El mecanisme de Varian

Una d'empreses contaminants

La producció d'una empresa competitiva genera una externalitat en forma de contaminació acústica. Aquesta contaminació afecta negativament a un individu que viu prop de l'empresa. Quan l'empresa produeix la quantitat q del bé, el seu cost (monetari) total és $c(q)$ i el cost (monetari) que fa recaure sobre l'individu (en forma d'externalitat negativa) és $e(q)$. El valor $e(q)$ representaria el <u>diner que caldria donar a l'individu per a compensar-lo del perjudici que li causa l'activitat de l'empresa</u>. El problema que causa l'externalitat és que, a l'hora de triar el volum de producció q, l'empresa no està obligada a tenir en compte el perjudici que causa a l'individu. La solució al problema passa per incentivar l'empresa a fer-ho.

Volum de producció Paretoeficient

Suposem que les funcions c i e prenen valors positius i són tals que les seves derivades primera i segona també prenen valors positius (això passa, per exemple, si c i e són funcions creixents i convexes). L'empresa tria q per a maximitzar la seva funció de beneficis

$$\pi(q) = pq - c(q)$$

on p és el preu del bé (que l'empresa pren com a donat). Per a simplificar, suposem que la funció d'utilitat de l'individu és

$$u(q) = -e(q).$$

El volum de producció Paretoeficient q^e s'obté quan l'empresa internalitza tots els costs que genera. En tal cas, l'empresa triaria q per a maximitzar

$$\pi^e(q) = pq - c(q) - e(q).$$

Per tant, q^e és solució de l'equació $p - c'(q) - e'(q) = 0$, on c' és la derivada de c i e' és la derivada d'e. Així que q^e soluciona (1).

$$p = c'(q) + e'(q) \tag{1}$$

Un exemple numèric

Sigui $p = 48$ i, per a $q \geq 0$, $c(q) = 10 + 2q^2$ i $e(q) = q^2$. Si no tingués en compte l'externalitat, l'empresa triaria q per a maximitzar $\pi(q) = 48q - (10 + 2q^2)$. La condició de primer ordre per a maximitzar $\pi(q)$ estableix que la derivada $\pi'(q)$ de $\pi(q)$ sigui 0. Atès que $\pi'(q) = 48 - 4q$, l'empresa produiria $q = 12$. Aquest volum de producció genera una utilitat per a l'individu igual a $-e(12) = -144$ i un benefici $\pi(12) = 48 \cdot 12 - (10 + 2 \cdot 12^2) = 278$ per a l'empresa.

El volum de producció $q = 12$ no és Paretoeficient perquè l'individu podria pagar 10 a l'empresa per a què aquesta reduís la seva producció una unitat i el resultat seria que tothom guanyaria. Si l'empresa produeix $q = 11$ i rep 10 de l'individu, el benefici de l'empresa seria $\pi(11) + 10 = 48 \cdot 11 - (10 + 2 \cdot 11^2) = 286$, superior a $\pi(12) = 278$. I si l'empresa produeix $q = 11$ i l'individu paga 10, la utilitat de l'individu seria $-e(11) - 10 = -121 - 10 = -131$, superior a $u(12) = -144$.

El volum de producció Paretoeficient q^e s'obtindria de maximitzar la suma de beneficis i utilitat: $\pi(q) - e(q) = 48q - (10 + 2q^2) - q^2 = -3q^2 + 48q - 10$. De la condició de primer ordre $-6q + 48 = 0$ resulta $q^e = 8$. Amb aquest valor, cap compensació que l'individu doni a l'empresa per a reduir la producció no permet que, simultàniament, l'empresa augmenti el seu benefici i l'individu redueixi la seva desutilitat.

Q1. Imagina que, amb l'empresa produint $q = 8$, l'individu fa un pagament $t > 0$ a l'empresa per a què redueixi la producció en $\varepsilon > 0$ unitats. Verifica que, per a tot parell (t, ε), no és possible que $\pi(8 - \varepsilon) + t > \pi(8)$ i, a la vegada, $-e(8 - \varepsilon) - t > -e(8)$. [Comprova que la primera desigualtat requereix que $t > 16\varepsilon + 2\varepsilon^2$ i que la segona exigeix $t < 16\varepsilon - \varepsilon^2$.]

Implementació del volum de producció Paretoeficient
Partint de la base que no es pot forçar la voluntat de l'empresa per a què decideixi produir el volum de producció Paretoeficient q^e, de quina forma pot incentivar-se a l'empresa per a què, voluntàriament, vulgui produir q^e?

