

Implementación y diseño de mecanismos

Una de niños cuarteados

En el capítulo 3 del Libro de los Reyes del Antiguo Testamento se relata el conocido como "Juicio del Rey Salomón". Dos prostitutas se presentan ante el rey. Una de ellas explica que ambas comparten una casa, en compañía de nadie más, y que ambas han dado recientemente a luz. Continúa explicando que el hijo de la otra mujer ha fallecido y que, mientras dormía, la otra mujer le ha arrebatado a su hijo. Por ello, se presenta ante el rey para pedirle que le devuelva a su hijo. La otra mujer niega los cargos, asegura que el bebé fallecido es de la acusadora y afirma que el bebé que ha sobrevivido es suyo. Entonces el rey ordena que el bebé sea partido por la mitad con una espada y cada parte entregada a una madre. En ese momento, la madre acusada implora al rey que, antes que muerto, prefiera ver a su bebé en manos de la madre acusadora. Ésta, por el contrario, acepta la partición del bebé. La decisión final del rey es entregar el bebé a la madre acusada, aparentemente basándose en la presunción de que la auténtica madre preferiría que su hijo viviera aunque fuera con otra madre.

<http://www.newadvent.org/bible/1ki003.htm>

http://en.wikipedia.org/wiki/King_Solomon

Esta historia permite ilustrar en qué consiste el diseño de mecanismos: en construir un juego la solución del cual conduzca a un resultado previamente seleccionado y pretendido. Este resultado seleccionado es el resultado a implementar (obtener) mediante el juego. En el juicio, el resultado que pretende obtener el rey es entregar el bebé a la auténtica madre. El problema es que el rey no dispone de la información suficiente para tomar esta decisión: es información privada quién sea la madre auténtica.

Un mecanismo (también llamado "forma de juego" o *game form*) consiste en la especificación de estrategias para cada jugador (los mensajes mediante los que éstos pueden transmitir su información privada) junto con una regla que determine qué resultados produce cada posible combinación de estrategias de los jugadores. Un mecanismo no es un juego. Pero los jugadores se suponen dotados de preferencias sobre los resultados, de forma que cuando se combina el mecanismo con esas preferencias lo que se obtiene sí es un juego.

El siguiente paso consiste en escoger qué concepto de solución de un juego se adopta. Tres de los conceptos de referencia son el equilibrio en estrategias dominantes (equilibrio dominante), el equilibrio de Nash y el equilibrio bayesiano. Escogido un concepto de solución, ya puede definirse en qué consiste la implementación del resultado deseado mediante el concepto de solución escogido: el resultado deseado se dice que es implementable mediante el mecanismo diseñado en términos del concepto de solución que se haya adoptado si ese resultado es el único que produce el concepto de solución en el juego obtenido cuando se combina el mecanismo propuesto con las preferencias que tengan los jugadores sobre los resultados.

El diseño de mecanismos va en dirección opuesta al análisis de un juego. Cuando se analiza un juego, se parte de las estrategias de que disponen los jugadores y se trata de investigar qué tipo de resultados pueden razonable o justificadamente obtenerse en el juego. Cuando se diseña un mecanismo ocurre lo contrario: se parte de un resultado y se trata de estructurar un mecanismo asignando estrategias a los jugadores para que sus decisiones produzcan el resultado deseado.

Un mecanismo para el juicio del Rey Salomón

El juicio descrito anteriormente pretende, aparentemente, evidenciar la sabiduría del rey. Sin embargo, el rey consiguió implementar el resultado deseado por fortuna, no por un diseño adecuado del mecanismo: el rey fue, más que sabio, afortunado. La razón de su fortuna es que la madre acusadora (la madre falsa) no jugó una mejor respuesta a la estrategia seguida por la madre acusada (la madre auténtica). ¿Qué habría hecho el rey si la madre acusadora hubiese replicado la estrategia que, a primera vista, escogería una madre auténtica? Esto es, ¿qué habría decidido el rey si la acusadora también hubiese implorado que, antes que arrebatarle la vida, el niño fuese entregado a la otra madre?

La Fig. 1 muestra un juego que sí habría permitido implementar el resultado deseado (que el bebé fuese entregado a su madre) empleando como concepto de solución el equilibrio perfecto en subjuegos. El mecanismo en el que se basa el juego es el siguiente. La naturaleza (jugador 0) determina quién es la madre demandante: con probabilidad $0 < p < 1$, la madre demandante es la madre falsa (jugador 1) y, por tanto, el bebé está inicialmente en manos de la madre verdadera; y con probabilidad $1 - p$, la madre demandante es la madre verdadera (jugador 2) y, por tanto, el bebé está inicialmente en manos de la madre falsa. Una vez que la naturaleza establece quién es la madre demandante, ésta decide si manifestar que ella no es la madre (acción n) o afirmar que sí lo es (acción s). Si la declaración de la madre demandante es “no soy la madre”, el juego acaba. Si la declaración es “soy la madre” entonces la otra madre decide si sostener que es la madre o no.

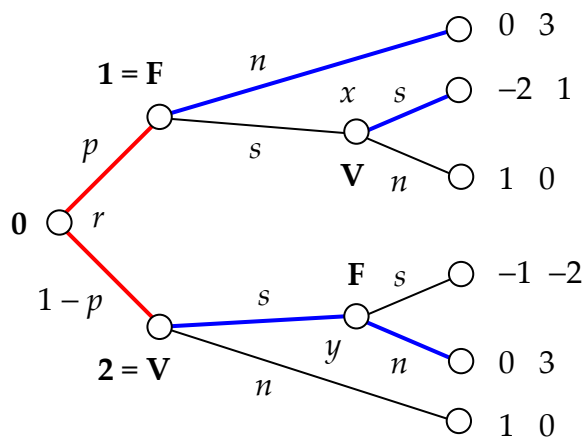


Fig. 1. Un juego de Binmore (2008)

Los resultados del mecanismo son los siguientes. Si el bebé está inicialmente en manos de la madre verdadera (lo que hace que la demandante sea la madre falsa y nos encontremos en la parte alta de la Fig. 1) entonces el bebé queda en manos de la madre verdadera a menos que ésta diga que el bebé no es suyo y la madre demandante diga que sí lo es. Además, si ambas declaran ser las madres, cada una pagará una multa. Por otro lado, si el bebé está inicialmente en manos de la madre falsa (lo que hace que la demandante sea la madre verdadera) entonces el bebé seguirá en manos de la madre falsa a menos que ésta diga que el bebé no es suyo y la madre demandante diga que sí lo es. Como en el caso anterior, si ambas declaran ser las madres, cada una pagará una multa. Cuando se añadan pagos al mecanismo se obtendrá un juego.

En la Fig. 1, los pagos se han establecido suponiendo que el valor de tener el bebé para la madre verdadera (jugador 2) es 3 y que el valor de tenerlo para la madre falsa (jugador 1) es 1. El importe de la multa (que se impone si las dos declaran ser las madres) es de 2 para ambas. Por último, no recibir el bebé ni asumir la multa implica un pago de 0.

Q1. Verifica que los pagos de la Fig. 1 son correctos. En particular, ¿por qué el vector de pagos cuando ambos jugadores declaran ser las madres no es el mismo en la parte superior del juego (vector $(-2, 1)$) que en la parte inferior (vector $(-1, -2)$)?

Resolviendo el juego por inducción hacia atrás, tomemos el nudo de decisión x . La mejor respuesta en este nudo para el jugador 2 (la madre verdadera) es s . Dada la elección de s en x , la mejor respuesta del jugador 1 en el nudo que precede inmediatamente a x es n . Pasando al nudo de decisión y , la mejor respuesta en este nudo para el jugador 1 (la madre falsa) es n . Dada la elección de n en y , la mejor respuesta del jugador 2 en el nudo justo antes de y es s . Por tanto, decida lo que decida la naturaleza, el resultado siempre es el mismo: la madre falsa niega ser la madre y la madre auténtica afirma serlo. Mediante el equilibrio perfecto en subjuegos, el mecanismo que da lugar al juego de la Fig. 1 ha permitido implementar el resultado deseado: que el bebé siempre vaya a parar a manos de la madre verdadera (vector de pagos $(0, 3)$).

Q2. Representa el juego de la Fig. 1 como juego simultáneo (en forma matricial) y comprueba que el único equilibrio de Nash con estrategias puras es aquél en el que la madre falsa siempre escoge n y la madre verdadera siempre escoge s . Por tanto, el mecanismo subyacente a ese juego simultáneo también habría permitido implementar (mediante el concepto de solución del equilibrio de Nash con estrategias puras) el resultado de entregar el bebé a la madre auténtica.

