Jocs repetits

Una d'enamorats

Hi ha dos jugadors, ell i ella. Cada jugador ha de decidir, ignorant la decisió de l'altre jugador, si confessar (estratègia *c*) que està enamorat de l'altre jugador o si no dir res (estratègia *n*). La Fig. 1 representa aquesta situació com a joc simultani. Els pagaments expressen les següents preferències: si el jugador *i* declara el seu amor a *j*, aleshores *j* prefereix no dir res; entenent que els jugadors són molt orgullosos, el pitjor resultat per a *i* es produeix quan *i* declara el seu amor i *j* no diu res (perquè *i* s'avergonyeix); per a cada jugador, el segon pitjor resultat té lloc quan tots dos callen; i, per a cada jugador, el resultat obtingut quan tots dos declaren el seu amor és preferit al resultat obtingut quan tots dos callen.

		2	
		c	*n*
1	*c*	2 2	0 3
	n	3 0	1 1

Fig. 1. El joc de la declaració d'amor

Al joc J1 de la Fig. 1, per a cada jugador, *c* és una estratègia fortament dominada i, per tant, l'únic equilibri de Nash (i únic equilibri perfecte) és [*n*, *n*]. Malgrat que tots dos jugadors obtenen un pagament superior a la jugada [*c*, *c*], si el joc es juga un sol cop no seria d'esperar que els jugadors acceptessin triar *c*, ja que si *i* espera que *j* triï *c*, aleshores la millor resposta d'*i* és triar *n*.

Joc repetit

Es parla de joc repetit quan s'assumeix que un determinat joc, com ara J1, es juga vàries vegades. La qüestió que motiva aquest tema és la següent: dóna la repetició del joc J1 incentius als jugadors a escollir *c*?

La Fig. 2 mostra una possible representació de jugar el joc de la Fig. 1 dos cops, on s'assumeix que, en iniciar cada torn o etapa, els jugadors saben quin ha estat el resultat de l'etapa prèvia. Per aquest motiu, els nodes on el joc comença per segon cop (nodes *v*, *x*, *y* i *z*) són arrels de subjocs. També s'assumeix que els pagaments finals són la suma dels pagaments obtinguts a les dues etapes. Es podria considerar alternativament la mitjana dels pagaments, però a la pràctica tant és una opció com l'altra, ja que maximitzar la mitjana equival a maximitzar la suma.

Repetir el joc sembla que no canvia substancialment la situació original: a la segona etapa, a cada conjunt d'informació del jugador 2, *n* és l'única estratègia seqüencialment racional, perquè *n* sempre dóna al jugador 2 un pagament més gran que *c*. Expectant el jugador 1 (tant a *v* com a *x*, *y* i *z*) que el jugador 2 escollirà *n*, la millor opció per a 1 és triar (a cadascun dels quatre nodes) *n*. Donades aquestes respostes a la segona etapa, el millor per al jugador 2 a la primera etapa és triar *n*. I donat això, el millor per al jugador 1 a la primera etapa és triar *n*. En resum: jugar dos cops J1 comporta jugar dos cops la solució de J1 i no sorgeix cap nova solució.

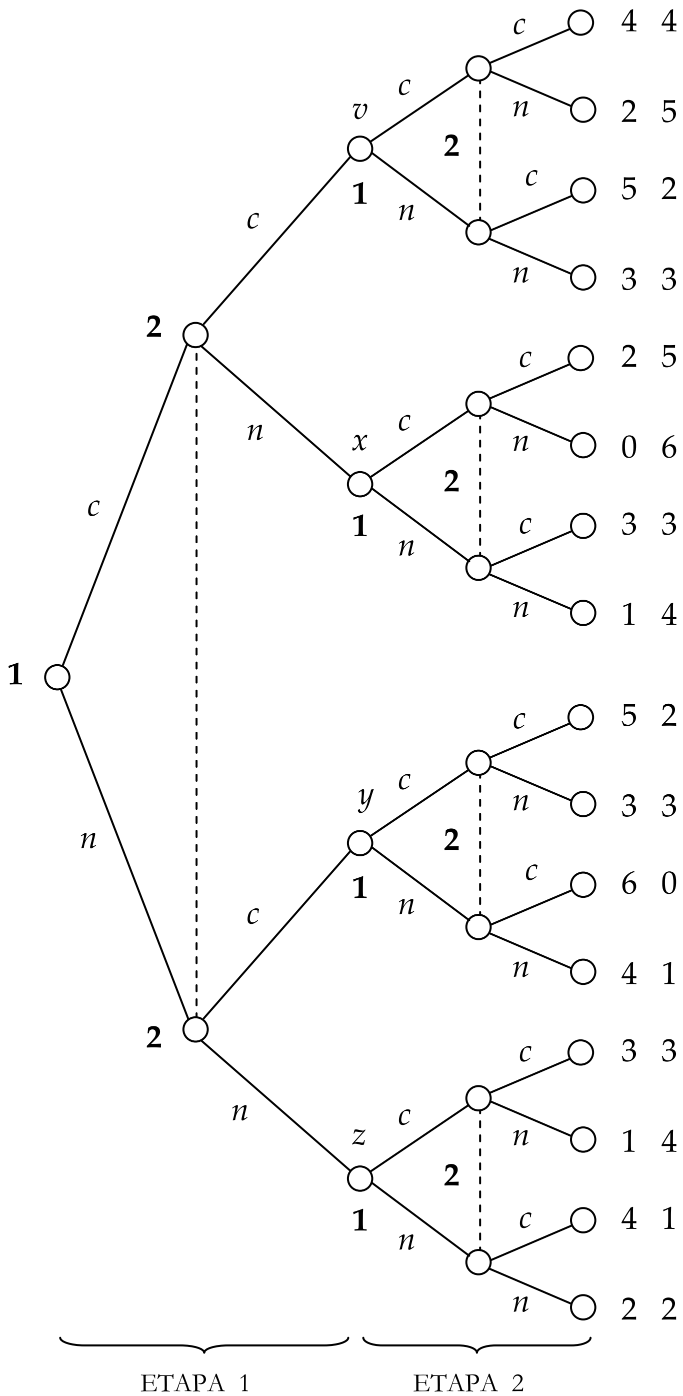

Fig. 2. El joc de la Fig. 1 jugat dos cops (sense factors de descompte)

