Exemple de càlcul d'equilibris baiesians

El següent joc representa la situació on el jugador 2 és només d'un tipus (tipus t_2) i el jugador 1 és de dos tipus, t_{11} i t_{12}. El tipus t_{11} juga a la matriu de l'esquerra i el tipus t_{12} juga a la matriu de l'esquerra. Per tant, hi ha dues combinacions de tipus: la combinació (t_{11}, t_2) on l'únic tipus del jugador 2 juga amb el tipus 1 del jugador 1 i la combinació (t_{12}, t_2) on l'únic tipus del jugador 2 juga amb el tipus 2 del jugador 1. La probabilitat $\mu(t_{11}, t_2)$ de la primera combinació és p = ½ i la probabilitat $\mu(t_{12}, t_2)$ de la segona combinació és $1 - p$ = ½.

		2	
		c	*d*
1	*a*	2 1	0 0
	b	0 0	1 2

p = ½

		2	
		c	*d*
1	*a*	2 0	0 2
	b	0 1	1 0

$1 - p$ = ½

Tot i que el jugador 2 ignora el tipus de jugador 1 amb qui juga (2 no sap si juga a la matriu dreta o esquerra), pot emprar μ per a determinar la probabilitat condicionada d'enfrontar-se a cada tipus. Així, $\mu(t_{11} \mid t_2) = \mu(t_{11}, t_2)/(\mu(t_{11}, t_2) + \mu(t_{12}, t_2)) = p \,/\, (p + (1 - p)) = p$ = ½ és la probabilitat que 2 assigna al fet d'enfrontar-se al t_{11} del jugador 1 (això és, la probabilitat de jugar a la matriu esquerra, que és on juga el tipus t_{11}) i $\mu(t_{12} \mid t_2) = \mu(t_{12}, t_2)/(\mu(t_{11}, t_2) + \mu(t_{12}, t_2)) = 1 - p$ = ½ és la probabilitat que 2 assigna al fet d'enfrontar-se al t_{12} del jugador 1 (que coincideix amb la probabilitat de jugar a la matriu dreta, que és on juga el tipus t_{12}). [Exercici : torna a calcular els equilibris baiesians si p = ⅓.]

No hi ha una única o millor manera de calcular els equilibris baiesians d'un joc. En el joc anterior, podem començar pel jugador menys informat (el jugador 2) i considerar els tres tipus possibles d'equilibris definits pels casos 1, 2 i 3, on c representa la probabilitat amb què es tria c, a la probabilitat amb què el tipus t_{11} tria a (a la matriu esquerra) i a' la probabilitat amb què el tipus t_{12} tria a (a la matriu dreta).

• Equilibris on el jugador 2 tria $c = 1$. Si $c = 1$, el tipus t_{11} tria $a = 1$ i el tipus t_{12} tria $a' = 1$. Ara comprovem si $c = 1$ és millor resposta a $a = a' = 1$. Donat $a = a' = 1$, el pagament esperat per a 2 triant c és ½·1 + ½·0 = ½, en tant que el pagament esperat per a 2 triant d és ½·0 + ½·2 = 1. Així que $c = 1$ no és millor resposta a $a = a' = 1$. Conclusió: no hi ha cap equilibri baiesià on $c = 1$.

• Equilibris on el jugador 2 tria $c = 0$. En aquest cas, les millors respostes dels dos tipus del jugador 1 són $a = a' = 0$. Donat $a = a' = 0$, $c = 0$ és millor resposta: el pagament esperat per a 2 triant d és ½·2 + ½·0 = 1, que és superior al pagament esperat ½·0 + ½·1 = ½ per a 2 triant c. Com a resultat, el vector d'estratègies σ tal que $\sigma_{t_{11}}(a) = \sigma_{t_{12}}(a') = \sigma_{t_2}(c) = 0$ és un equilibri baiesià.

• Equilibris on el jugador 2 tria $c \in (0, 1)$. Això requereix que el pagament esperat de 2 quan tria c sigui igual al seu pagament esperat quan tria d. Per tant,

$$½\cdot(1\cdot a + 0\cdot(1 - a)) + ½\cdot(0\cdot a' + 1\cdot(1 - a')) = ½\cdot(0\cdot a + 2\cdot(1 - a)) + ½\cdot(2\cdot a' + 0\cdot(1 - a')).$$

Això és, $½\cdot(a + 1 - a') = 1 - a + a'$. Aïllant a, s'arriba a

$$a = a' + ⅓. \tag{1}$$

L'equació (1) és la condició de randomització del jugador 2. Ara considerem el tipus t_{11} (podríem també considerar en el seu lloc el tipus t_{12}). El tipus t_{11} pot tenir tres tipus d'estratègies d'equilibri: $a = 0$, $a = 1$ i $a \in (0, 1)$.