Una de profesores examinados

Como segundo ejemplo del problema de la implementación y del diseño de mecanismos, consideremos la siguiente historia, basada en un ejemplo que Eric Maskin presenta en http://nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/2007/maskin-slides.pdf (discurso de aceptación del Premio Nobel de Economía de 2007). Un profesor puede ser de 4 tipos: x = exigente, y = despreocupado, z = bromista y v = motivador. Los estudiantes del curso que imparte el profesor tienen preferencias sobre el tipo de profesor y, sobre la base de estas preferencias, evalúan al profesor en una encuesta docente. Para simplificar, supongamos que sólo hay dos estudiantes: él y ella (también podría asumirse que, para algún $k > 1$, hay $2k$ estudiantes que las preferencias de él y $2k$ estudiantes con las preferencias de ella).

Tanto él como ella pueden ser de dos tipos: del tipo interesado t_i por la asignatura o del tipo no interesado t_n . De las cuatro combinaciones posibles de estos dos tipos, supongamos que sólo dos son posibles (o tienen probabilidad positiva): $w = (t_i, t_i)$ y $w' = (t_n, t_n)$. Podemos identificar cada combinación posible de tipos con un estado del mundo: en el estado w , ambos estudiantes están interesados en la asignatura; en el estado w' , ninguno está interesado. Las preferencias de los estudiantes en cada estado son las siguientes.

Estado w	Orden de preferencia de él: $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow v$	De ella: $v \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$
Estado w'	Orden de preferencia de él: $v \rightarrow x \rightarrow z \rightarrow y$	De ella: $y \rightarrow x \rightarrow z \rightarrow v$

En la encuesta docente, los estudiantes han de puntuar al profesor, de 1 a 4, sabiendo el tipo del profesor. Cada estudiante da 4 puntos al profesor si su tipo es el más preferido; 3 si su tipo es el segundo más preferido; 2 si es el tercero; y 1 si es el menos preferido (por tanto, si el tipo del profesor ocupa la posición k en el orden de preferencias del estudiante, éste le da $5 - k$ puntos).

La puntuación del profesor en cada estado es la suma de los puntos que recibe de él y de ella en ese estado. El objetivo (el resultado deseado) del profesor es escoger el tipo que, en cada estado, le dé la puntuación más alta posible. El profesor sabe cuáles son las preferencias de él y de ella en cada estado, pero ignora en qué estado está (el tipo de estudiante es información privada). Dado que el profesor sabe qué preferencias tendrían los estudiantes en cada estado, sabe que en el estado w el tipo de profesor que recibe máxima puntuación es y . En w , el tipo y obtendría 6 puntos; x i v obtendrían 5 cada uno; y z obtendría 4. En w' , el tipo mejor puntuado sería x .

Por tanto, el profesor desea ser de tipo y (despreocupado) cuando el estado del mundo es w (la asignatura interesa a los estudiantes) y ser de tipo x (exigente) cuando el estado del mundo es w' (la asignatura no interesa a los estudiantes). Su deseo es, pues, implementar y en w i x en w' . El problema del profesor consiste en diseñar un mecanismo mediante el cual las decisiones de los estudiantes generen el resultado pretendido por el profesor: obtener máxima puntuación.

Un mecanismo se llama directo cuando, en el juego que induce el mecanismo, las estrategias de cada jugador consisten en revelar su tipo. En un mecanismo directo, el profesor preguntaría a un estudiante si le interesa la asignatura o no. Si la revelación del estudiante escogido es sincera, cuando el estado del mundo es w , el profesor lo sabrá y escogerá ser del tipo y ; y cuando el estado es w' , el profesor también lo sabrá y escogerá ser del tipo x . Y problema resuelto.

Por desgracia para el profesor, este mecanismo no incentiva a decir la verdad (técnicamente, no es compatible con los incentivos) cuando los estudiantes saben cuál es el propósito del profesor (ser y en w y ser x en w'). Para comprobar que ambos estudiantes tendrían incentivo a mentir, supongamos que el profesor decide preguntarle a él.

Si el estado es w , él sabe que afirmando "Me interesa la asignatura" el profesor asumirá que el estado es w y sabe que el profesor escogerá ser y . En cambio, él sabe que diciendo "No me interesa la asignatura", el profesor, asumiendo que el estado es w' , escogerá ser x . Dado que, en el estado w , él prefiere que el profesor sea del tipo x a que sea del tipo y , él tiene incentivo a mentir en el estado w diciendo que están en el w' .

Si el estado es w' , por el mismo razonamiento que en el caso anterior, él sabe que revelando la verdad (diciendo "No me interesa"), el profesor será del tipo x y que mintiendo (diciendo "Me interesa"), el profesor será del tipo y . Puesto que, en el estado w' , él prefiere que el profesor sea del tipo x a que sea del tipo y , él no tiene, en el estado w' , incentivo a mentir. Por tanto, en w' dirá que están en w' .

Pero entonces el profesor se enfrenta con una dificultad: sea cual sea el estado del mundo, a él le conviene siempre decir que el estado del mundo es w' . Conclusión: lo que diga él no es fiable. En ese caso, el profesor puede dirigirse a ella y preguntarle qué le parece la asignatura.

Q3. Verifica que, en ambos estados, a ella le conviene decir que el estado es w .

En vista de lo anterior, la opinión que exprese ella tampoco es fiable para el profesor. La conclusión final es que el mecanismo directo consistente en preguntar a los estudiantes no permite implementar (cuando los estudiantes escogen mejores respuestas) el resultado deseado por el profesor. La Fig. 2 muestra un mecanismo que sí que lo conseguiría cuando el concepto de solución escogido es el de equilibrio de Nash.

		<i>ella</i>	
		c	d
<i>él</i>	a	y	z
	b	v	x

En este mecanismo, el profesor le dice a él que escoga entre a o b i, a ella, que escoga entre c i d . Lo que representen a, b, c i d es irrelevante: a y c pueden consistir en levantar la mano derecha y b y d en levantar la izquierda; o en escribir las letras a, b, c y d en un papel... lo que sea. Por tanto, $\{a, b\}$ es el conjunto de mensajes de él y $\{c, d\}$ el de ella.

Fig. 2. Un mecanismo

Aparte de indicar el conjunto de mensajes (o estrategias) de cada jugador, el mecanismo debe establecer qué resultado produce cada combinación de mensajes. El conjunto de combinaciones de mensajes viene dado por el producto cartesiano $\{a, b\} \times \{c, d\}$. Los elementos de este conjunto son $(a, c), (a, d), (b, c)$ y (b, d) . Cada uno de estos elementos puede asociarse con una casilla de la matriz de la Fig. 2. La función de resultados r completa la descripción del mecanismo asociando un resultado con cada elemento de $\{a, b\} \times \{c, d\}$. En este ejemplo, el conjunto de resultados es el conjunto $\{x, y, z, v\}$ de tipos del profesor. El mecanismo de la Fig. 2 es tal que $r(a, c) = y, r(a, d) = z, r(b, c) = v$ i $r(b, d) = x$. Por ejemplo, $r(a, c) = y$ significa que si él escoge a y ella escoge c entonces el profesor decide ser del tipo y .

El mecanismo de la Fig. 2 puede interpretarse del modo siguiente. Por un lado, el profesor le da a él el poder de determinar si el profesor escoge ser un tipo del conjunto $\{y, z\}$ o si escoge ser un tipo del conjunto $\{v, x\}$: escogiendo a , él fuerza al profesor a ser y o z ; escogiendo b , él hace que el profesor se limite a ser v o x . Por otro lado, el profesor le da a ella el poder de determinar si el profesor escoge ser un tipo del conjunto $\{y, v\}$ (lo que ella consigue seleccionando c) o si escoge ser un tipo del conjunto $\{z, x\}$ (lo que ella consigue seleccionando d).

El mecanismo de la Fig. 2 se transforma en un juego cuando añadimos las preferencias que tienen los estudiantes sobre los resultados. Para visualizar con más claridad el juego resultante, tomemos las siguientes representaciones numéricas de las preferencias de los estudiantes: la utilidad del resultado más preferido es 3, la del segundo más preferido 2, la del tercero 1 y la del menos preferido, 0 (la función de utilidad sería $u(\alpha) = 4 - k$ si el resultado α ocupa la posición k en el orden de preferencia representado). Por ejemplo, la función de utilidad de él en el estado w sería $u(x) = 3, u(y) = 2, u(z) = 1$ y $u(v) = 0$.

La Fig. 3 muestra el juego que juegan los estudiantes en cada estado, en donde el primer número en los vectores de pagos representa la utilidad (o pago) de él y el segundo representa el de ella.