Una autoritat pública que tingués la capacitat de fixar imposts ho podria aconseguir establint una taxa impositiva (impost piguouvià) $\tau = e'(q^e)$. Això significa que l'empresa ha de pagar, per cada unitat produïda, el cost marginal $e'(q^e) = 2 \cdot q^e = 2 \cdot 8 = 16$ que el volum de producció Paretoeficient fa recaure sobre l'individu. Amb aquest impost, l'empresa maximitzaria

$$\pi^\tau(q) = pq - c(q) - \tau \cdot q.$$

El volum q^* que soluciona el problema anterior s'obté resolent l'equació $p - c'(q) - \tau = 0$. Per tant, q^* satisfà $p = c'(q^*) + \tau$. Però, per definició, $\tau = e'(q^e)$. Això implica que la solució q^* que troba l'empresa satisfà

$$p = c'(q^*) + e'(q^e). \tag{2}$$

Per (1) se sap que $q^* = q^e$ és solució de (2). Atès que les hipòtesis sobre c garanteixen que la solució de (2) és única, s'ha de tenir que $q^* = q^e$. Així doncs, amb la taxa $\tau = e'(q^e)$, l'empresa voluntàriament decideix produir el volum de producció Paretoeficient q^e.

El problema de tot plegat és que l'autoritat no tens mitjans per a saber quin valor és $e'(q^e)$. D'una banda, l'autoritat necessita saber quina funció és e (o, almenys, quina és la seva derivada e'). D'una altra, també necessita saber quina funció és c (o, almenys, quina és la seva derivada c'), perquè si no l'autoritat no té manera de calcular q^e. De fet, l'autoritat ha de conèixer tots els components d'(1) per a poder esbrinar q^e.

El mecanisme ingenu basat en demanar aquesta informació als agents és un mecanisme manipulable. Per exemple, suposem que l'empresa revela la seva autèntica funció de cost c però que l'individu declara $\hat{e}(q) = 2q^2$ en comptes de la funció autèntica $e(q) = q^2$. En tal cas, el volum de producció Paretoeficient que calcularia l'autoritat seria $q = 6$.

Q2. Comprova que $q^* = 6$ és el volum de producció Paretoeficient si $p = 48$ i, per a $q \geq 0$, $c(q) = 10 + 2q^2$ i $e(q) = 2q^2$. Comprova que, si l'empresa paga $\tau = \hat{e}'(q^*)$ per unitat produïda, produeix $q^* = 6$.

Amb $q = 6$ l'autèntic cost que pateix l'individu és $-e(6) = -36$. Amb l'autèntic nivell de producció Paretoeficient $q^e = 8$, el cost que suportava l'individu era $-e(8) = -64$. Conclusió: l'individu té incentiu a revelar informació falsa sobre el perjudici que li representa la producció de l'empresa.

Q3. Per què, amb $p = 48$, $c(q) = 10 + 2q^2$ i $e(q) = 2q^2$, $q = 6$ no és Paretoeficient?

El mecanisme de compensació de Varian

El mecanisme proposat per Hal Varian (1994) es basa en la transmissió d'informació de l'empresa i l'individu a una autoritat reguladora (el regulador) i aconsegueix que l'empresa produeixi el volum de producció Paretoeficient. El mecanisme s'articula en dues etapes.

• Etapa 1a: anuncis. L'empresa comunica al regulador un valor t_e i, simultàniament, l'individu comunica al regulador un valor t_i. Una intepretació és que t_e representa el valor de l'impost τ que l'empresa diu que hauria de pagar per unitat produïda i t_i representa el valor de τ que l'individu diu que l'empresa hauria de pagar.

• Etapa 1b: pagaments i cobraments. El regulador comunica a empresa i individu el següent. Primer, que, per a un cert paràmetre $\alpha > 0$ arbitràriament escollit pel regulador, si l'empresa produeix la quantitat q aleshores haurà de pagar al regulador l'import $t_i \cdot q + \alpha(t_e - t_i)^2$. Per tant, l'empresa maximitza la nova funció de beneficis

$$\Pi(q) = pq - c(q) - t_i \cdot q - \alpha(t_e - t_i)^2. \tag{3}$$

I segon, que si l'empresa produeix la quantitat q, el regulador pagarà a l'individu l'import $t_e \cdot q$, de forma que la utilitat neta de l'individu passa a ser

$$U(q) = t_e \cdot q - e(q). \tag{4}$$

Els efectes dels anuncis t_i i t_e són creuats: el valor t_e que selecciona l'empresa afecta (positivament) l'individu i el valor t_i que selecciona l'individu afecta (negativament) l'empresa. El terme $-t_i \cdot q$ a (3) s'interpreta com el pagament que l'empresa ha de fer al regulador per causar l'externalitat negativa. El terme $-t_e \cdot q$ a (4) s'interpreta com la compensació que l'individu rep del regulador per patir l'externalitat negativa.

