Reparto de bienes indivisibles (allocation of indivisible goods)

Elementos del modelo

N Conjunto finito $\{1, 2, \ldots, n\}$ de $n \geq 1$ individuos

X Conjunto finito de $n \geq 1$ objetos

L Conjunto de todas las preferencias (ordenaciones lineales) que se pueden definir sobre X

L^n Conjunto de perfiles de preferencias (atribución de una preferencia a cada una individuo)

P_i Designa la preferencia del individuo i en el perfil de preferencias $P = (P_1, P_2, \ldots, P_n)$. Para objetos a y b, y preferencia P_i, $a\ P_i\ b$ significa que, según la preferencia P_i, i prefiere a a b.

Asignación

Una asignación (de los objetos a los individuos) es una biyección $\alpha : N \to X$. La interpretación es que α: (i) asigna a cada individuo i un único objeto $\alpha(i) \in X$; y (ii) no asigna el mismo objeto a dos individuos diferentes, de modo que, para individuos i y $j \neq i$, se tiene que $\alpha(i) \neq \alpha(j)$.

A Conjunto de todas las asignaciones

Regla de asignación

Una regla de asignación es una función $f : L^n \to A$ que asocia una asignación con cada perfil de preferencias de los individuos. Una regla de asignación representa una forma de repartir los objetos entre los individuos que depende exclusivamente de las preferencias de los individuos sobre los objetos.

$f_i(P)$ Designa el objeto asignado al individuo i por la regla f cuando el perfil de preferencias es P

Ejemplo

Sea $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y $X = \{a, b, c, d\}$. Consideremos el siguiente perfil de preferencias

P_1	P_2	P_3	P_4
a	a	b	b
b	d	c	a
c	b	d	c
d	c	a	d

Fig. 1

en donde la columna P_i representa la preferencia del individuo $i \in N$. Una regla de asignación toma cada uno de los perfiles de preferencias posibles y establece cómo repartir los objetos de X entre los individuos. Por ejemplo, con $P = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ una regla de asignación f podría ser tal $f_1(P) = b$, $f_2(P) = d$, $f_3(P) = c$ y $f_4(P) = a$. Por tanto, $f(P) = (b, d, c, a)$, en donde (b, d, c, a) representa la asignación en la que 1 recibe b, 2 recibe d, 3 recibe c y 4 recibe a.

¿Es razonable la asignación (b, d, c, a) dadas las preferencias (P_1, P_2, P_3, P_4) de la Fig. 1? No lo parece, porque la asignación es susceptible de ser mejorada. De hecho, si 1 y 4 intercambiaran los objetos que les han sido asignados, se llegaría a la asignación (a, d, c, b). En el paso de la primera a esta segunda asignación, 1 y 4 mejoran (porque obtienen un objeto más preferido que el que tenían) y nadie empeora (porque los otros dos individuos, 2 y 3, mantienen sus objetos).

Asignación Paretoeficiente
Una asignación α es Paretoeficiente, dado un perfil de preferencias P, si no hay otra asignación β tal que: (i) para algun individuo i, $\beta(i)\ P_i\ \alpha(i)$; y (ii) para ningún individuo i, $\alpha(i)\ P_i\ \beta(i)$.

Para el perfil P de la Fig. 1, la asignación $\alpha = (b, d, c, a)$ no es Paretoeficiente, puesto que existe la asignación $\beta = (a, d, c, b)$ que satisface (i) y (ii) de la definición de Paretoeficiencia: algún individuo mejora en el paso de α a β (los individuos 1 y 4) y ninguno empeora (1 y 4 mejoran; 2 y 3 se mantienen igual).

Regla de asignación Paretoeficiente
Una regla de asignación f es Paretoeficiente si, para todo perfil de preferencias P, $f(P)$ es una asignación Paretoeficiente.