		<i>ella</i>	
		<i>c</i>	<i>d</i>
<i>él</i>	<i>a</i>	2 2	1 1
	<i>b</i>	0 3	3 0
		<i>estado w</i>	

		<i>ella</i>	
		<i>c</i>	<i>d</i>
<i>él</i>	<i>a</i>	0 3	1 1
	<i>b</i>	3 0	2 2
		<i>estado w'</i>	

Fig. 3

El juego de la Fig. 3 es un juego bayesiano trivial porque cada estudiante sabe cuál es el tipo del otro estudiante. Ello permite resolver todo el juego resolviendo cada matriz por separado. Si el estado es w , ambos estudiantes lo saben y saben que el mecanismo del profesor induce el juego de la matriz izquierda en la Fig. 3. El único equilibrio de Nash de este juego (con estrategias pura o mixtas) es $[a, c]$, puesto que c es una estrategia fuertemente dominante para ella y, dada c , la mejor respuesta de él es a .

Si el estado es w' , ambos estudiantes lo saben y saben que el mecanismo del profesor induce el juego de la matriz derecha en la Fig. 3. El único equilibrio de Nash de este juego (con estrategias pura o mixtas) es $[b, d]$, puesto que b es una estrategia fuertemente dominante para él y, dada b , la mejor respuesta de ella es d .

Como consecuencia, si el estado es w , los estudiantes juegan $[a, c]$, que produce el resultado y deseado por el profesor cuando el estado es w . Y si el estado es w' , los estudiantes juegan $[b, d]$, que produce el resultado x deseado por el profesor cuando el estado es w' . Conclusión: el mecanismo de la Fig. 2 permite implementar (mediante equilibrios de Nash) el resultado deseado por el profesor: ser y en w y ser x en w' .

Q4. Una de taxistas (Campbell (1995, pp. 12–13)). Un taxista cubre una ruta entre los puntos A y B de una ciudad. El trayecto puede hacerse siguiendo una ruta larga (10 km) o una ruta corta (5 km). El pago por kilómetro recorrido es $c = 1$ €. Por la ruta larga, el número máximo de clientes que el taxista puede atender es de 30; por la ruta corta, 55. Supongamos que un turista desconoce que el taxista puede optar por dos rutas. ¿Qué puede hacerle pensar que el taxista seguirá la ruta corta, que es la que más interesa al turista? Una respuesta es la existencia de una tarifa no lineal. El propósito de este ejercicio es mostrar cómo se consigue. Supongamos que el taxista aplica una tarifa del tipo $F + cD$, en donde F es un pago fijo que se realiza con independencia de la longitud del trayecto (la “bajada de bandera”), c es el pago por kilómetro recorrido y D es la distancia del trayecto. (i) Calcula los ingresos diarios del taxista si $F = 0$ siguiendo la ruta larga y compáralos con la ruta corta. (ii) Efectúa los mismos cálculos sin $F = 2$. (iii) Compara los resultados en los casos (i) y (ii). ¿Cuál es la opción Paretoeficiente? ¿Por qué? (iv) Si el taxista trabajara para una empresa y ésta intentara obtener una reputación de ofrecer un servicio rápido, ¿qué opción sería mejor para la empresa: $F = 0$ o $F = 2$? (v) Si el taxista trabajara por cuenta propia, ¿en qué caso podría obtener un ingreso diario superior, con $F = 0$ o con $F = 2$?

Funciones de elección social

Sea $N = \{1, \dots, n\}$ un conjunto de n individuos, sea A un conjunto de alternativas (o resultados) y , para cada individuo $i \in N$, sea L_i el conjunto de preferencias que se asume que i puede tener sobre los elementos del conjunto A . Las preferencias se asume que son ordenaciones lineales: todos los elementos de A pueden listarse en un ránking en el que ninguna alternativa es indiferente a otra. Sea $L = L_1 \times L_2 \times \dots \times L_n$ el conjunto de perfiles de preferencias, esto es, el conjunto de todas las maneras de asignar una preferencia a cada individuo.

Una función de elección social (FES) es una función $f : L \rightarrow A$ que asigna, a cada perfil de preferencias, una alternativa. Una FES representa un método de toma de decisiones colectivas: si los individuos tienen las preferencias del perfil (P_1, P_2, \dots, P_n) entonces $f(P_1, P_2, \dots, P_n) \in A$ es la alternativa escogida.

La regla de Borda (conocida así en honor a Jean-Charles de Borda, que la propuso en el último cuarto del siglo XVIII) permite definir una FES. Con A teniendo m elementos, la puntuación de la alternativa $a \in A$ en la preferencia P_i se define como m si a ocupa la primera posición en el ránking P_i , $m - 1$ si ocupa la segunda posición, $m - 2$ si ocupa la tercera... y 1 si ocupa la última posición. Por tanto, la puntuación de a en P_i es $m + 1$ menos la posición que a ocupa en P_i . La puntuación de a en el perfil de preferencias (P_1, \dots, P_n) es la suma de la puntuación que a recibe en cada preferencia. Sea (a_1, \dots, a_m) una ordenación lineal arbitraria de los m miembros del conjunto A de alternativas. La regla f que asigna a cada perfil de preferencias la alternativa con máxima puntuación que aparece antes en el orden (a_1, \dots, a_m) es una FES. Con $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y $A = \{a, b, c\}$ sea el siguiente perfil de preferencias (en donde se tiene, por ejemplo, $a P_1 b P_1 c$: 1 prefiere a a b i b a c).

		P_1	P_2	P_3	P_4
3 puntos	→	a	b	c	c
2 puntos	→	b	c	b	b
1 punto	→	c	a	a	a

La puntuación de a es $3 + 1 + 1 + 1 = 6$; la de b es $2 + 3 + 2 + 2 = 9$; y la de c es $1 + 2 + 3 + 3 = 9$. Tomando el ránking (a, c, b) , la regla f sería tal que $f(P_1, P_2, P_3, P_4) = c$.

El problema de la implementación

El problema de implementar una función de elección social consiste en diseñar un mecanismo cuyos resultados, para cada perfil de preferencias, coincidan con el resultado escogido por la FES para ese perfil de preferencias.

La interpretación es que la FES representa una toma de decisiones centralizada: todos los individuos revelan su información privada (sus preferencias sobre A) ante un coordinador y el coordinador aplica la FES para escoger un elemento de A . Sin embargo, la actuación del coordinador sólo puede llevarse a cabo mediante la colaboración de los individuos, puesto que el coordinador ignora las preferencias que los individuos tienen. Implementar la FES consiste en dar a los individuos la capacidad de informar al coordinador de forma que la información que los individuos revelan permita al coordinador tomar la decisión que resultaría de aplicar la FES en el caso en que se conocieran las preferencias de los individuos.

Mecanismo

Un mecanismo (o forma de juego) consiste en cuatro elementos. Primero, un conjunto N de individuos. Segundo, un conjunto A de alternativas (o resultados). Tercero, para cada individuo $i \in N$, un conjunto M_i de estrategias (o mensajes). Y cuarto, con $M = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$, una función de resultados $r : M \rightarrow A$ que especifica cuál es el resultado asociado con cada combinación de mensajes que escogen los individuos. Para abreviar, un mecanismo se identifica en ocasiones con el par (M, r) , entendiéndose que el conjunto N de individuos está implícito en la descripción de M y que el conjunto A de alternativas está implícito en la descripción de r .

Juego asociado con un mecanismo

Supongamos que los individuos del mecanismo tienen preferencias sobre el conjunto de resultados A del mecanismo y que, para cada individuo i , u_i es una función (de utilidad) sobre A que representa numéricamente sus preferencias: para todo a y b en A , $u_i(a) > u_i(b)$ si, y sólo si, i prefiere a a b . En ese caso, el mecanismo induce un juego simultáneo en el que: (i) el conjunto de jugadores es el mismo que el conjunto N de individuos del mecanismo; (ii) el conjunto de estrategias de cada jugador es su conjunto de mensajes en el mecanismo; y (iii) para cada jugador i , el pago $u_i(r(m))$ asociado con una combinación $m \in M = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ de mensajes es la utilidad que la función de utilidad u_i atribuye a la alternativa $r(m)$, que es el resultado que se obtiene, según el mecanismo, cuando cada jugador $j \in N$ escoge el mensaje m_j .