Joc repetit indefinidament amb factors de descompte

Suposem ara que J1 es repeteix de manera indefinida i que els jugadors valoren més els pagaments presents que els futurs: existeix un nombre real $\delta \in (0, 1)$ segons el qual el valor en el període t d'una unitat de pagament en el període $t + 1$ és δ. Per tant, 3 unitats en el període 4 equivalen a 3δ unitats en el període 3, a $(3\delta)\delta = 3\delta^2$ unitats en el període 2 i a $(3\delta^2)\delta = 3\delta^3$ unitats en el període 1. El paràmetre δ (anomenat <u>factor de descompte</u>) es pot entendre com una <u>mesura de la impaciència dels jugadors</u>: com més gran sigui δ, més pacient és el jugador, en el sentit que menys valora el present en relació amb el futur. Per exemple, $\delta = 1$ diu que tenir una unitat de pagament al període $t + 1$ és el mateix que tenir-la al període t. En canvi, $\delta = ½$ expressa que tenir una unitat al període $t + 1$ és com tenir només mitja unitat al període t (una unitat de pagament té més valor en t que en $t + 1$ i, així, millor tenir-la ara a t que després a $t + 1$).

Sigui s el pla consistent en: (i) triar c a cada etapa si cap jugador no ha triat n a una etapa anterior; i (ii) triar n en cas contrari (això és, si algun jugador ha triat n a una etapa prèvia). Comprovem que $[s, s]$ és un equilibri de Nash del joc repetit indefinidament, assumint, per simplicitat, que tots dos jugadors tenen el mateix factor de descompte δ.

Si tots dos jugadors sempre trien c, ambdós obtenen un pagament de 2 a cada etapa. En conseqüència, prenent com a $t = 0$ l'etapa inicial, el pagament del jugador i si tots dos segueixen el pla "cooperatiu" s és

$$u_i = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \cdot 2 = 2\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t = 2\frac{\delta^0 - \delta^{\infty+1}}{1-\delta} = \frac{2}{1-\delta}$$

on s'ha fet servir el fet que $\sum_{t=x}^{y} \delta^t = \frac{\delta^x - \delta^{y+1}}{1-\delta}$ (fórmula vàlida en el límit per a $y = \infty$) i on $0 < \delta < 1$ fa que $\delta^{\infty+1} = \delta^{\infty} = 0$.

D'altra banda, si el jugador i deixa de jugar c a l'etapa $\tau \geq 1$ (assumint que el jugador j segueix s), aleshores i obté 2 des de l'etapa 0 fins a l'etapa $\tau - 1$, obté 3 a l'etapa τ (perquè a l'etapa τ el jugador j encara juga c) i obté 1 a partir de l'etapa $\tau + 1$ (ja que j es passa a n). El pagament seria

$$v_i = \sum_{t=0}^{\tau-1} \delta^t \cdot 2 + \delta^\tau \cdot 3 + \sum_{t=\tau+1}^{\infty} \delta^t \cdot 1 = 2\frac{\delta^0 - \delta^{\infty+1}}{1-\delta} + \delta^\tau \cdot 3 + \frac{\delta^{\tau+1} - \delta^{\infty+1}}{1-\delta} = \frac{2 + \delta^\tau(1-2\delta)}{1-\delta}.$$

Per tant, $u_i - v_i = -\frac{\delta^\tau(1-2\delta)}{1-\delta} = \frac{\delta^\tau(2\delta-1)}{1-\delta}$. Atès que $1 - \delta > 0$, $u_i - v_i > 0$ si, i només si, $2\delta - 1 > 0$. En resum, jugar cooperativament seguint el pla s és millor per al jugador i si, i només si, $\delta > ½$. Això indica que <u>si els jugadors són suficientment pacients (δ suficientment propera a 1) aleshores jugar c mentre no es jugui el contrari és un equilibri de Nash del joc repetit indefinidament</u>.

Q1. Calcula $u_i - v_i$ a partir de $\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \cdot 2 - (\sum_{t=0}^{\tau-1} \delta^t \cdot 2 + \delta^\tau \cdot 3 + \sum_{t=\tau+1}^{\infty} \delta^t \cdot 1)$. Determina el pagament del jugador i si es desvia a l'etapa $\tau = 0$ i compara'l amb el seu pagament si no es desvia. Depèn el resultat que $[s, s]$ és un equilibri de Nash del joc repetit del fet que els factors de descompte dels dos jugadors siguin iguals?

Definició de joc repetit

Sigui $G = \langle N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\rangle$ un joc simultani, on les estratègies dels jugadors passen a anomenar-se accions. <u>El joc repetit T vegades</u> (T finit o infinit) <u>basat en G</u> és el joc seqüencial que satisfà el següent. Primer, el conjunt de <u>jugadors</u> és també N. Segon, una <u>història</u> fins al període t està formada que la seqüència $(s^0, s^1, \ldots, s^{t-1})$ de les jugades escollides a les etapes prèvies a l'etapa t. Quan comença l'etapa t del joc G, tots els jugadors coneixen la història fins al període t. Tercer, una <u>estratègia</u> d'un jugador del joc repetit consisteix en una assignació d'una acció del jugador a G a cada etapa: una estratègia del jugador i és una funció s_i que, per a cada etapa t, pren com a input la història h^t fins a t i produeix com a output l'acció $s_i^t(h^t)$ que i tria al període t (per a simplificar, <u>s'assumirà que els jugadors no randomitzen</u>: les seves estratègies són pures). Per exemple, una estratègia per al jugador 2 al joc de la Fig. 2 hauria d'especificar què faria el jugador 2 a la primera etapa del joc $s_2^0(h^0)$ i què faria $s_2^1(h^1)$ a la segona etapa. A la primera etapa no hi ha història i, per tant, $h^0 = \varnothing$, de forma que $s_2{}^0(h^0) = c$ o $s_2{}^0(h^0) = n$. La cosa canvia a la segona etapa, perquè hi ha 4 possibles històries: (c, c), (c, n), (n, c) i (n, n). Això vol dir que $h^1 \in \{(c, c), (c, n), (n, c), (n, n)\}$. Llavors $s_2{}^1$ ha d'especificar, per a cada valor d'h^1, l'acció $s_2{}^1(h^1)$ a prendre a l'etapa 2. Com a resultat, l'estratègia del jugador 2 al joc de la Fig. 2 està formada per 5 components: $s_2{}^0(h^0)$, $s_2{}^1(c, c)$, $s_2{}^1(c, n)$, $s_2{}^1(n, c)$ i $s_2{}^1(n, n)$. Aquesta constatació no hauria de ser una sorpresa, perquè al joc de la Fig. 2 el jugador 2 té 5 conjunts d'informació.