Supongamos que, para el perfil P de la Fig. 1, $f(P) = (a, d, c, b)$ y que $f(P_1, Q_2, P_3, P_4) = (b, a, c, d)$, en donde Q_2 es la preferencia *bacd* (*b* la opción más preferida, *a* la segunda más preferida…). Si éste fuera el caso y las preferencias se obtuvieran a partir de declaraciones que hacen los individuos, f sería una regla manipulable cuando P_2 es la preferencia auténtica de 2. La razón es que 2, declarando Q_2 en lugar de P_2, obtiene el objeto $f_2(P_1, Q_2, P_3, P_4) = a$, que 2 considera más preferido (de acuerdo con la preferencia P_2) que el objeto $f_2(P_1, P_2, P_3, P_4) = d$ que 2 consigue declarando la preferencia auténtica P_2. Esto hace que, cuando las preferencias de los otros individuos son P_1, P_3 y P_4, 2 tenga un incentivo a declarar Q_2 en lugar de P_2 en el caso en que P_2 es su preferencia auténtica. Una propiedad aparentemente deseable de una regla de asignación es que no dé incentivos a los individuos a revelar preferencias falsas.

Regla de asignación no manipulable
Una regla de asignación f es no manipulable (*strategy-proof*, a prueba de comportamientos estratégicos) si, para todo perfil de preferencias P, todo individuo $i \in N$ y toda preferencia $Q_i \in L$ de i, no se da el caso que $f_i(Q_i, P_{-i})\ P_i\ f_i(P_i, P_{-i})$, en donde P_{-i} representa las preferencias de los individuos diferentes de i. Así, f es manipulable si hay P, i y Q_i tales que $f_i(Q_i, P_{-i})\ P_i\ f_i\ (P_i, P_{-i})$.

La condición "$f_i(Q_i, P_{-i})\ P_i\ f_i(P_i, P_{-i})$" dice que el objeto $f_i(Q_i, P_{-i})$ que i recibe declarando la preferencia Q_i (siendo P_{-i} las preferencias de los otros individuos) es preferido por i, según la preferencia P_i (que es la que implícitamente se presume como verdadera), al objeto $f_i(P_i, P_{-i}) = f_i(P)$ que i recibe declarando la preferencia P_i (manteniéndose las preferencias P_{-i} de los demás). Cuando $f_i(Q_i, P_{-i})\ P_i\ f_i(P_i, P_{-i})$ ocurre, i tiene incentivo a revelar que su preferencia es Q_i cuando realmente es P_i. La no manipulabilidad establece que esto no puede ocurrir: i no debe obtener un objeto más preferido, según la preferencia que tenga P_i, diciendo que su preferencia es una Q_i distinta de P_i.

La no manipulabilidad es una propiedad cuyo cumplimiento es más difícil que verificar que el cumplimiento de la Paretoeficiencia. Para cada perfil, habría que comparar, para cada jugador, el resultado de revelar la preferencia de ese perfil con el resultado de revelar cualquier otra preferencia. Por ejemplo, para el perfil de la Fig. 1, habría que comprobar que no existe Q_1 tal que 1 prefiere $f_1(Q_1, P_2, P_3, P_4)$ a $f_1(P)$ cuando la preferencia de 1 es P_1; que no existe Q_2 tal que 2 prefiere $f_2(P_1, Q_2, P_3, P_4)$ a $f_2(P)$ cuando la preferencia de 2 es P_2; que no existe Q_3 tal que 3 prefiere $f_3(P_1, P_2, Q_3, P_4)$ a $f_3(P)$ cuando la preferencia de 3 es P_3; y que no existe Q_4 tal que 4 prefiere $f_4(P_1, P_2, P_3, Q_4)$ a $f_4(P)$ cuando la preferencia de 4 es P_4. Y esto sólo para el perfil P. Luego habría que hacer lo mismo para el resto de posibles perfiles…

Regla de asignación sin mandones

Una regla de asignación f no tiene mandones (es *nonbossy*) si, para todo perfil de preferencias P, todo individuo $i \in N$ y toda preferencia $Q_i \in L$ de i, $f(Q_i, P_{-i}) \neq f(P)$ implica $f_i(Q_i, P_{-i}) \neq f_i(P)$.