Ejemplo: una compraventa simple

Para ilustrar estos conceptos, consideremos el ejemplo de Myerson (2007): la compraventa de un objeto cuando hay tanto un único vendedor (jugador v) como un único comprador potencial (jugador c). Cada jugador es el único en conocer el valor que para él tiene el objeto. Por un lado, v puede ser de dos tipos, según el valor del objeto para v sea 80 (tipo t^a_v) o 0 (tipo t^b_v), y c asigna probabilidad $\frac{1}{2}$ a cada tipo. Por el otro, c puede ser de dos tipos, según el valor del objeto para c sea 100 (tipo t^a_c) o 20 (tipo t^b_c), y v asigna probabilidad $\frac{1}{2}$ a cada tipo.

Los resultados de la interacción entre c y v pueden describirse mediante los valores 0 y $(1, p)$, en donde 0 representa la ausencia de intercambio y $(1, p)$ representa el intercambio a precio p . Con los valores de utilidad del objeto, cada jugador puede definir, para cada tipo, una preferencia sobre el conjunto de resultados. Por ejemplo, el tipo t^a_v prefiere 0 a $(1, p)$ tal que $p < 80$ y prefiere $(1, p)$ a $(1, p')$ si, y sólo si, $p > p'$. Por el contrario, el tipo t^b_c prefiere 0 a $(1, p)$ tal que $p > 20$ y, para $p < 20$ y $p' < 20$, prefiere $(1, p)$ a $(1, p')$ si, y sólo si, $p < p'$.

Con estas preferencias, una FES razonable debería escoger el resultado 0 si el tipo t^a_v (vendedor que pide el precio alto) se enfrenta con el tipo t^b_c (comprador que sólo pagaría el precio bajo) y, en principio, debería dictar el intercambio para el resto de combinaciones entre tipos.

Solución de equilibrio de un juego simultáneo

Un perfil de estrategias (o jugada) de un juego simultáneo es una asignación de una estrategia a cada jugador. Si M_i es el conjunto de estrategias del jugador i en el juego y hay n jugadores, el conjunto de perfiles de estrategias es el producto cartesiano $M = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$. Una solución de equilibrio de un juego simultáneo es un conjunto de perfiles de estrategias del juego que: (i) constituyen un equilibrio de Nash; y (ii) posiblemente satisfacen alguna otra condición.

Por ejemplo, los equilibrios dominantes de Nash son aquellos equilibrios de Nash formados por estrategias débilmente dominantes (y, por tanto, son equilibrios en los que ninguna estrategia es débilmente dominada).

Implementación de una función de elección social

Sea (N, M, A, r) un mecanismo y $P = (P_1, \dots, P_n) \in L$ un perfil de preferencias sobre A . Sea $E_r(P)$ el conjunto de equilibrios de Nash seleccionados por la solución de equilibrio E en el juego asociado con el mecanismo (N, M, A, r) un mecanismo y el perfil de preferencias P .

Sea $f: L \rightarrow A$ una FES. El mecanismo (N, M, A, r) implementa la función de elección social f mediante la solución de equilibrio E si, para todo perfil de preferencias $P \in L$ y para todo $m \in E_r(P)$, $r(m) = f(P)$. Cuando existe un mecanismo (N, M, A, r) que implementa f mediante E se dice que f es implementable mediante la solución E (y el mecanismo (N, M, A, r)).

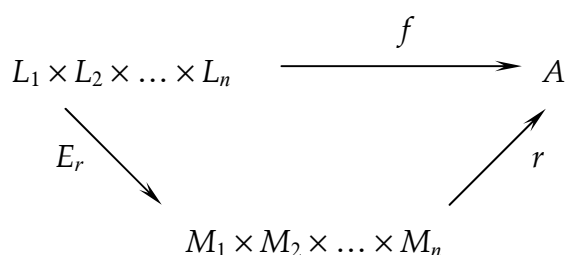


Fig. 4

La Fig. 4 describe en qué consiste la implementación. El punto de partida es la parte superior: la FES f que escoge una alternativa del conjunto A tomando como input las preferencias de los individuos. Implementar esta FES f consiste en seguir el camino inferior: asignar un conjunto de mensajes M_1, M_2, \dots, M_n a cada individuo y definir una función de resultados r (esto es, construir un mecanismo) de manera que, para cada perfil de preferencias $P = (P_1, P_2, \dots, P_n)$, embutir cada perfil de mensajes $m \in M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ seleccionado por la solución de equilibrio E_r (en el juego asociado con el mecanismo y el perfil de preferencias P) en la función de resultados produce la misma elección $r(m)$ que la elección $f(P)$ que genera la función de elección social f cuando las preferencias son P . Por tanto, para todo perfil de preferencias $P \in L_1 \times L_2 \times \dots \times L_n$, $f(P) = r[E_r(P)]$: la vía inferior replica el resultado de la vía superior.

Compraventa simple: continuación

Consideremos el siguiente mecanismo en el ejemplo de la compraventa. El conjunto de mensajes para comprador y para vendedor es el mismo: el conjunto de números enteros no negativos $(0, 1, 2, \dots)$. Sea m_c el mensaje que transmite el comprador y m_v el de el vendedor. La interpretación es que m_c es el valor del objeto para el comprador y m_v es el valor para el vendedor.

La función de resultados r es tal que: $r(m_c, m_v) = 0$ si $m_c < m_v$; y $r(m_c, m_v) = (1, (m_c + m_v)/2)$ si $m_c \geq m_v$. Esta función dicta que no hay intercambio si el valor del objeto para el comprador es inferior al valor para el vendedor, porque, en tal caso, v preferiría no vender. Y dicta que hay intercambio en caso contrario, con el precio del objeto siendo la media entre las valoraciones.

Capturemos las preferencias de los individuos mediante sus tipos y definamos, con esa convención, la siguiente FES f sobre el conjunto de las 4 combinaciones de tipos: $f(t^a_c, t^a_v) = (1, 90)$, $f(t^a_c, t^b_v) = (1, 50)$, $f(t^b_c, t^a_v) = 0$ y $f(t^b_c, t^b_v) = (1, 10)$. ¿Implementa el mecanismo anterior esta FES cuando adoptamos el equilibrio de Nash como solución de un juego? La respuesta es negativa.

Una justificación de la respuesta negativa es que el tipo t^b_v tiene incentivo a hacerse pasar por t^a_v , y declarar $m_v = 80$ en lugar de $m_v = 0$. De hecho, si t^b_v declara su auténtico valor $m_v = 0$, entonces el resultado esperado para v es $(1, 30)$: con probabilidad $\frac{1}{2}$ el comprador es del tipo t^a_c , y declara $m_c = 100$, y con probabilidad $\frac{1}{2}$ el comprador es del tipo t^b_c , y declara $m_c = 20$; por tanto, con probabilidad $\frac{1}{2}$ el mediador recomienda $(1, (0 + 100)/2) = (1, 50)$ y con probabilidad $\frac{1}{2}$ recomienda $(1, (0 + 20)/2) = (1, 10)$. El resultado esperado es $(1, 30)$. En cambio, si t^b_v declara el valor $m_v = 80$ del tipo si t^a_v , el resultado esperado para v es $(1, 45)$.

Q5. Verifica que el resultado esperado para v es $(1, 45)$ cuando $m_v = 80$ y c siempre revela su valoración honestamente. Calcula el resultado esperado para c en ese caso. ¿Tiene c algún incentivo a no revelar honestamente su valoración cuando ésta es alta y asume que v revela honestamente?

Por tanto, no es cierto que el mecanismo reproduzca, en equilibrio, los resultados $f(t^a_c, t^b_v) = (1, 50)$ y $f(t^b_c, t^b_v) = (1, 10)$: cuando v es del tipo t^b_v , declarará $m_v = 80$, de forma que en el juego generado por el mecanismo, se llega al resultado 0 cuando los tipos son (t^a_c, t^b_v) y al resultado $(1, 50)$ cuando los tipos son (t^b_c, t^b_v) . En resumen, el mecanismo anterior no se ha diseñado teniendo adecuadamente presentes los incentivos de los jugadores, si con el mecanismo se pretende que halla intercambio siempre que no se produzca la combinación de tipos (t^b_c, t^a_v) .

Implementación honesta

Un mecanismo es directo si el conjunto $M = M_1 \times \dots \times M_n$ de perfiles de mensajes coincide con el conjunto $L = L_1 \times \dots \times L_n$ de perfiles de preferencias. En un mecanismo directo, los mensajes de los jugadores consisten en indicar una preferencia (no necesariamente la preferencia auténtica).

Sea $f: L \rightarrow A$ una FES. El mecanismo directo (N, L, A, r) implementa honestamente la función de elección social f mediante la solución de equilibrio E si, para todo perfil de preferencias $P \in L$: (H1) $P \in E_r(P)$; y (H2) $r(P) = f(P)$. Cuando existe un mecanismo directo (N, L, A, r) que implementa honestamente f mediante E se dice que f es honestamente implementable mediante la solución E (y el mecanismo directo (N, L, A, r)).