• Cas 1: $a = 0$. Amb $a = 0$, (1) es transforma en $0 = a' + ⅓$, que no se satisfà mai quan $a' \in [0, 1]$. Així doncs, no hi ha cap equibri baiesià on el jugador 2 randomitza i $a = 0$.

• Cas 2: $a = 1$. Amb $a = 1$, (1) es transforma en $1 = a' + ⅓$, d'on resulta $a' = ⅔$. Aquest valor significa que el tipus t_{12} ha de randomitzar, la qual cosa requereix que el pagament esperat $2\cdot c + 0\cdot(1 - c)$ de triar a a la matriu dreta sigui igual al pagament esperat $0\cdot c + 1\cdot(1 - c)$ de triar b a la matriu dreta. Això equival a $2c = 1 - c$, d'on s'obté $c = ⅓$. Resta finalment comprovar que l'estratègia $a = 1$ que s'ha assumit que el tipus t_{11} seleccionava és millor resposta a l'estratègia $c = ⅓$ del jugador 2. Atès que la condició $c = ⅓$ que fa indiferent al tipus t_{12} és també la condició que fa indiferent al tipus t_{11}, $a = 1$ és millor resposta (tot i que no l'única) amb $c = ⅓$. En resum, σ tal que $\sigma_{t_{11}}(a) = 1$, $\sigma_{t_{12}}(a') = ⅔$ i $\sigma_{t_2}(c) = ⅓$ és un equilibri baiesià.

• Cas 3: $a \in (0, 1)$. Això vol dir que el tipus t_{11} ha d'estar indiferent entre a i b. La condició que causa aquesta indiferència és la mateixa que causa la indiferència en el tipus t_{12}: $c = ⅓$. Per a determinar què tria el tipus t_{12}, considerem les tres possibilitats $a' = 1$, $a' = 0$ i $a' \in (0, 1)$.

  • Cas 3a: $a' = 1$. Ara la condició (1) esdevé $a = 1 + ⅓$, que no és una condició vàlida. Per tant, no hi ha cap equilibri baiesià on 2 randomitza i el tipus t_{12} tria $a' = 1$.

  • Cas 3b: $a' = 0$. Ara la condició (1) esdevé $a = 0 + ⅓ = ⅓$. Atès que $c = ⅓$, resta per verificar que $a' = 0$ és millor resposta a $c = ⅓$. Però com $c = ⅓$ deixa al tipus t_{12} indiferent, qualsevol estratègia que triï (en particular, $a' = 0$) és millor resposta. Resumint, σ tal que $\sigma_{t_{11}}(a) = ⅓$, $\sigma_{t_{12}}(a') = 0$ i $\sigma_{t_2}(c) = ⅓$ és un equilibri baiesià.

  • Cas 3c: $a' \in (0, 1)$. En aquest cas, els dos tipus del jugador 1 randomitzen. La condició de tots dos per a estar disposats a randomitzar és la mateixa: $c = ⅓$,. Per (1), $a = a' + ⅓$. Atès que $a < 1$, s'ha de tenir que $a' + ⅓ < 1$. D'aquí s'arriba a la condició $a' < ⅔$. El conjunt d'equilibris baiesians resultant és el conjunt de vectors d'estratègies σ tals que $\sigma_{t_{11}}(a) = \sigma_{t_{12}}(a') + ⅓$, $0 < \sigma_{t_{12}}(a') < ⅔$ i $\sigma_{t_2}(c) = ⅓$ és un equilibri baiesià.

Recapitulant, s'han obtingut 4 tipus d'equilibris: (i) $a = a' = c = 0$; (ii) $a = 1$, $a' = ⅔$, $c = ⅓$; (iii) $a = ⅓$, $a' = 0$, $c = ⅓$; i (iv) $a = a' + ⅓$, $0 < a' < ⅔$, $c = ⅓$. Els tipus (ii), (iii) i (iv) es poden expressar amb una única condició: $a = a' + ⅓$, $0 \le a' \le ⅔$ i $c = ⅓$. Per tant, hi ha dos tipus d'equilibris baiesians: un amb estratègies pures, $a = a' = c = 0$ i l'altre amb mixtes, $a = a' + ⅓$, $0 \le a' \le ⅔$ i $c = ⅓$.