Finalment, resten per definir els <u>pagaments</u> del joc repetit. Formalment, es tracta de sintetitzar, per a cada jugador i, seqüències de nombres reals $(x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^t, \ldots)$ en un únic nombre real x_i, on el valor x_i^t representa el pagament que i obté a l'etapa t del joc repetit. Hi ha diverses maneres de fer la síntesi. Una opció és prendre la mitjana dels pagaments. A l'hora d'analitzar el joc repetit, prendre la mitjana equival a fer la suma dels pagaments. El problema d'aquesta opció és que, si el joc es repeteix un nombre indefinit de vegades, la mitjana (i, per tant, la suma) pot no existir. Això és resol considerant com a pagament x_i el límit inferior de la seqüència $(x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^t, \ldots)$, que és el valor més petit al qual convergeix una subseqüència convergent.

Una altra opció és considerar <u>sumes descomptades</u> dels pagaments: amb descompte δ <u>igual per a tot jugador</u>, la suma descomptada d'$(x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^T)$ és $\sum_{t=0}^{T} \delta^t \cdot x_i^t$ (el cas $\delta = 1$ equival a la suma dels pagaments). Atès que $0 < \delta < 1$, aquesta suma sempre existeix, sigui T finit o infinit. Per a fer comparables els pagaments del joc repetit amb els pagaments del joc original G, s'acostuma a multiplicar $\sum_{t=0}^{T} \delta^t \cdot x_i^t$ pel factor de normalització $(\sum_{t=0}^{T-1} \delta^t)^{-1}$. Quan $T = \infty$, $(\sum_{t=0}^{T-1} \delta^t)^{-1} = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t = 1 - \delta$. Per això, el pagament del jugador i al joc repetit amb un nombre infinit d'etapes que correspon a la jugada s del joc repetit es defineix com $U_i(s) = (1 - \delta) \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \cdot u_i^t(s)$, on $u_i^t(s)$ és el pagament del jugador i a l'etapa t quan es juga la jugada s. Al cas finit, $U_i(s) = (\sum_{t=0}^{T-1} \delta^t)^{-1} \cdot \sum_{t=0}^{T} \delta^t \cdot u_i^t(s)$.

Q2. Suposem que, a tota etapa d'un joc repetit un nombre infinit de vegades, el pagament del jugador és sempre el mateix: el valor v. Comprova que la suma $(1 - \delta) \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \cdot v$ de pagaments descomptats és v. En funció d'aquest resultat, explica en quin sentit el factor $(1 - \delta)$ normalitza els pagaments descomptats.

Equilibris de Nash d'un joc repetit
Tot joc repetit T vegades (T finit o infinit), basat en un joc simultani G que té un equilibri de Nash amb estratègies pures, té almenys un equilibri de Nash.

Aquest resultat se segueix del fet que, si s és un equilibri de Nash amb estratègies pures del joc original aleshores la jugada del joc repetit on cada jugador i juga, a cada etapa t, l'acció s_i constitueix un equilibri de Nash del joc repetit. Dit d'una altra manera: <u>jugar a cada etapa del joc repetit un equilibri de Nash del joc original defineix un equilibri de Nash del joc repetit</u>.

Q3. Explica perquè jugar un equilibri de Nash (amb estratègies pures) d'un joc simultani G a cada etapa del joc repetit basat en G és un equilibri de Nash del joc repetit.

El pagament de reserva o pagament minimax

Al joc simultani $G = \langle N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\rangle$, el <u>pagament de reserva</u> $r_i = min_{\,a_{-i}\in A_{-i}}\ max_{\,a_i\in A_i}\ u_i(a_i, a_{-i})$ del jugador $i \in N$ és el pitjor pagament d'i que els rivals d'i poden forçar quan i juga millors respostes al que fan els rivals. Si els rivals d'i es proposessin castigar i fent-li obtenir el pagament més baix possible, no podrien rebaixar el pagament d'i per sota d'r_i: en el pitjor dels casos per a i, el seu pagament seria r_i. Per tant, r_i representa el pagament que el jugador i pot assegurar-se obtenir facin el que facin els rivals.

		2		
		c	n	q
	c	2 2	0 $\boxed{3}$	–3 –3
1	n	3 0	1 $\boxed{1}$	–2 –3
	q	–3 –3	–3 $\boxed{–2}$	–3 –3

Fig. 3

Càlcul dels pagaments de reserva

Sigui el joc de la Fig. 3 (obtingut del de la Fig. 1 afegint a cada jugador l'alternativa fortament dominada q). Per a determinar r_1, considerem cadascuna de les opcions del jugador 2 (c, n i q) i, per a cadascuna d'elles, identifiquem la millor resposta d'1. Quan 2 juga c, la millor resposta d'1 és n; quan n, n; i quan q, també n. Els pagaments corresponents d'1 es troben encerclats a la Fig. 3. El valor r_1 és el més petit dels valors encerclats: –2. Per a determinar r_2, es procedeix de manera anàloga: es determina el pagament corresponent a la millor resposta de 2 per a cada opció del jugador 1 (pagaments dins de rectangles a la Fig. 3) i a continuació s'identifica el valor més petit. En aquest cas, $r_2 = –2$.