La condición (H1) afirma que revelar la preferencia auténtica por parte de cada jugador es un equilibrio (del tipo requerido) del juego asociado con el mecanismo. La condición (H2) establece que, cuando todos los jugadores revelan sus preferencias auténticas, el resultado del mecanismo coincide con la elección que hace la FES con aquellas preferencias.

La implementación honesta es más débil que la implementación, ya que la honesta requiere el uso de mecanismos directos y permite equilibrios (en el juego asociado con el mecanismo) en los que no se es honesto sobre las preferencias y que generan un resultado distinto al de la FES.

El principio de revelación (para equilibrios de Nash dominantes, Gibbard (1973))

Si una función de elección social f es implementable mediante equilibrios dominantes entonces f es honestamente implementable mediante equilibrios dominantes.

Demostración. Sea f una FES implementable mediante equilibrios dominantes. Esto quiere decir que existe algún mecanismo (N, M, A, r) tal que, para todo perfil de preferencias $P \in L$ y para todo jugador $i \in N = \{1, 2, \dots, n\}$, existe un mensaje $m_i^*(P) \in M_i$ tal que:

- (i) $m_i^*(P)$ es una estrategia (débilmente) dominante para i en el juego asociado con (N, M, A, r) y P ; y
- (ii) $f(P) = r(m_1^*(P), m_2^*(P), \dots, m_n^*(P))$.

Puesto que $m_i^*(P)$ es débilmente dominante, no depende de las preferencias de los demás jugadores. Por ello, podemos escribir $m_i^*(P_i)$ en lugar de $m_i^*(P)$.

Definamos el mecanismo directo (N, L, A, h) tal que, para todo $P \in L$, $h(P) = r(m^*(P))$, en donde $m^*(P) = (m_1^*(P_1), m_2^*(P_2), \dots, m_n^*(P_n))$ es el perfil de estrategias débilmente dominantes que se ha escogido para el juego asociado con (N, M, A, r) y P .

El mecanismo directo (L, h) meramente internaliza las decisiones que los jugadores hacen en el mecanismo original (M, r) . En este mecanismo, un jugador i con preferencia P_i escoge el mensaje $m_i^*(P_i)$ y luego la función de resultados r determina el resultado $r(m_1^*(P_1), \dots, m_n^*(P_n))$, que es justamente el resultado $f(P_1, \dots, P_n)$ escogido por la FES cuando las preferencias son (P_1, \dots, P_n) . En el nuevo mecanismo directo, cuando el jugador elige la preferencia P_i como mensaje (en principio, P_i no tiene por qué ser la preferencia auténtica de i), el mecanismo mismo escoge la estrategia $m_i^*(P_i)$ y determina el resultado $r(m_1^*(P_1), \dots, m_n^*(P_n))$. Por tanto, el mecanismo directo es como un agente que replica la decisión que cada jugador tomaría en el mecanismo original. La única diferencia entre ambos mecanismos es que se ha movido la línea que marca lo que queda dentro o fuera del mecanismo, pero todo el proceso es el mismo y, por tanto, genera el mismo resultado. La demostración consiste, precisamente, en verificar este extremo.

La prueba del principio de revelación se reduce a verificar que el mecanismo directo (L, h) implementa honestamente la FES mediante equilibrios dominantes. Supongamos que no es así. El objetivo es llegar a una contradicción: si la negación de una proposición conduce a una contradicción, la proposición es verdadera. Si (L, h) no implementa f honestamente mediante equilibrios dominantes falla (H1) o falla (H2) (o fallan ambas condiciones).

Supongamos que (H1) no se cumple. Entonces existen $i \in N$, $P \in L$ y $Q_i \in L_i$ tal que transmitir el mensaje Q_i es mejor para i que transmitir P_i cuando las preferencias auténticas de todos los jugadores vienen dadas por P . Esto implica que el resultado $h(Q_i, P_{-i})$ si i revela la preferencia falsa Q_i y los demás revelan sus preferencias auténticas es preferido por i al resultado $h(P_i, P_{-i})$ que se obtiene cuando todos son honestos. Formalmente, $h(Q_i, P_{-i}) \succ_i h(P_i, P_{-i})$.

Por definición de h , $h(Q_i, P_{-i}) \succ_i h(P_i, P_{-i})$ equivale a $r(m_i^*(Q_i), m_{-i}^*(P_{-i})) \succ_i r(m_i^*(P_i), m_{-i}^*(P_{-i}))$. Lo anterior dice lo siguiente: si i prefiere declarar la preferencia falsa Q_i a la preferencia verdadera

P_i en el mecanismo directo entonces i también preferirá declarar, en el mecanismo original, el mensaje $m_i^*(Q_i)$ correspondiente a Q_i al mensaje $m_i^*(P_i)$ correspondiente a P_i . Pero entonces, contrariamente a lo que se había asumido, el mensaje $m_i^*(P_i)$ no es una estrategia dominante cuando la preferencia auténtica es P_i . De esta contradicción se deduce que, para todo perfil de preferencias P y todo jugador i , revelar P_i en el mecanismo directo cuando P es el perfil de preferencias auténticas es una estrategia dominante para i . Con ello se verifica el cumplimiento de la condición (H1) de implementación honesta: declarar las preferencias auténticas constituye un equilibrio dominante.

La prueba concluye verificando el cumplimiento de (H2): para todo $P \in L$, $h(P) = f(P)$. Esta parte es más fácil. Por definición, $h(P) = r(m_1^*(P_1), \dots, m_n^*(P_n))$. Por la hipótesis que (M, r) implementa f , se tiene que $r(m_1^*(P_1), \dots, m_n^*(P_n)) = f(P)$. Y ya está: $h(P) = f(P)$. ■

Lo que significa el principio de revelación

La implementación mediante equilibrios dominantes es, a priori, la opción más atractiva y satisfactoria. La razón es que, en el juego inducido por el mecanismo implementador, cada jugador tiene algún mensaje (débilmente) dominante, de modo que es razonable esperar que cada jugador lo escoja. El atractivo de ese concepto de equilibrio es que el problema estratégico de los jugadores se puede considerar, de hecho, un problema de decisión individual: al jugador i no le importa qué eligen los demás jugadores si él dispone de alguna estrategia que siempre le da el máximo pago hagan lo que hagan los demás. Este hecho hace más robusto el funcionamiento del mecanismo.

El principio de revelación facilita la determinación de qué tipo de FES es implementable o no: si una FES no es honestamente implementable en equilibrios dominantes entonces no es implementable en equilibrios dominantes. Por tanto, no es preciso recurrir a la infinita variedad de mecanismos imaginables que se podrían considerar para averiguar si una FES es implementable: basta con restringir la atención a mecanismos directos (lo cual no hace necesariamente más sencillo al mecanismo). Así que si todos los mecanismos directos fallan para implementar honestamente una FES no hace falta romperse el cráneo imaginando otros mecanismos para ver si funcionan: no lo harán.

Sin embargo, *per se*, el principio de revelación no hace equivalentes la implementación (en equilibrios dominantes) y la implementación honesta (en equilibrios dominantes). Con todo, para el caso que se está considerando en el que las preferencias son estrictas y la regla de elección social es una función (selecciona sólo un resultado) y no una correspondencia, ambos tipos de implementación son equivalentes.

Equivalencia de la implementación y la implementación honesta

Una función de elección social es implementable mediante equilibrios dominantes si, y sólo si, es implementable honestamente mediante equilibrios dominantes.

En resumen, para determinar si una FES es implementable mediante equilibrios dominantes basta con considerar mecanismos directos y verificar que la revelación honesta es dominante.

¿Y qué FES son implementables? El Teorema de Gibbard-Satterthwaite (uno de los teoremas fundamentales en teoría económica) establece que, en esencia, sólo las FES dictatoriales lo son.

Función de elección social dictatorial

Una función de elección social $f: L \rightarrow A$ es dictatorial si existe un individuo $i \in N$ tal que, para todo perfil de preferencias $P \in L$, $f(P)$ es el resultado más preferido por i en la preferencia P_i .

Una FES dictatorial es consistente con la interpretación de que un individuo (siempre el mismo) determina el resultado: la FES siempre escoge la alternativa más preferida por ese individuo (denominado "dictador").