Un mandón es alguien que puede modificar lo que reciben los demás sin que él se vea afectado. La manera en que, en este modelo, alguien puede modificar lo que reciben los demás es cambiando su preferencia. Por tanto, partiendo de $f(P)$, $f(Q_i, P_{-i})$ es la nueva asignación que produce la regla cuando i cambia su preferencia de P_i a Q_i. Supongamos que $f(Q_i, P_{-i}) \neq f(P)$: el cambio de preferencia de i produce un cambio en la asignación de objetos. Si, en este caso, $f_i(Q_i, P_{-i}) = f_i(P)$ entonces i sería un mandón, porque manifestando que su preferencia es Q_i en lugar de P_i, i modificaría lo que algún otro individuo recibe sin que i mismo se vea afectado. Por tanto, un capricho de i podría alterar injustificadamente lo que reciben los demás.

La propiedad de ausencia de mandones requiere que lo anterior no sea posible: si un cambio en la preferencia de i modifica la asignación, entonces él también se verá afectado recibiendo un objeto diferente. La ausencia de mandones significa que si i es el único responsable de que se modifique lo que los demás reciben, entonces, como consecuencia, i también verá modificado lo que recibe: cambiar lo que reciben los demás tiene el coste de cambiar lo que uno recibe.

Permutaciones

Sea $\pi : X \to X$ una permutación (biyección) de los objetos. Intepretando X como los nombres de los objetos, el objeto con nombre x pasa, tras la permutación, a llamarse $\pi(x)$. Dada una asignación α, sea α^π la asignación obtenida a partir de α reemplazando, para todo objeto $x \in X$, x por $\pi(x)$. Dado un perfil de preferencias P, sea P^π el perfil de preferencias obtenido de P reemplazando, para todo objeto $x \in X$, x por $\pi(x)$.

Por ejemplo, sea π la permutación de $X = \{a, b, c, d\}$ tal que $\pi(a) = c$, $\pi(b) = a$, $\pi(c) = b$ y $\pi(d) = d$. Si α es la asignación (a, d, c, b) entonces $\alpha^\pi = (c, d, b, a)$. Y si P es el perfil de preferencias de la Fig. 1, entonces P^π es el perfil mostrado en la Fig. 2.

P_1^π	P_2^π	P_3^π	P_4^π
c	c	a	a
a	d	b	c
b	a	d	b
d	b	c	d

Fig. 2

Regla de asignación neutral

Una regla de asignación f es neutral si, para toda permutación $\pi : X \to X$ y perfil de preferencias P, $f(P^\pi) = f(P)^\pi$.

Por ejemplo, sea $f(P) = (c, d, b, a)$, con P siendo el perfil de la Fig. 1. Tomemos la permutación $\pi(a) = c$, $\pi(b) = a$, $\pi(c) = b$ y $\pi(d) = d$, en la que a pasa a ser c, b pasa a ser a, c pasa a ser b y d sigue siendo d. Para que f sea neutral, el único efecto de cambiar el nombre de los objetos en las preferencias (pasar de tener P a tener P^π) es cambiar el nombre de los objetos en la asignación asociada con P (pasar de la asignación $f(P)$ a la asignación $f(P)^\pi$). Por tanto, para que f sea neutral, $f(P^\pi)$ ha de obtenerse permutando (según π) los objetos en $f(P) = (c, d, b, a)$. Así que la neutralidad de f demanda que $f(P^\pi) = (b, d, a, c)$, que es $f(P)^\pi$.

La neutralidad significa que si cambiamos el nombre de los objetos en las preferencias entonces basta con cambiar el nombre en la asignación correspondiente a aquellas preferencias para tener la asignación correspondiente con las preferencias permutadas. La neutralidad expresa la idea que el cambio de nombre de los objetos no debe alterar la manera en que los objetos se asignan.

Regla de asignación jerárquica

Una regla de asignación f es jerárquica si existe una ordenación lineal $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ de los individuos tal que, para todo perfil de preferencias P: (i) el objeto x_1 que i_1 recibe en $f(P)$ es su objeto más preferido en X según su preferencia P_{i_1}; (ii) el objeto x_2 que i_2 recibe en $f(P)$ es su objeto más preferido, según su preferencia P_{i_2}, en el conjunto $X \setminus \{x_1\}$ de los objetos que deja libres el individuo i_1; (iii) el objeto que i_3 recibe en $f(P)$ es su objeto más preferido, según su preferencia P_{i_3}, en el conjunto $X \setminus \{x_1, x_2\}$ de los objetos que dejan libres los individuos i_1 i i_2; y así sucesivamente.