Q4. Comprova que el valor de reserva de cada jugador del joc de la Fig. 1 és 1. Calcula el valor de reserva de tots els jugadors dels jocs dels epígrafs *Equilibri de Nash* i *Equilibri perfecte*.

Conjunt de vectors de pagaments factibles i individualment racionals

El conjunt F de vectors de <u>pagaments factibles i individualment racionals</u> d'un joc repetit basat en el joc simultani G (i del mateix joc G) és el conjunt de vectors de pagaments $(u_i(s)_{i\in N})$ tals que s és una jugada defineix del joc G i tals que, per a tot jugador i, $u_i(s) > r_i$.

El conjunt F defineix el conjunt de possibles vectors de pagaments d'un joc repetit. La idea és que el pagament r_i representa el càstig amb la resta de jugadors amenaça al jugador i si i no respecta un determinat acord al joc repetit. Aquest acord hauria d'atorgar a i un pagament superior a r_i perquè, si no fos així, amenaçar-lo que rebrà el pagament d'r_i no tindria res de càstig. És per això que els vectors de pagaments que resultin del joc repetit han de donar tothom més d'r_i. Per exemple, al joc de la Fig. 1, els possibles vectors de pagaments són (2, 2), (0, 3), (3, 0) i (1, 1). En aquest joc, $r_1 = r_2 = 1$. Per tant, F està format per aquells vectors de pagaments on tots els jugadors reben més d'1. Això fa que F tingui només un element: (2, 2).

Fonamentant equilibris de Nash a un joc repetit amb amenaces

A un joc repetit es poden construir equilibris de Nash de la següent manera: cada jugador i juga la seva estratègia s_i a una determinada jugada (que pot representar el resultat d'un acord entre els jugadors) i si algun jugador i juga una estratègia diferent d's_i aleshores els altres jugadors juguen les estratègies de càstig que fan que i obtingui r_i.

Per exemple, al joc J3 de la Fig. 3, [c, c] no és un equilibri de Nash, però aplicant el plantejament anterior, es pot fer que jugar [c, c] a cada etapa (tret de l'última) d'un joc repetit basat en J3 constitueixi un equilibri de Nash del joc repetit. Per a il·lustrar aquesta idea, suposem que J3 es repeteix dos cops. Sigui s_i l'estratègia del jugador i al joc repetit tal que: (i) $s_i^0 = c$; i (ii) $s_i^1 = n$ si $h^1 = (c, c)$ i $s_i^1 = q$ si $h^1 \neq (c, c)$. Que $s_i^0 = c$ vol dir que a la primera etapa tothom juga c. Que $s_i^1 = n$ si $h^1 = (c, c)$ vol dir que tothom juga n a la segona etapa si abans tothom ha jugat c. Comprovem que aquestes estratègies formen un equilibri de Nash del joc repetit dos cops.

En primer lloc, si tothom juga les estratègies anteriors, llavors es juga [c, c] a la primera etapa, resultant en un pagament de 2 per a cada jugador; i es juga [n, n] a la segona etapa, resultant en un pagament d'1 per a cada jugador. La suma de pagaments descomptats és $2 + \delta\cdot 1$. El pagament de la primera etapa no es descompta, ja que el factor de descompte permet expressar els pagaments de les etapes diferents de la primera en termes dels pagaments de la primera etapa. La suma de pagaments descomptats i normalitzats és $(2 + \delta)/(1 + \delta)$.

En segon lloc, plantegem-nos quina és la desviació, respecte de l'anterior estratègia, més profitosa per a un jugador i (assumint que l'altre jugador, j, segueix l'anterior estratègia). A la primera etapa, si j juga c aleshores la millor resposta d'i és triar n. En tal cas, i obté un pagament de 3 a la primera etapa. Però a la segona j juga q, perquè $h^1 = (n, c) \neq (c, c)$. La millor resposta d'i continua essent n i el pagament per a i és -2. La suma de pagaments descomptats és $3 - \delta\cdot 2$ i la suma de pagaments descomptats i normalitzats és $(3 - 2\delta)/(1 + \delta)$. Per a què i no tingui incentiu a rebutjar l'estratègia (s_i^0, s_i^1) cal que $(2 + \delta)/(1 + \delta) > (3 - 2\delta)/(1 + \delta)$. Atès que $\delta > 0$, resulta que $1/(1 + \delta)$ pot cancel·lar-se. Així, cal que $2 + \delta > 3 - 2\delta$; això és, cal que $\delta > ⅓$. En resum, si $\delta > ⅓$, la jugada on cada jugador i juga (s_i^0, s_i^1) al joc repetit dos cops basat en J3 és un equilibri de Nash on cada jugador pot obtenir més que a l'únic equilibri de J3: a J3 cada jugador obté 1; al joc repetit, cada jugador obté $(2 + \delta)/(1 + \delta)$, que és superior a 1 amb, per exemple, $\delta = ⅗$. Aquest exemple il·lustra les idees subjacents a l'anomenat *Folk theorem* dels jocs repetits[1].

Teorema de factibilitat per als jocs repetits (*Folk theorem*)

Sigui G un joc simultani i v un membre d'F (un vector de pagaments factibles i individualment racionals de G). Aleshores existeix un factor de descompte $\delta^* \in (0, 1)$*, tal que, per a tot* $\delta \geq \delta^*$*, el joc repetit un nombre infinit de vegades basat en G té un equilibri de Nash al qual correspon el vector de pagaments v.*

El resultat anterior diu que qualsevol vector de pagaments factibles i individualment racionals d'un joc simultani pot ser obtingut a través d'un equilibri de Nash d'un joc repetit, un nombre infinit de vegades, basat en G si el factor de descompte és suficientment gran.