Función de elección social Paretoeficiente

Una función de elección social $f: L \rightarrow A$ es Paretoeficiente si, para todo perfil de preferencias $P \in L$ y todo par de alternativas $a \in A$ y $b \in A \setminus \{a\}$, si se tiene que, para todo $i \in N$, $a P_i b$ entonces $f(P) \neq b$.

Una FES es Paretoeficiente si no escoge una alternativa b que todos los individuos consideran menos preferida que otra alternativa a . De hecho, si todos prefieren a a b y se escogiera b , todos mejorarían pasando a escoger a en lugar de b .

Función de elección social no manipulable

Una función de elección social $f: L \rightarrow A$ es no manipulable (*strategy-proof*) si no existen perfil de preferencias P , individuo i y preferencia Q_i del individuo tal que $f(Q_i, P_{-i}) P_i f(P_i, P_{-i})$.

La no manipulabilidad de una FES expresa la siguiente idea. Supongamos que las preferencias auténticas de los individuos vienen dadas por el perfil de preferencias P . Entonces, para que una FES f sea no manipulable, no puede existir algún individuo i y alguna preferencia falsa Q_i tal que la alternativa $f(Q_i, P_{-i})$ que la FES selecciona cuando i miente es preferida por i (según su auténtica preferencia P_i) a la alternativa $f(P_i, P_{-i})$ que la FES escoge cuando i revela la verdad. La no manipulabilidad significa que ningún individuo tiene nunca incentivo a mentir. Por tanto, la no manipulabilidad hace que la revelación honesta sea una estrategia dominante. De hecho, que una FES sea no manipulable es equivalente a que sea implementable honestamente mediante equilibrios dominantes (basta con considerar el mecanismo directo (N, A, L, f) en el que la función de resultados es la propia FES).

Q6. Verifica que una FES $f: L \rightarrow A$ es no manipulable si, y sólo si, es implementable honestamente mediante equilibrios dominantes y el mecanismo (N, A, L, f) .

Teorema de Gibbard-Satterthwaite

Sea $f: L \rightarrow A$ una FES en donde A tiene al menos tres elementos y en donde L contiene todos los perfiles de preferencias posibles. Entonces f es Paretoeficiente y no manipulable si, y sólo si, f es dictatorial.

El teorema anterior nos dice que no hay mucho que sea implementable mediante equilibrios dominantes cuando se exige Paretoeficiencia, que todas las preferencias sean posibles y tener al menos tres alternativas entre las que elegir: sólo las reglas de elección dictatoriales lo son.

El Teorema de Gibbard-Satterthwaite para el caso de 2 individuos y 3 alternativas

Éste es el caso más sencillo de validez del teorema. Ilustremos la prueba con el siguiente ejemplo. Un profesor da a los estudiantes de su curso la posibilidad de escoger el sistema de evaluación de entre un conjunto de tres alternativas, a , b y c . Los estudiantes se organizan escogiendo un representante (R1) entre los repetidores del curso y escogiendo otro representante (R2) entre los no repetidores, de modo que el sistema propuesto al profesor dependa de las preferencias de estos dos representantes. Sea $\alpha\beta\gamma$ la manera de expresar la preferencia del individuo i tal que $\alpha P_i \beta P_i \gamma$ (α es la alternativa más preferida, β la segunda más preferida y γ la menos). Supongamos que cada representante puede adoptar cualquier orden lineal sobre $A = \{a, b, c\}$ como preferencia. Esto hace que cada representante tenga una de las 6 preferencias abc, acb, bac, bca, cab y cba . La combinación de estas 6 preferencias produce el conjunto L de 36 perfiles de preferencias, en donde la preferencia representada por la primera de las dos columnas en cada casilla es la del representante R1. Este conjunto se representa en la Fig. 5, en donde cada casilla se corresponde con un perfil de preferencias.

R1 R2	f	R1 R2	f	R1 R2	f	R1 R2	f	R1 R2	f	R1 R2	f
$a a$		$a a$		$b a$		$b a$		$c a$		$c a$	
$b b \rightarrow a$		$c b \rightarrow a$		$a b \rightarrow$		$c b \rightarrow$		$a b \rightarrow$		$b b \rightarrow$	
$c c$		$b c$		$c c$		$a c$		$b c$		$a c$	
$a a$		$a a$		$b a$		$b a$		$c a$		$c a$	
$b c \rightarrow a$		$c c \rightarrow a$		$a c \rightarrow$		$c c \rightarrow$		$a c \rightarrow$		$b c \rightarrow$	
$c b$		$b b$		$c b$		$a b$		$b b$		$a b$	
$a b$		$a b$		$b b$		$b b$		$c b$		$c b$	
$b a \rightarrow$		$c a \rightarrow$		$a a \rightarrow b$		$c a \rightarrow b$		$a a \rightarrow$		$b a \rightarrow$	
$c c$		$b c$		$c c$		$a c$		$b c$		$a c$	
$a b$		$a b$		$b b$		$b b$		$c b$		$c b$	
$b c \rightarrow$		$c c \rightarrow$		$a c \rightarrow b$		$c c \rightarrow b$		$a c \rightarrow$		$b c \rightarrow$	
$c a$		$b a$		$c a$		$a a$		$b a$		$a a$	
$a c$		$a c$		$b c$		$b c$		$c c$		$c c$	
$b a \rightarrow$		$c a \rightarrow$		$a a \rightarrow$		$c a \rightarrow$		$a a \rightarrow c$		$b a \rightarrow c$	
$c b$		$b b$		$c b$		$a b$		$b b$		$a b$	
$a c$		$a c$		$b c$		$b c$		$c c$		$c c$	
$b b \rightarrow$		$c b \rightarrow$		$a b \rightarrow$		$c b \rightarrow$		$a b \rightarrow c$		$b b \rightarrow c$	
$c a$		$b a$		$c a$		$a a$		$b a$		$a a$	

Fig. 5

La flecha “ \rightarrow ” apunta a la alternativa que la FES selecciona cuando el perfil de preferencias es el indicado en la casilla. La Fig. 5 indica implicaciones inmediatas del hecho de suponer que la FES es Paretoeficiente: en todos aquellos perfiles en que ambos representantes están de acuerdo en que una alternativa dada es la más preferida, ésta debe ser la alternativa escogida por la FES. Toda FES Paretoeficiente debe asignar los valores indicados en la Fig. 5. Con ello, la Paretoeficiencia reduce el problema de asignar valores a 36 casillas a uno de asignarlos a 24.

Supongamos que los representantes no sólo desean recurrir a una FES f Paretoeficiente que realice una elección para cada uno de los 36 perfiles de preferencia posibles, sino que también desean que la FES sea no manipulable, esto es, que ningún representante obtenga un sistema de evaluación más preferido mintiendo sobre su preferencia que revelando la preferencia real. Por el Teorema de Gibbard-Satterthwaite sólo hay dos FES que cumplen esos requisitos: la FES f_1 que siempre escoge la alternativa más preferida por R1 o la FES f_2 que siempre escoge la alternativa más preferida por R2. Comprobémoslo. Sea f una FES Paretoeficiente y no manipulable.

Consideremos primero la casilla remarcada en la Fig. 5. Esta casilla representa el perfil de preferencias (abc, bac) . Por Paretoeficiencia, no puede ser que $f(abc, bac) = c$, puesto que ambos representantes prefieren a (o b) a c . Por tanto, f sólo puede asignar a o b a esta casilla. Supongamos que es a (Q9 pide ver qué pasa si es b). Esta elección se indica en la Fig. 6.

$a\ b$	$a\ b$	$b\ b$	$b\ b$	$c\ b$	$c\ b$
$b\ a \rightarrow a$	$c\ a \rightarrow$	$a\ a \rightarrow b$	$c\ a \rightarrow b$	$a\ a \rightarrow$	$b\ a \rightarrow$
$c\ c$	$b\ c$	$c\ c$	$a\ c$	$b\ c$	$a\ c$

Fig. 6

Pasemos ahora a la casilla remarcada en la Fig. 6. Cuando nos encontramos en esta casilla, la presunción es que las preferencias auténticas son las de la casilla: la preferencia de R1 es acb y la de R2 es bac . Como en todas las casillas, hay sólo tres posibilidades: f selecciona a , b o c . Supongamos que selecciona c . Esto es, $f(acb, bac) = c$. Entonces R1 podría manipular f , diciendo que su preferencia no es acb sino abc , ya que $f(abc, bac) = a$ (como acaba de asumirse) y R1 (según la preferencia auténtica acb asumida en la casilla remarcada de la Fig. 6) tiene acb como preferencia auténtica. Por tanto, diciendo que su preferencia es abc en lugar de acb , R1 consigue que la regla pase de elegir $c = f(acb, bac)$ a elegir $a = f(abc, bac)$. Dado que, según su preferencia auténtica acb , R1 prefiere a a c , f sería manipulable, lo que contradice la hipótesis de que no lo es. El mismo razonamiento demuestra que $f(acb, bac)$ no puede ser b . Conclusión: $f(acb, bac) = a$. Este nuevo valor descubierto de la FES f se indica en la Fig. 7.