Una regla jerárquica representa el siguiente mecanismo de asignación. Hay una ordenación jerárquica $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ de los individuos (siempre la misma) que determina $f(P)$ del siguiente modo. Primero, i_1 escoge el objeto que más prefiere. De entre lo que i_1 deja, i_2 escoge lo que más prefiere. De entre lo que i_1 e i_2 dejan, i_3 escoge lo que más prefiere. Y, en general, de entre lo que los individuos que preceden a i_k en la jerarquía han dejado, i_k escoge lo que más prefiere. Y así hasta que i_n se tiene que quedar con lo que los otros $n - 1$ individuos que le preceden en la jerarquía le han dejado.

¿Cómo se determina la jerarquía? No hay nada en la regla que lo diga, por lo que la jerarquía es exógena: dada una jerarquía, construimos la regla jerárquica correspondiente. Por ello, fijados N y X, hay tantas reglas jearánquicas como ordenaciones lineales de los individuos en N.

Teorema de reglas jerárquicas (Lars-Gunnar Svensson, 1999). *Una regla de asignación que sea a la vez no manipulable, sin mandones y neutral es jerárquica.*

Asignación de objetos con derechos de propiedad

Introduzcamos en el modelo dos nuevos elementos. Primero, se permite que los individuos estén indiferentes entre los objetos. Y segundo, cada uno de los n objetos se encuentra previamente asignado a alguno de los n individuos en forma de dotación. Por tanto, cada individuo i es propietario de alguno de los objetos y de lo que se trata es de establecer qué asignaciones podrían obtenerse mediante el intercambio cuando el individuo i posee inicialmente el objeto w_i. Este modelo representa una economía con bienes indivisibles y se debe a Lloyd Shapley y Herbert Scarf (1974).

Asignaciones vetables fuertemente

Dado un perfil de preferencias P y un asignación inicial w de los objetos, se dice que la coalición $C \subseteq N$ puede <u>vetar fuertemente</u> la asignación α si existe otra asignación β tal que:

(i) el conjunto $\{x \in X$: para algún $i \in C$, $\beta(i) = x\}$ de los objetos que reciben los miembros de la coalición C en β coincide con el conjunto $\{x \in X$: para algún $i \in C$, $w_i = x\}$ de los objetos que tienen los miembros de C;

(ii) para todo $i \in C$, i prefiere $\beta(i)$ a $\alpha(i)$ según la preferencia P_i.

Conjunto $C(w)$ de asignaciones del núcleo

Dado un perfil de preferencias P y un asignación inicial w, el conjunto $C(w)$ de asignaciones del <u>núcleo</u> está formada por aquellas asignaciones que ninguna coalición puede vetar fuertemente.

Asignaciones vetables débilmente

Dado un perfil de preferencias P y un asignación inicial w, se dice que la coalición $C \subseteq N$ puede <u>vetar débilmente</u> la asignación α si existe otra asignación β tal que:

(i) el conjunto $\{x \in X$: para algún $i \in C$, $\beta(i) = x\}$ de los objetos que reciben los miembros de la coalición C en β coincide con el conjunto $\{x \in X$: para algún $i \in C$, $w_i = x\}$ de los objetos que tienen los miembros de C;

(ii) para algún $i \in C$, i prefiere $\beta(i)$ a $\alpha(i)$ según la preferencia P_i; y

(iii) para todo $i \in C$, o bien i prefiere $\beta(i)$ a $\alpha(i)$ según P_i, o bien i es indiferente entre $\beta(i)$ i $\alpha(i)$ según P_i.

Conjunto $C_e(w)$ de asignaciones del núcleo estricto

Dado un perfil de preferencias P y un asignación inicial w, el conjunto $C_e(w)$ de asignaciones del <u>núcleo estricto</u> está formado por aquellas asignaciones que ninguna coalición puede vetar débilmente.