[1] El nom de *Folk theorem* ("teorema tradicional") prové del fet que es tractava d'un resultat ben conegut entre els estudiosos de la teoria del joc durant molt de temps i sense que hi hagués un article publicat que contingués el teorema. Variacions i extensions d'aquest resultat també han passat a ser coneguts com a *Folk theorems* encara que ara poguessin ser atribuïts a algú.

Per què el joc s'ha de repetir un nombre infinit de vegades? De fet, quin sentit té considerar jocs repetits infinitament? En resposta a la segona pregunta, té sentit considerar jocs repetits un nombre infinit de vegades com a aproximació d'aquella situació on el joc es repeteix un nombre finit però indeterminat de vegades. En aquest cas, els factors de descompte es poden reinterpretar com a probabilitats que el joc continuï. Una altra justificació d'analitzar jocs repetits infinitament és de caràcter conceptual: és consistent la solució d'un joc repetit on es va incrementant el nombre d'etapes amb la solució d'un joc repetit infinits cops?

L'últim exemple considerat permet respondre a la darrera qüestió i a la primera: hi ha casos en què hi ha una diferència substancial entre jocs repetits un nombre finit de vegades i jocs repetits un nombre infinit. A l'exemple, el joc J3 s'ha repetit només dos cops i l'equilibri de Nash genera un vector de pagaments (on cada jugador rep $(2 + \delta)/(1 + \delta)$, on $\delta > ⅓$) que es troba al conjunt F associat amb J3.

Q5. Quin és el conjunt F de vectors de pagaments factibles i individualment racionals de J3?

La dificultat de repetit un nombre finit de vegades jocs com el J3 és que, a l'última etapa, si es tracta d'obtenir els pagaments més alts possibles, només es pot jugar l'equilibri de Nash $[n, n]$ del joc original. L'inconvenient que el joc repetit sigui finit és que es pot aplicar la inducció cap enrere. Això fa que, a l'última etapa, no hi hagi la possibilitat de penalitzar posteriorment als jugadors per no respectar un cert acord. En canvi, si el joc és infinit, tota desviació de l'acord pot ser penalitzada i es pot fer que, a partir de la desviació, el desviat rebi només el seu pagament de reserva.

Per a il·lustrar el teorema de factibilitat, considerem J3 repetit un nombre infinit de vegades. Entre els vectors de pagaments factibles i individualment racionals, escollim, per exemple, el vector (2, 2). El teorema diu que és possible fer que aquest sigui el pagament que proporcioni algun equilibri de Nash del joc repetit. Un equilibri de Nash que genera aquest pagament consisteix en les estratègies següents: per a tot i i tot $t \geq 0$, $s_i^t = c$ si a h^t tothom ha jugat sempre c i, en cas contrari, per a tot $\tau \geq t$, $s_i^\tau = q$. Aquesta estratègia diu que tot jugador i tria c si tothom abans ha triat c i, si algú algun cop tria c, aleshores, a partir d'aquell moment, i tria sempre q.

Q6. Indica un interval de valors de δ que asseguren que les estratègies acabades de definir formen un equilibri de Nash del joc repetit un nombre infinit de vegades. Verifica que el vector de pagaments d'aquest equilibri és (2, 2).

		2	
		c	d
1	a	5 1	0 0
	b	4 4	2 5

Fig. 4

Q7. (i) Al joc de la Fig. 4, determina els pagaments de reserva i els vectors factibles i individualment racionals. (ii) Al corresponenet joc repetit un nombre infinit de vegades, hi ha algun valor de δ i algun equilibri de Nash que generi el vector de pagaments (4, 4)? Si és així, indica valors de δ i un tal equilibri de Nash, i verifica que l'és. (iii) Fes el mateix que a (ii) però amb el vector (2, 5). (iv) Representa gràficament el joc de la Fig. 4 repetit dos cops i troba els equilibris perfectes en subjocs.

Consideració de la perfecció en subjocs
Pel que s'ha vist fins ara, una manera de sostenir a un joc repetit decisions que no són maximitzadores de pagaments al joc original, com ara [c, c] al joc de la Fig. 3, amb l'objectiu d'obtenir pagaments superiors a la llarga, es basa en castigar els possibles transgressors. Pel teorema de factibilitat, per a factors de descompte δ prou grans (que impliquen valorar suficientment els pagaments futurs), tot vector de pagaments factibles i individualment racionals del joc original es poden obtenir com a pagaments descomptats i normalitzats d'algun equilibri de Nash a un joc repetit infinitament. La pega d'aquesta construcció és que dur a terme el càstig pot no constituir un equilibri de Nash en el subjoc on s'ha de realitzar el càstig.

Per exemple, reconsiderem el joc J3 de la Fig. 3 repetit dos cops. Sigui s_i l'estratègia del jugador i al joc repetit tal que: (i) $s_i^0 = c$; i (ii) $s_i^1 = n$ si $h^1 = (c, c)$ i $s_i^1 = q$ si $h^1 \neq (c, c)$. La part "$s_i^1 = q$ si $h^1 \neq (c, c)$" expressa el càstig que i diu que farà si en l'etapa inicial no es juga [c, c]. El problema és que triar q a la segona etapa no és millor resposta a res. Per tant, l'estratègia anterior no forma part d'un equilibri perfecte en subjocs: la resposta d'i als subjocs als que s'arriba quan no s'ha jugat [c, c] a la primera etapa no maximitza el pagament d'i. La conclusió de tot plegat és que s'estan sostenint equilibris de Nash a un joc repetit sobre la base d'amenaces de càstig no creïbles. Aquesta feblesa en el sosteniment d'equilibris de Nash a jocs repetits suggereix la següent qüestió: hi ha alguna versió del teorema de factibilitat on "equilibri de Nash" es reemplaça per "equilibri perfecte en subjocs"?

Q8. Sigui G un joc simultani i s^* un equilibri de Nash (amb estratègies pures) de G. Sigui s la jugada d'un joc repetit basat en G tal que, a tota etapa t, s prescriu a tots els jugador jugar s^* a l'etapa t. Explica perquè s és un equilibri de Nash perfecte en subjocs del joc repetit (això prova que tot joc repetit té almenys un equilibri perfecte en subjocs si el joc original G té un equilibri de Nash amb estratègies pures).