$a\ b$	$a\ b$	$b\ b$	$b\ b$	$c\ b$	$c\ b$
$b\ a \rightarrow a$	$c\ a \rightarrow a$	$a\ a \rightarrow b$	$c\ a \rightarrow b$	$a\ a \rightarrow$	$b\ a \rightarrow$
$c\ c$	$b\ c$	$c\ c$	$a\ c$	$b\ c$	$a\ c$
$a\ b$	$a\ b$	$b\ b$	$b\ b$	$c\ b$	$c\ b$
$b\ c \rightarrow$	$c\ c \rightarrow$	$a\ c \rightarrow b$	$c\ c \rightarrow b$	$a\ c \rightarrow$	$b\ c \rightarrow$
$c\ a$	$b\ a$	$c\ a$	$a\ a$	$b\ a$	$a\ a$

Fig. 7

Consideremos ahora la casilla remarcada en la Fig. 7. Por Paretoeficiencia, no puede escogerse c . Así que hay dos posibilidades: $f(abc, bca) = a$ o $f(abc, bca) = b$. Asumamos la segunda: $f(abc, bca) = b$. Situémonos en la casilla con preferencias (abc, bac) , que es la casilla justo encima de la

remarcada en la Fig. 7. Por la hipótesis inicial, $f(abc, bac) = a$, tal y como indica la Fig. 7. Si ahora R2 anunciara la preferencia bca en lugar de la que se presume auténtica en esa casilla (la preferencia bac), la FES escogería b , ya que se ha asumido que $f(abc, bca) = b$. Por tanto, R2 podría manipular la FES si las preferencias auténticas fueran (abc, bac) : revelando bac , resulta a ; revelando en su lugar bca , resulta b , que es preferida por R2 a a . Puesto que f es no manipulable, no puede ser que $f(abc, bca) = b$. Como resultado, $f(abc, bca) = a$. Esto se indica en la Fig. 8.

$a\ b$	$a\ b$	$b\ b$	$b\ b$	$c\ b$	$c\ b$
$b\ c \rightarrow a$	$c\ c \rightarrow$	$a\ c \rightarrow b$	$c\ c \rightarrow b$	$a\ c \rightarrow$	$b\ c \rightarrow$
$c\ a$	$b\ a$	$c\ a$	$a\ a$	$b\ a$	$a\ a$

Fig. 8

Como en el caso de la Fig. 6, el valor de la función $f(acb, bca)$ en la casilla remarcada ha de ser a . Si no fuera así, R1 podría declarar la preferencia abc en lugar de la presumida auténtica acb y pasar de obtener $f(acb, bca) \neq a$ a obtener $f(abc, bca) = a$, lo que supondría para R1 conseguir la alternativa más preferida mintiendo. Dado que esto violaría la no manipulabilidad, ha de tenerse $f(acb, bca) = a$.

Q7. Demuestra que, dados los valores calculados en las Figs. 5–8, la FES debe asignar el valor a a las cuatro casillas de la izquierda en la Fig. 9.

$a\ c$	$a\ c$	$b\ c$	$b\ c$	$c\ c$	$c\ c$
$b\ a \rightarrow a$	$c\ a \rightarrow a$	$a\ a \rightarrow$	$c\ a \rightarrow$	$a\ a \rightarrow c$	$b\ a \rightarrow c$
$c\ b$	$b\ b$	$c\ b$	$a\ b$	$b\ b$	$a\ b$
$a\ c$	$a\ c$	$b\ c$	$b\ c$	$c\ c$	$c\ c$
$b\ b \rightarrow a$	$c\ b \rightarrow a$	$a\ b \rightarrow$	$c\ b \rightarrow$	$a\ b \rightarrow c$	$b\ b \rightarrow c$
$c\ a$	$b\ a$	$c\ a$	$a\ a$	$b\ a$	$a\ a$

Fig. 9

Con Q7 se demuestra que, para los 12 perfiles de preferencias de las dos columnas de la izquierda en la Fig. 5, la FES escoge precisamente la alternativa más preferida por R1: a . Se trata de comprobar que lo mismo pasa en las dos columnas centrales (en las que la FES escogerá b) y en las dos de la derecha (donde escogerá c).

Comenzando con las dos columnas centrales, tomemos la casilla remarcada en la Fig. 9. Por Paretoeficiencia, no puede seleccionarse a . Así que $f(bac, cba) \in \{b, c\}$. Si $f(bac, cba) = c$, entonces R1 podría declarar, en lugar de la preferencia auténtica bac , la preferencia acb . En tal caso, tal y como indica la Fig. 9, se obtendría $f(acb, cba) = a$, que es una alternativa preferida por R1 a c cuando la preferencia auténtica de R1 es la de la casilla remarcada en la Fig. 9 (preferencia bac). Por ello, f sería manipulable, contradiciendo la hipótesis de que no lo es. Así que $f(bac, cba) = b$.

Q8. Demuestra que en el resto de casillas f escoge la alternativa más preferida por R1. Por tanto, f sería dictatorial y R1 sería el dictador.

Q9. El resultado de Q8 se ha obtenido partiendo de la hipótesis inicial de que, en la casilla remarcada en la Fig. 5, la FES escogía a . Prueba que si escoge b (esto es, si $f(abc, bac) = b$) entonces f selecciona, en todas las casillas de la Fig. 5, la alternativa más preferida por R2.

El Teorema de Gibbard-Satterthwaite no es necesariamente cierto cuando la FES se define en un dominio restringido, esto es, cuando no todas las preferencias son posibles. El mecanismo de Groves-Clarke es un ejemplo de implementación, mediante equilibrios dominantes, de FES que no son dictatoriales. Esto se consigue restringiendo las preferencias admisibles a aquéllas representables mediante funciones de utilidad cuasi-lineales.

Q10. Sea g una FES constante, definida (como en la Fig. 5) para todos los perfiles de preferencias cuando hay 2 individuos y 3 alternativas. Por tanto, existe una alternativa a tal que, para todo perfil de preferencias P , $g(P) = a$. (i) Demuestra que g no es dictatorial. (ii) Demuestra que g no es manipulable. (iii) Demuestra que g es implementable mediante equilibrios dominantes. (iv) ¿Por qué g no es un contraejemplo al Teorema de Gibbard-Satterthwaite?

Q11. Demuestra que si una FES f es dictatorial entonces f es Paretoeficiente y no manipulable.

Implementación de funciones de elección social mediante equilibrios de Nash

Una función de elección social es implementable honestamente mediante equilibrios de Nash si, y sólo si, es implementable honestamente mediante equilibrios dominantes.

Por el principio de revelación, toda FES implementable mediante equilibrios dominantes empleando el más complejo de los mecanismos imaginable es también implementable mediante mecanismos directos. Debido a ello, el estudio de la implementación mediante equilibrios dominantes puede restringirse sin pérdida de generalidad al uso de mecanismos directos.

En vista del Teorema de Gibbard-Satterthwaite, la implementación mediante equilibrios dominantes es muy exigente: pocas funciones de elección social (y no precisamente las más atractivas) son implementables mediante equilibrios dominantes. ¿Qué ocurre si uno considera soluciones más generales, como los equilibrios de Nash? El resultado anterior muestra que, para que el paso de exigir equilibrios dominantes a meramente exigir equilibrios de Nash sea útil, los mecanismos tienen que ser algo más complejos que los directos.

Generalizaciones

Los conceptos anteriores pueden generalizarse. Por ejemplo, una regla de elección social (RES) es una función $g : L \rightarrow 2^A \setminus \{\emptyset\}$ que asigna, a cada perfil de preferencias P , un subconjunto no vacío $g(P) \subseteq A$ del conjunto de alternativas, en donde 2^A designa el conjunto de todos los subconjuntos de A . Una función de elección social es el caso particular de una regla de elección social en el que $g(P)$ consiste siempre en un elemento.

Sea g una RES. El mecanismo (N, M, A, r) implementa la regla de elección social g mediante la solución de equilibrio E si, para todo perfil de preferencias $P \in L$ y todo $m \in E_r(P)$, $r(m) = f(P)$.

Sea g una RES. El mecanismo directo (N, L, A, r) implementa honestamente la regla de elección social f mediante la solución de equilibrio E si, para todo perfil de preferencias $P \in L$: (H1) $P \in E_r(P)$; y (H2) $r(P) \in g(P)$.