Així, segons el mecanisme, l'empresa ha de pagar segons el cost marginal t_i de l'externalitat que declara l'individu, en tant que l'individu ha de cobrar segons el cost marginal t_e de l'externalitat que declara l'empresa. A més, l'empresa també és penalitzada a pagar en funció de la discrepància entre els dos valors declarats: com més se separa el valor que declara l'empresa del que declara l'individu, més gran és el pagament $\alpha(t_e - t_i)^2$ que ha de fer l'empresa.

• Etapa 2: decisió. L'empresa decideix quina quantitat q produeix.

Solució del mecanisme de compensació de Varian

El mecanisme de Varian té un únic equilibri perfecte en subjocs. En aquest equilibri, l'empresa produeix la quantitat Paretoeficient $q = q^e$ i els anuncis d'empresa i individu són $t_e = t_i = e'(q^e)$.

Resolguem el mecanisme de Varian per inducció cap enrere. A l'etapa final (etapa 2), l'empresa decideix el volum de producció q sabent els valors de p, α, t_e i t_i. A l'etapa inicial (etapa 1a), l'empresa i l'individu decideixen quins valors t_e i t_i comunicar al regulador (no es considera com a etapa de decisió per a l'empresa i l'individu l'etapa 1b perquè a l'etapa 1b només actua el regulador i ho fa de forma predeterminada, informant dels valors d'α, t_e i t_i). A l'etapa final, l'empresa maximitza (3), donats p, t_e i t_i. Per tant, l'empresa tria q que resol l'equació (5).

$$p - c'(q) - t_i = 0 \tag{5}$$

Fixat el valor de p, l'equació (5) defineix implícitament una relació entre q i t_i. Sigui $q = f(t_i)$ aquesta relació.

Per exemple, considerem el cas on $p = 48$ i, per a $q \geq 0$, $c(q) = 10 + 2q^2$ i $e(q) = q^2$. La funció de beneficis $\Pi(q)$ resultant del mecanisme és $\Pi(q) = 48q - 10 - 2q^2 - t_i \cdot q - \alpha(t_e - t_i)^2$. Prenent la derivada i igualant a zero, s'obté $48 - 4q - t_i = 0$. Aïllant q, resulta $q = 12 - t_i/4$. Per tant, la funció $f(t_i)$ en aquest cas és $f(t_i) = 12 - t_i/4$. La derivada d'$f(t_i)$ és $f'(t_i) = -\frac{1}{4}$.

No és casual que la derivada $f'(t_i)$ d'$f(t_i)$ sigui negativa: donada l'equació $p - c'(q) - t_i = 0$, si t_i augmenta, per a mantenir la igualtat, cal que $c'(q)$ disminueixi. Per la hipòtesi que $c(q)$ és convexa, $c'(q)$ és una funció creixent (ja que la derivada segona $c''(q)$ és positiva). Que $c'(q)$ sigui una funció creixent significa que q i $c'(q)$ es mouen en la mateixa direcció. En conseqüència, per a què $c'(q)$ disminueixi, q ha de disminuir. Conclusió: t_i augmenta i q disminueix, motiu pel qual la relació entre q i t_i que expressa l'equació $q = f(t_i)$ és inversa i això fa que $f'(t_i) < 0$. Per tant, com més alt sigui el valor t_i declarat per l'individu, menys produirà l'empresa.

Sabent com reaccionarà l'empresa a l'etapa final (quin volum de producció triarà), passem a l'etapa inicial. Considerem primer la decisió de triar t_e per part de l'empresa. El terme t_e apareix a la funció de beneficis (3) de l'empresa com a part de $-\alpha(t_e - t_i)^2$. Aquesta és l'única influència directa de l'anunci de l'empresa sobre la seva pròpia funció de beneficis. Per a minimitzar l'impacte negatiu d'aquest terme, l'empresa voldrà triar t_e igual a t_i, cas en què es faria zero la penalització $-\alpha(t_e - t_i)^2$. En vista d'això, a tot equilibri perfecte en subjocs s'ha de tenir (6).