Teorema de Friedman (1971) de factibilitat per als jocs repetits (versió d'equilibris perfectes en subjocs)
Sigui s un equilibri de Nash, amb estratègies pures, d'un joc simultani G. Sigui v un vector de pagaments factibles de G tal que, per a tot jugador i, $v_i > u_i(s)$*. Aleshores existeix un factor de descompte* $\delta^* \in (0, 1)$*, tal que, per a tot* $\delta \geq \delta^*$*, el joc repetit un nombre infinit de vegades basat en G té un equilibri perfecte en subjocs al qual correspon el vector de pagaments v.*

Aquest resultat es fonamenta en l'amenaça (creïble) de jugar l'equilibri de Nash s en cas d'alguna desviació: jugar l'equilibri és un càstig perquè els pagaments que genera l'equilibri s són inferiors per a tothom que els pagaments del vector v que es vol aconseguir; i l'amenaça de jugar-lo és creïble perquè, per Q8, això defineix un equilibri de Nash a totes les etapes de càstig.

Com a il·lustració, considerem el joc J1 de la Fig. 1. La jugada [n, n] és un equilibri de Nash de J1. El vector de pagaments (2, 2) és factible, ja que s'aconsegueix jugant [c, c]. Sigui J^∞ el joc repetit un nombre infinit de vegades basat en J1. Pel teorema anterior, podem trobar un δ tal que J^∞ té un equilibri perfecte en subjocs que genera el vector de pagaments (2, 2). Un possible tal equilibri resultaria de les estratègies següents. Per al jugador 1, l'estratègia s_1 satisfà, per a tota etapa $t \geq 0$: (i) $s_1^t = c$ si a h^t sempre s'ha jugat [c, c]; i (ii) en cas contrari, si τ és la primera etapa on no s’ha jugat [c, c], aleshores, per a tot $\tau > t$, $s_1^{\tau} = n$. Per al jugador 2, l’estratègia s_2 satisfà, per a tota etapa $t \geq 0$: (i) $s_2^t = c$ si a h^t sempre s’ha jugat [c, c]; i (ii) en cas contrari, si τ és la primera etapa on no s’ha jugat [c, c], aleshores, per a tot $\tau > t$, $s_2^{\tau} = n$.

Q9. Comprova que existeix algun $\delta \in (0, 1)$ que fa que (s_1, s_2) sigui un equilibri de Nash de J^{∞}.

Per a verificar que (s_1, s_2) és un equilibri perfecte en subjocs del joc J^{∞}, considerem una història qualsevol h^t. Si a h^t sempre s’ha jugat [c, c] aleshores les estratègies s_1 i s_2 prescriuen jugar, per a tot $\tau \geq t$, millors respostes (això és el que s’ha comprovat a Q9). Si a h^t no sempre s’ha jugat [c, c] aleshores les estratègies s_1 i s_2 prescriuen jugar, per a tot $\tau \geq t$, l’equilibri de Nash [n, n] de J1 i, per Q8, això constitueix un equilibri de Nash en el subjoc al que condueix la història h^t.

Q10. Determina si, al joc repetit un nombre infinit de cops J^{∞} basat en el joc de la Fig. 5, existeix algun $\delta \in (0, 1)$ i algun equilibri perfecte en subjocs de J^{∞} que produeix el vector de pagaments (8, 8). Fes el mateix per al joc J^{∞} basat en el joc de la Fig. 6, en relació amb els vectors (3, 1) i (1, 3).

		2		
		d	*e*	*f*
1	*a*	0 0	0 0	9 0
	b	0 0	1 1	0 0
	c	0 9	0 0	8 8

Fig. 5

		2		
		d	*e*	*f*
1	*a*	0 0	0 0	0 0
	b	0 0	3 1	1 3
	c	0 0	1 3	3 1

Fig. 6

Jocs repetits un nombre finit de vegades: teoremes de factibilitat amb equilibris de Nash

•1 *Sigui G un joc simultani l’únic equilibri de Nash (amb pures) del qual dóna a cada jugador el seu pagament de reserva. L’únic vector de pagaments que es pot obtenir a un equilibri de Nash a un joc repetit un nombre finit de vegades basat en G és el vector que dóna a cada jugador el seu pagament de reserva.*

•2 *Sigui G un joc simultani que té un equilibri de Nash que dóna a cada jugador un pagament superior al seu pagament de reserva. Aleshores tot vector de pagaments factibles i individualment racionals de G pot ser generat per un equilibri de Nash d’un joc repetit un nombre finit T de vegades, per a T suficientment gran i per a un factor de descompte* δ *suficientment proper a 1.*

El resultat **•1** estableix una important diferència entre jocs repetits un nombre finit i jocs repetits un nombre infinit de vegades: si l’únic equilibri de Nash del joc original dóna els pagaments de reserva (com succeeix al joc de la Fig. 1), la repetició del joc un nombre finit de cops no aporta res, perquè cap equilibri de Nash del joc repetit no pot donar a cap jugador un pagament superior al pagament de reserva. Com ja s’ha comprovat, si el joc de la Fig. 1 es repeteix un nombre infinit de vegades, és possible obtenir el pagament (2, 2) com a resultat d’un equilibri de Nash. En canvi, per **•1**, no hi ha manera d’obtenir aquest pagament a un equilibri si el joc es repeteix un nombre finit de cops.