Un mecanismo directo que implementa honestamente una regla de elección social mediante la solución de equilibrio E también se llama “mecanismo compatible con los incentivos según la solución de equilibrio E ”. Compatibilidad con los incentivos (o implementabilidad honesta) significa que la revelación de las auténticas preferencias constituyen un equilibrio (del tipo E escogido) en el juego asociado con el mecanismo directo y que el resultado de jugar el equilibrio es, precisamente, el resultado que la regla asocia con aquellas preferencias.

El principio de revelación (para equilibrios de Nash)

Si una regla de elección social f es implementable mediante equilibrios de Nash entonces f es honestamente implementable mediante equilibrios de Nash.

El principio de revelación para equilibrios de Nash extiende el principio de revelación original formulado para equilibrios dominantes. Según el nuevo principio de revelación, cualquier regla de elección implementable mediante equilibrios de Nash se puede implementar mediante un mecanismo directo en el que los jugadores anuncian sus preferencias y revelar las preferencias auténticas constituye un equilibrio de Nash. Sin embargo, la implementación honesta es más débil que la implementación, porque permite: (i) que equilibrios de Nash (no honestos) generen resultados diferentes a los de la regla; y (ii) que, para algún perfil de preferencias P , no todas las alternativas del conjunto $g(P)$ seleccionado por la regla se correspondan con alguna solución del juego.

El principio de revelación para equilibrios de Nash no implica que el análisis de la implementación mediante equilibrios de Nash pueda restringirse a mecanismos directos, ya que, por lo dicho anteriormente, el juego asociado con el mecanismo puede tener equilibrios de Nash que no conllevan la revelación honesta de las preferencias y que conducen a resultados diferentes de los seleccionados por la regla de elección social.

Regla de elección social monótona

Una regla de elección social $g : L \rightarrow 2^A \setminus \{\emptyset\}$ es monótona cuando se cumple lo siguiente para todos los perfiles de preferencias P y Q , y toda alternativa a : si $a \in g(P)$ y $a \notin g(Q)$ entonces existe un individuo i y una alternativa $b \in A \setminus \{a\}$ tales que $a P_i b$ y $b Q_i a$.

Una RES es monótona si ocurre lo siguiente. Sea a una alternativa escogida por la regla con perfil de preferencias P . Supongamos que el perfil de preferencias Q se obtiene del perfil P de manera que a no cae en la preferencia de ningún individuo con respecto a ninguna otra alternativa (esto es, la preferencia de a con respecto a las demás se mantiene o mejora). Entonces a sigue siendo una opción escogida con perfil Q . La monotonoía viene a decir que si una alternativa a es “buena” (escogida por la regla) y nadie pierde preferencia por ella (ninguna

alternativa que antes era menos preferida que a ahora pasa a ser más preferida) entonces la alternativa sigue siendo “buena” con las nuevas preferencias: si a era escogida y no pierde apoyo, seguirá siéndolo. De manera equivalente, si a deja de ser “buena” en el paso de P a Q es porque, en alguna preferencia, a pasa de ser más preferida a ser menos preferida que alguna alternativa b .

Ausencia de veto

Una regla de elección social $g : L \rightarrow 2^A \setminus \{\emptyset\}$ satisface ausencia de veto si se cumple lo siguiente para todo perfil de preferencia P y alternativa a : si existe algún individuo i tal que, para todo individuo $j \neq i$, a es la alternativa más preferida en P_j entonces $a \in g(P)$.

Una RES cumple con la propiedad de ausencia de veto si el hecho de que todos los individuos, excepto posiblemente uno, consideren la alternativa a como la más preferida conlleva que a sea una alternativa elegida por la RES. Con ello, si b es la alternativa más preferida para i y $a \neq b$ es la más preferida por todos los demás, la ausencia de veto implica que i no puede impedir que a se escoga (al tratarse de una RES, pueden escogerse más alternativas además de a).

Teorema de Maskin¹

Sea $g : L \rightarrow 2^A \setminus \{\emptyset\}$ una regla de elección social.

- Si g es implementable mediante equilibrios de Nash, entonces g es monótona.
- Si g es monótona, satisface ausencia de veto y hay al menos 3 individuos, entonces g es implementable mediante equilibrios de Nash.

La primera parte del teorema de Maskin establece que la monotonía es una condición necesaria para la implementabilidad mediante equilibrios de Nash: una RES que no sea monótona, no es implementable mediante equilibrios de Nash. El juicio del Rey Salomón ilustra este resultado. Sea a la alternativa “el bebé se entrega a la madre 1”, b la alternativa “el bebé se entrega a la madre 2” y c la alternativa “el bebé no se entrega a ninguna madre” (al menos, entero). Hay dos perfiles de preferencia, $P = (P_1, P_2)$ y $Q = (Q_1, Q_2)$ tales que

P_1	P_2	Q_1	Q_2
a	b	a	b
b	c	c	a
c	a	b	c

en donde se interpreta que el perfil P se corresponde con el caso en que la madre 1 es la verdadera y el perfil Q con el caso en que la madre 2 es la verdadera. El Rey Salomón pretendía implementar la regla g tal que $g(P) = \{a\}$ y $g(Q) = \{b\}$. Por desgracia, esta regla no es monótona ya que: (i) $a \in g(P)$; (ii) $a \notin g(Q)$; pero (iii) en el paso de P a Q , a no cae con respecto a ninguna alternativa en la preferencia de ninguna madre (de hecho, a mejora en la preferencia de la madre 2 con respecto a c).

¹ Eric Maskin, http://en.wikipedia.org/wiki/Eric_Maskin, recibió el Premio Nobel de Economía en 2007, junto con Roger Myerson y Leonid Hurwicz, “por haber establecido los fundamentos de la teoría del diseño de mecanismos”.. Maskin es editor de *Economics Letters*, www.elsevier.com/locate/econlet.

Q12. En aplicación de la definición dada de monotonía, comprueba que se tiene que $a \in g(P)$ y $a \notin g(Q)$, pero que no hay ninguna alternativa d ni madre i tal que $a P_i d$ y $d P_i a$.

Como consecuencia, por el Teorema de Maskin, la regla g que pretende implementar el Rey Salomón no es implementable mediante equilibrios de Nash: no hay ningún mecanismo en el que las madres escogan mensajes que constituyen un equilibrio de Nash y que, de acuerdo con el mecanismo, generen siempre el resultado de la regla g .

La segunda parte del Teorema de Maskin establece condiciones suficientes para la implementabilidad mediante equilibrios de Nash: con al menos 3 individuos, si tenemos una RES que sea monótona y cumpla con la ausencia de veto, será implementable mediante equilibrios de Nash. ¿Qué pasa en el caso de 2 individuos? El Teorema de Hurwicz-Schmeidler da una respuesta.

Regla de elección social Paretoeficiente

Una regla de elección social g es Paretoeficiente si $a \in g(P)$ implica que no existe $b \in A$ tal que, para todo individuo i , $b P_i a$.

Regla de elección social dictatorial

Una regla de elección social g es dictatorial si existe un individuo i tal que $a \in g(P)$ siempre que, para toda alternativa $b \in A$, $a P_i b$.

Teorema de Hurwicz-Schmeidler

Sea $g : L \rightarrow 2^A \setminus \{\emptyset\}$ una regla de elección social con sólo dos individuos y tal que L contiene todos los perfiles de preferencias sobre A . Si g es Paretoeficiente entonces g es implementable mediante equilibrios de Nash si, y sólo si, g es dictatorial.

Bibliografía

- Binmore, Ken (2008): *La teoría de juegos. Una breve introducción*. Alianza Editorial: Madrid.
- Campbell, Donald E. (1995): *Incentives: Motivation and the Economics of Information*, Cambridge University Press: Cambridge, pp. 12–13 y 262–264.
- Gibbard, Allan (1973): “Manipulation of voting schemes: A general result”, *Econometrica* 41, 587–601.
- Laffont, Jean-Jacques (1988): *Fundamentals of Public Economics*, The MIT Press: Cambridge, Massachusetts, capítulo 5.
- Myerson, Roger B. (2007): “Perspectives on mechanism design in economic theory”, Nobel Lecture, http://nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/2007/myerson_lecture.pdf.
- Osborne, Martin y Rubinstein, Ariel (1994): *A Course in Game Theory*. The MIT Press: Cambridge, Massachusetts, capítulo 10.
- Satterthwaite, Mark (1975): “Strategy-proofness and Arrow’s conditions: Existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions”, *Journal of Economic Theory* 10, 187–217.