Conjunto $P(w)$ de asignaciones Paretoeficientes

Dado un perfil de preferencias P y un asignación inicial w, el conjunto $P(w)$ de asignaciones <u>Paretoeficientes</u> está formado por aquellas asignaciones que la coalición N formada por todos los individuos no puede vetar débilmente.

Asignaciones de equilibrio $E(w)$

Dado un perfil de preferencias P y un asignación inicial w, la asignación α es una asignación de equilibrio si existe un vector n-dimensional $(p_1, p_2, \dots, p_n)$, en donde p_k representa el precio del objeto w_k que posee el individuo k, tal que, para todo individuo $i \in N$:

(i) si i prefiere el objeto w_j que inicialmente posee el individuo j al objeto $\alpha(i)$ que i recibe en α, entonces $p_j > p_i$ (el precio del objeto w_j ha de ser superior al precio del objeto w_i que inicialmente tiene i);

(ii) si $\alpha(i)$ es el objeto w_j que inicialmente posee el individuo j entonces $p_i \geq p_j$.

El conjunto $E(w)$ designa el conjunto de asignaciones de equilibrio, dado un perfil P.

Cada individuo i posee inicialmente un objeto w_i. Para definir un equilibrio, es preciso determinar el valor de ese objeto. Para ello se define un vector de precios (p_1, p_2, … , p_n), de manera que p_k es el precio del objeto w_k (el objeto poseído por el individuo k). La asignación α será un equilibrio con el vector de precios (p_1, p_2, … , p_n) si, dado el valor de los objetos, todo individuo recibe en α alguno de los objetos más preferidos que es factible conseguir, donde el objeto w_j es factible para i si el precio de w_j no es superior al precio p_i del objeto w_i que posee i.

Secuencias de ciclos de comercio de los objetos más preferidos

Estas secuencias se basan en un algoritmo, atribuido a David Gale por Shapley y Shubik, que permite determinar las asignaciones de equilibrio. La idea del algoritmo es que cada individuo i apunte a un individuo que posea alguno de los objetos más preferidos por i (cuando la preferencia de i es estricta, i apunta a un único individuo, que puede ser él mismo). De este modo se genera una secuencia en la que i_1 apunta a i_2, i_2 apunta a i_3, i_3 apunta a i_4, etc. Dado que el conjunto de individuos es finito, llegará un momento en que alguno de los individuos apunte a otro que ya aparece en la secuencia. Con ello se genera un ciclo $j_1 \to j_2 \to j_3 \to \dots \to j_r$.

El ciclo anterior define una secuencia (j_1, j_2, j_3, … , j_r), que a su vez permite definir una asignación en la que todos los miembros del ciclo obtienen su objeto más preferido. La idea es que los miembros del conjunto $\{j_1, j_2, j_3, \dots, j_r\}$ ponen los objetos que poseen en común y cada uno escoge el objeto más preferido (pensando en el cual habían apuntado a alguien). Por construcción de la secuencia, cada individuo escogerá un único objeto y cada uno de ellos, escogerá uno distinto. Eliminados los individuos del ciclo de comercio y los objetos que toman, se considera el problema de asignación de los objetos restantes entre los individuos no eliminados y se vuelven a buscar ciclos de comercio. El conjunto de asignaciones obtenidas de esta manera se designan por $CC(w)$.

Ejemplo de obtención de ciclos de comercio

Sea el problema de asignación de la parte izquierda de la Fig. 3, en donde los círculos indican el objeto que posee cada individuo.

P_1	P_2	P_3	P_4
a	a	a	b
d	b	b	c
b	d	d	a
c	c	c	d

P_1	P_2
d	d
c	c

Fig. 3

Escogamos a un individuo cualquiera, por ejemplo 1. El objeto más preferido de 1 lo tiene 4. Así que 1 apunta a 4: 1 → 4. El objeto más preferido de 4 lo tiene 3. Así que 4 apunta a 3: 4 → 3. El objeto más preferido de 3 lo tiene 4. Así que 3 apunta a 4: 3 → 4. Y ya hemos identificado un ciclo en la secuencia 1 → 4 → 3 → 4: el ciclo (4, 3, 4). Por tanto, 3 y 4 intercambian sus objetos: 3 se queda con a y 4 se queda con b. Eliminados 3, 4 y sus objetos, se obtiene el problema representado en la parte derecha de la Fig. 3. Ahora se tendría 1 → 2 → 2. El ciclo resultante está formado exclusivamente por 2, que se apunta a sí mismo. Por ello, 2 se queda con d y, como no queda nadie más dispuesto a intercambiar, 1 se queda con c. La asignación resultante del intercambio mediante los ciclos de comercio es $CC(w) = \{(c, d, a, b)\}$, con $w = (c, d, b, a)$.