$$t_e = t_i \tag{6}$$

Passem finalment a l'individu. L'objectiu de l'individu és maximitzar (4). Però l'individu no controla q sinó t_i. Amb tot, l'individu sap que la seva elecció de t_i afecta la decisió de producció de l'empresa segons l'equació $q = f(t_i)$ determinada a l'etapa final. Així, triant t_i, l'individu indueix l'empresa a triar q. Derivant (4) respecte de t_i s'obté (aplicant la regla de la cadena)

$$\frac{\partial U}{\partial t_i} = \frac{\partial U}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t_i} = \frac{\partial (t_e q)}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t_i} - \frac{\partial e}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t_i} = \left(\frac{\partial (t_e q)}{\partial q} - \frac{\partial e}{\partial q}\right)\frac{\partial q}{\partial t_i} = [t_e - e'(q)] \cdot f'(t_i),$$

on s'ha fet servir el fet que $q = f(t_i)$. Igualant a 0 la derivada anterior, s'obté $[t_e - e'(q)] \cdot f'(t_i) = 0$. Tal i com s'ha argumentat a l'etapa final, $f'(t_i) < 0$. Com a resultat, $t_e - e'(q) = 0$ i, d'aquí, s'arriba a (7).

$$t_e = e'(q) \tag{7}$$

Combinant (5), (6) i (7), resulta $p - c'(q) - e'(q) = 0$, que és, justament, la condició que determina el volum de producció Paretoeficient q^e.

A l'exemple amb $p = 48$, $c(q) = 10 + 2q^2$ i $e(q) = q^2$, ja s'ha justificat que $q = f(t_i) = 12 - t_i/4$. La funció d'utilitat $U(q) = t_e \cdot q - e(q)$ de l'individu és $U = t_e \cdot q - q^2$. Reemplaçant q per $12 - t_i/4$, s'obté la funció $U = t_e(12 - t_i/4) - (12 - t_i/4)^2$. Per a maximitzar respecte de t_i, derivem i igualem a zero. El resultat és $- t_e/4 - 2(12 - t_i/4)(-¼) = 0$; això és, $-2t_e - t_i + 48 = 0$. Aplicant (6), $-3t_i + 48 = 0$, d'on s'obté $t_i = 16$. Justament $e'(q^e) = 2 \cdot q^e = 2 \cdot 8 = 16$, de forma que $t_i = e'(q^e)$: l'individu declara el cost marginal de l'externalitat quan l'empresa produeix el volum de producció Paretoeficient. Donat $t_i = 16$ i donat $q = f(t_i) = 12 - t_i/4$, l'empresa produeix $q = 12 - 16/4 = 8$: el volum de producció Paretoeficient.

[Una altra manera de maximitzar $U = t_e \cdot q - q^2$ sense reemplaçar q per $12 - t_i/4$ es basa en aplicar la regla de la cadena: $t_e \cdot f'(t_i) - 2q \cdot f'(t_i) = (t_e - 2q) \cdot f'(t_i) = 0$. Atès que $f'(t_i) = -¼$, el que toca és $t_e = 2q$. Amb $q = 12 - t_i/4$, $t_e = 24 - t_i/2$. Amb $t_e = t_i$, s'arriba a $t_i = 24 - t_i/2$. Aïllant t_i, $3t_i = 48$ i $t_i = 16$.]

Per a justificar el resultat del mecanisme de Varian suposem que l'empresa expecta que l'individu declari un valor t_i "gran" (superior a $e'(q^e)$). Això aparentment pot tenir sentit perquè l'individu sap que, per a minimitzar la penalització $-\alpha(t_e - t_i)^2$, a l'empresa l'interessa declarar el mateix valor que l'individu i, com més alt sigui el valor t_i que declari l'empresa, més compensació $t_i \cdot q$ rebrà l'individu. Com més alt sigui t_i, més se sobrecompensa a l'individu i, en tal cas, més interessat estarà l'individu en què l'empresa produeixi més. Però l'única manera d'incentivar l'empresa a produir més és mitjançant un valor t_i "petit". Això contradiu l'expectativa de l'empresa i, en conseqüència, no pot fonamentar un equilibri perfecte en subjocs (perquè en un equilibri les creences sobre el que fan els rivals han de ser correctes).

Q4. Seria consistent amb un equilibri perfecte en subjocs que l'empresa expectés un valor t_i "petit" (inferior a $e'(q^e)$)?

Q5. La funció de cost de producció d'un bé d'una empresa competitiva és $c(q) = q^2$. La producció del bé crea una externalitat negativa sobre un individu segons la funció de cost extern $e(q) = q^2/2$. (i) Determina el volum de producció Paretoeficient q^e del bé. (ii) Quina taxa impositiva per unitat produïda feta recaure sobre l'empresa faria que l'empresa produís q^e? (iii) Explica com el mecanisme de Varian permet assolir q^e. (iv) Indica quins anuncis t_i i t_e fan l'individu i l'empresa a l'etapa inicial del mecanisme de Varian a un equilibri perfecte en subjocs. (v) Quin és el benefici de l'empresa quan s'aplica el mecanisme de Varian amb $\alpha = 1$?

Bibliografia

- Varian, Hal R. (1994): "A solution to the problem of externalities when agents are well-informed", *American Economic Review* 84, 1278–1293.