El resultat •**2** recupera les possibilitats d'incrementar els pagaments d'un equilibri amb els jocs repetits. L'exemple basat en el joc de la Fig. 3 a la pàg. 6 il·lustra aquest resultat. Per la perfecció en subjocs, a l'última etapa del joc s'ha de jugar un equilibri de Nash del joc original. Per a incentivar als jugadors a jugar estratègies que no constitueixen un equilibri de Nash del joc original a períodes anteriors cal tenir la possibilitat de construir una amenaça que porti com a càstig rebre un pagament inferior al de l'equilibri de Nash del joc original. Això no és possible al joc de la Fig. 1, perquè l'únic equilibri de Nash del joc de la Fig. 1 dóna als jugadors el seu pagament de reserva, que és el pitjor pagament que poden obtenir mitjançant càstigs. Al joc de la Fig. 3, l'alternativa q possibilita el càstig necessari per a induir a etapes prèvies a jugar c. Novament, el problema és que implementar el càstig requereix seleccionar opcions que no formen part d'un equilibri perfecte en subjocs: al cas de la Fig. 3, jugar q no és part d'un equilibri perfecte en subjocs a cap etapa del joc repetit.

Jocs repetits un nombre finit de vegades: teoremes de factibilitat amb equilibris perfectes en subjocs

•**3** *Sigui G un joc simultani que té un únic equilibri de Nash (amb estratègies pures). Aleshores tot joc repetit un nombre finit de vegades basat en G té un únic equilibri perfecte en subjocs, el qual genera com a pagaments, a cada etapa del joc, els pagaments de l'únic equilibri de Nash de G.*

•**4** *Sigui G un joc simultani que té dos equilibris de Nash (amb estratègies pures), s i s', tals que el primer equilibri atribueix a cada jugador un pagament superior al que atribueix el segon. Aleshores hi ha* δ *i t tals que tot vector de pagaments que proporciona a cada jugador més que l'equilibri s pot ser obtingut a cadascun dels t primers períodes mitjançant un equilibri perfecte en subjocs d'un joc repetit un nombre finit T(t) de vegades basat en G.*

El resultat •**3** torna a evidenciar les limitacions que imposa repetir el joc només un nombre finit de vegades. La demostració del resultat és per <u>inducció cap enrere</u>. Al període final s'ha de jugar algun equilibri de Nash del joc original G. Però com només n'hi ha un, és aquest el que s'ha de jugar. A aquesta etapa, doncs, els jugadors reben els pagaments de l'únic equilibri de Nash s^* de G. Raonant inductivament, triem un període t anterior a l'últim i suposem que a tot període $\tau > t$ els jugadors juguen s^*. Això fa que les desviacions al període τ respecte de s^* no puguin ser castigades a períodes posteriors, perquè a tals períodes (per la hipòtesi inductiva) tothom juga s^*. Com a resulat, al període τ tothom ha de fer una millor resposta al que fan els altres, la qual cosa implica jugar un equilibri de G al període τ. Atès que s^* és l'únic equilibri de G, s^* es juga també al període τ i els pagaments que resulten a τ són els que corresponen a s^*.

El resultat •**4** presenta novament la part positiva de la repetició finita d'un joc. El joc de la Fig. 7 permet il·lustrar-lo. Aquest joc té dos equilibris de Nash amb estratègies pures: $[b, e]$ i $[c, f]$. El vector de pagaments (4, 4) dóna a tos dos jugadors més que qualsevol dels dos equilibris. Suposem que $T = 2$, $t = 1$ i $\delta = 4/5$. Considerem les estratègies s_1 i s_2 al joc repetit tals que: (i) $s_1^0 = a$ i $s_2^0 = d$; (ii) $s_1^1 = b$ si $h^1 = (a, d)$ i $s_1^1 = c$ si $h^1 \neq (a, d)$; i (iii) $s_2^1 = e$ si $h^1 = (a, d)$ i $s_2^1 = f$ si $h^1 \neq (a, d)$. Verifiquem que (s_1, s_2) és un equilibri perfecte en subjocs del joc repetit dos cops basat en el joc de la Fig. 7 i que a l'etapa 1 es genera el vector de pagaments (4, 4).

Comencem pel jugador 1. La millor alternativa a l'estratègia s_1 consisteix en triar b a l'etapa 1 i triar c a l'etapa 2. El pagament resultant per al jugador 1 és $(1/(1 + \delta))\cdot(u_1(b, d) + \delta\cdot u_1(c, f)) = \frac{5}{9}\cdot(5 + \frac{4}{5}) = \frac{29}{9}$. El pagament resultant per al jugador 1 seguint s_1 és $(1/(1 + \delta))\cdot(u_1(a, d) + \delta\cdot u_1(b, e)) = \frac{5}{9}\cdot(4 + 3\cdot\frac{4}{5}) = \frac{32}{9}$. Conclusió: 1 no té incentiu a jugar diferent d's_1 a cap subjoc.

Q11. Verifica que el jugador 2 no té incentiu a jugar diferent d's_2 a cap subjoc del joc repetit.

Atès que ni 1 ni 2 no tenen incentius a jugar una jugada diferent d'(s_1, s_2), a la primera etapa es juga $[a, d]$, que genera el vector de pagaments (4, 4) a la primera etapa.

		2 *d*	**2** *e*	**2** *f*
	a	4 4	1 5	0 2
1	*b*	5 1	3 3	0 0
	c	2 0	0 0	1 1

Q12. Pot aplicar-se el resultat **•4** al joc de la Fig. 5 en relació amb el vector de pagaments (8, 8)? Si és així, indica valors de δ, t i T, i l'equilibri perfecte en subjocs del joc repetit, que possibiliten l'obtenció de (8, 8) a cadascun de les t primeres etapes.

Fig. 7. Un joc d'Eichberger (1993, p. 227)

Extensions

<u>Si els jugadors poden randomitzar, poden obtenir-se més vectors de pagaments</u>. Per exemple, considerem el joc de la Fig. 1. La Fig. 8 mostra els 4 vectors de pagaments que es poden obtenir jugant estratègies pures: $A = (2, 2)$, $B = (0, 3)$, $C = (3, 0)$ i $D = (1, 1)$. Atès que $r_1 = r_2 = 1$, els vectors que hi ha per damunt de la recta R i a la dreta de la recta S són els vectors de pagaments individualment racionals. La intersecció d'aquest conjunt de vectors amb els vectors del joc dóna els vectors de pagaments factibles i individualment racionals: només el vector A.

