ en comptes d'$u_2(a) = 4$ i $\hat{u}_3(a) = 9$ en comptes d'$u_3(a) = 6$ (la resta de valors declarats són els reals). En aquest cas, a és l'opció seleccionada, amb $T_1 = 0$ i $T_2 = T_3 = 1$. Dient la veritat, b és l'opció seleccionada, la utilitat neta de 2 és $u_2(b) = 1$ i la utilitat neta de 3 és $u_3(b) = 3$. Declarant els valors falsos $\hat{u}_2(a) = 7$ i $\hat{u}_3(a) = 9$, la utilitat neta de 2 és $u_2(a) - T_2 = 4 - 1 = 3$ i la utilitat neta de 3 és $u_3(a) - T_3 = 6 - 1 = 5$. Així doncs, 2 i 3 augmenten la seva utilitat neta revelant, conjuntament, utilitats falses.

Q15. Verifica que si, al cas de la Fig. 1, tothom revela els autèntics valors tret de $\hat{u}_2(a) = 7$ i $\hat{u}_3(a) = 9$, a és l'opció seleccionada pel mecanisme de Groves-Clarke i $T_1 = 0$ i $T_2 = T_3 = 1$.

Un teorema d'impossibilitat de Hurwicz (1972)

Els inconvenients previs del mecanisme de Groves-Clarke se segueixen d'un teorema d'impossibilitat de Leonid Hurwicz[1] (1972), que demostrà el següent: a una economia d'intercanvi estàndar, no hi ha cap mecanisme que sigui compatible amb els incentius (no manipulable), que satisfaci la restricció de participació i que generi resultats Paretoeficients. Una interpretació d'aquest teorema és que la informació privada exclou la plena eficiència.

[1] Leonid Hurwicz (1917–2008) va ser un dels tres premis Nobel d'Economia del 2007. Amb 90 anys, és la persona amb més edat que ha rebut un premi Nobel (http://en.wikipedia.org/wiki/Hurwicz). Hurwicz va ser el creador de la teoria del disseny de mecanismes.

Q16. Un professor de Microeconomia Superior s'ofereix a tres estudiants per a fer classes particulars de resolució de dubtes. El professor presenta tres possibilitats: fer una classe, fer-ne dues o fer-ne tres. El professor posa preu a les classes: 90 € per cada classe. Els estudiants acorden repartir-se el cost de les classes a parts iguals i acorden també que tots assistiran al mateix nombre de classes. La Fig. 3 mostra la valoració en euros que fan els estudiants de les classes abans de pagar al professor el preu de les classes.

estudiant	1	2	3
opció *a:* 1 classe	35	40	50
opció *b:* 2 classes	60	90	70
opció *c:* 3 classes	40	140	90

Fig. 3

(i) Determina la utilitat (neta) de cada opció per a cada estudiant un cop s'ha inclòs el repartiment del cost de les classes. (ii) Si la regla de decisió que segueixen els estudiants és triar l'opció que maximitza la suma de la utilitat neta, quina opció triarien? (iii) Mostra que l'opció anterior és la seleccionada pel mecanisme de Groves-Clarke i indica quins són els pagaments addicionals que haurien de fer els estudiants. (iv) Donats els pagaments addicionals calculats, hi ha algun estudiant que preferiria no assistir a cap classe? (v) Hi ha algun grup de dos estudiants que puguin manipular el resultat del mecanisme en el seu favor? (vi) Qui consideres que tindria sentit que rebés els pagaments addicionals? (vii) Suposem que els estudiants decideixen repartir-se la suma de pagaments addicionals a parts iguals. Té algun dels estudiants incentius a manipular el mecanisme de Groves-Clarke?

[Un exemple similar es troba a http://web.uvic.ca/~sukanta/Econ313/gcex.pdf].

Bibliografia

- Campbell, Donald E. (1995): *Incentives: Motivation and the Economics of Information*, Cambridge University Press: Cambridge, pp. 283–290 i 294–297.
- Clarke, Edward H. (1971): "Multipart pricing of public goods", *Public Choice* 11, 17–33.
- Groves, Theodore (1973): "Incentives in teams", *Econometrica* 41, 617–631.
- Hurwicz, Leonid (1972): "On informationally decentralized systems", a McGuire, C. B. i Radner, Roy (eds.): *Decision and Organization: A Volume in Honor of Jacob Marshak*. North-Holland: Amstedam, pp. 297–336.