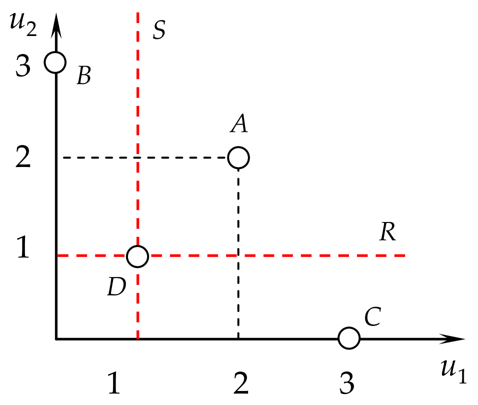

Fig. 8

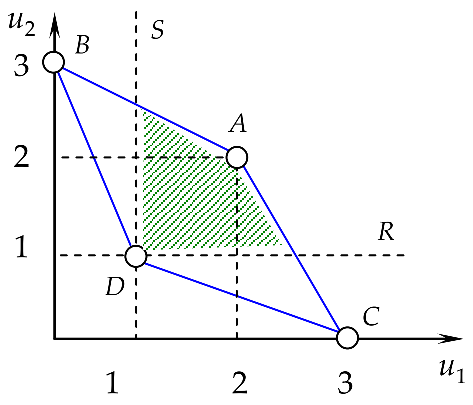

Fig. 9

En canvi, si els jugadors poden randomitzar (possiblement, de manera <u>correlacionada</u>), els vectors de pagaments factibles són aquells a l'embolcall convex dels punts A, B, C i D, que és l'àrea del polígon amb vèrtexs A, B, C i D de la Fig. 9. Els vectors de pagaments individualment racionals són a la dreta de la recta S i damunt la recta R. La intersecció d'aquest conjunt de vectors amb l'interior del polígon dóna el conjunt F de vectors de pagaments factibles i individualment racionals. El conjunt F es mostra ombrejat a la Fig. 9 i representa els possibles pagaments de jugar un joc repetit on els jugadors poden randomitzar (correlacionadament).

Els resultats anteriors són vàlids per a aquest conjunt F expandit amb la condició que la randomització que fan els jugadors sigui pública, perquè si no s'observés la randomització d'un jugador no es podria determinar si el jugador es desvia o no. Per exemple, suposem que un jugador i expecta que un jugador j triï a amb probabilitat ½ i b amb probabilitat ½. Aleshores, si i observa el resultat de la randomització però no la randomització mateixa, i no podria distingir l'estratègia mixta anterior de l'estratègia mixta on a es juga amb probabilitat ⅓ i b amb probabilitat ⅔. La raó és que el resultat de la randomització, a tots dos casos, comporta triar a o b, i observar que es tria a o es tria b no permet determinar amb quina probabilitat s'han triat. Els teoremes de factibilitat amb estratègies mixtes s'expliquen a Vega-Redondo (2003) i als manuals de Myerson (1991, cap. 7) i de Fudenberg i Tirole (1991, cap. 5) citats a epígrafs anteriors.

Q13. Considera el model de Cournot amb funció de demanda de mercat $p = 14 - q$ i amb empreses idèntiques que tenen un cost fix igual a zero i cost marginal constant igual a 2. Imagina que les empreses juguen indefinidament un joc on les accions són quantitats i els pagaments són beneficis. Quin és el pagament de reserva de cada empresa? Hi ha algun equilibri de Nash del joc repetit que genera el pagament on cada jugador rep la meitat dels beneficis de la solució de monopoli? Hi ha algun equilibri perfecte en subjocs que generi aquests pagaments? Hi ha algun equilibri de Nash del joc repetit que genera el pagament on un jugador rep un terç dels beneficis de la solució de monopoli i l'altre rep dos terços?

Q14. Kreps (1990, pp. 531–35). Un dels fenòmens que permeten analitzar els jocs repetits és l'existència de la reputació. Aquest exercici il·lustra com. Un monopolista ven un producte, que pot fabricar d'alta o de baixa qualitat. La funció de demanda del producte d'alta qualitat és $p = 10 - q$; la de baixa, $p = 4 - q$. El cost marginal d'una unitat de producte d'alta qualitat és 2; el de baixa, 1. Els consumidors no poden distingir la qualitat abans de comprar: només després. (i) Representa aquesta situació com a joc seqüencial (on els consumidors són representats per un únic jugador). (ii) Determina els equilibris seqüencials del joc [comprova que el millor per al monopolista és produir la qualitat baixa i, per tant, fixar $p = 2'5$]. (iii) Suposem que el joc es repeteix i que el monopolista tracta de maximitzar el benefici descomptat aplicant el factor de descompte δ. (a) Comprova que és un equilibri del joc repetit que el monopolista faci el que feia abans. (b) Imaginem que els consumidors assumeixen que el producte és d'alta qualitat als tres períodes inicials i, per a $t \geq 4$, continuen assumint-ho si el producte va ser d'alta qualitat als 3 períodes anteriors al t. Verifica que produir sempre l'alta qualitat a preu $p = 6$ és un equilibri del joc (que es basa en el fet que el monopolista s'ha fet una reputació de produir l'alta qualitat).

Bibliografia

- Eichberger, Jürgen (1993): *Game Theory for Economists*. Academic Press: San Diego, capítol 8.
- Friedman, James W. (1971): "A non-cooperative equilibrium for supergames", *Review of Economic Studies* 38, 1–12. http://www.restud.com/
- Ratliff, Jim (1997): Graduate-Level Course in Game Theory, capítol 5. http://www.virtualperfection.com/gametheory/
- Kreps, David M. (1990): *A Course in Microeconomic Theory*. Harvester Wheatsheaf: Nova York, capítol 14. [330.101.542 Kre]
- Vega-Redondo, Fernando (2003): *Economics and the Theory of Games*. Cambridge University Press: Cambridge, UK, capítol 8. [658.012 Veg]