Resultados cuando se permite la indiferencia

R1 $C_e(w) \subseteq E(w) \subseteq C(w)$

R2 $C_e(w)$ puede estar vacío

R3 $E(w) \neq \varnothing$ y, por R1, $C(w) \neq \varnothing$

R4 $CC(w) = E(w)$

R5 $E(w) \cap P(w)$ puede estar vacío (falla el Primer TF de la Economía del Bienestar)

Resultados con preferencias estrictas

R6 $C_e(w) = E(w)$

R7 $E(w)$ consiste en un elemento

R8 Es posible que $E(w) \subset C(w)$

Ejemplo 1: Shapley y Scarf (1974)

Hay 3 individuos y tres objetos. El individuo i posee el objeto w_i. Las preferencias son las siguientes.

1	2	3
w_2	$w_1\ w_3$	w_2
$w_1\ w_3$	w_2	$w_1\ w_3$

Para obtener su objeto w_2 más preferido 1 se dirigiría a 2. Para obtener un objeto más preferido 2 se dirigiría a 1 o a 3. Por último, para obtener su objeto w_2 más preferido 3 se dirigiría a 2. Resultan pues dos secuencias de ciclos de comercio de los objetos más preferidos.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] \arrow[l, bend left] & 3 \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

La primer secuencia la inicia el ciclo de comercio que forma el conjunto {1, 2}. La asignación resultante (w_2, w_1, w_3) es aquélla obtenida cuando 1 y 2 intercambian sus objetos y 3 se queda con el suyo. La primer secuencia la inicia el ciclo que forma el conjunto {2, 3}. La asignación resultante (w_1, w_3, w_2) es aquélla obtenida cuando 2 y 3 intercambian sus objetos y 1 se queda con el suyo. Por tanto, el conjunto $CC(w)$ de las asignaciones que se obtienen mediante secuencias de ciclos de comercio de los objetos más preferidos tiene dos elementos: (w_2, w_1, w_3) y (w_1, w_3, w_2).

Por R4, (w_2, w_1, w_3) y (w_1, w_3, w_2) son las únicas asignaciones de equilibrio. ¿Cómo se encontrarían los precios de equilibrio? Escogiendo una secuencia de ciclos de comercio, dando a continuación el mismo precio a los objetos de los individuos que forman parte del mismo ciclo de comercio y un precio inferior a los objetos de los ciclos que vienen después en la secuencia de ciclos. Por ejemplo, en la secuencia ({1, 2}, {3}), los objetos de los individuos 1 y 2 tienen el mismo precio, que ha de ser superior al objeto del individuo 3. Por ello, el vector de precios p tal que $p_1 = p_2 > p_3$ es un vector de precios de equilibrio que hace que (w_2, w_1, w_3) sea una asignación de equilibrio.

Si la secuencia de ciclos de comercio que determina el reparto de objetos es ({2, 3}, {1}), el vector de precios p tal que $p_2 = p_3 > p_1$ es un vector de precios de equilibrio que hace que (w_1, w_3, w_2) sea una asignación de equilibrio.

Para determinar las asignaciones que pertenecen al núcleo $C(w)$, podemos considerar las 6 posibles asignaciones y verificar una por una que ninguna coalición puede vetar la asignación.

• <u>Asignación 1</u>: (w_1, w_2, w_3). Esta asignación no pertenece al núcleo dado que los miembros de la coalición {2, 3} pueden repartirse sus dotaciones y obtener ambos un objeto más preferido que el que obtienen en la asignación (w_2, w_1, w_3). De hecho, si 2 y 3 intercambian sus dotaciones, se obtiene (w_1, w_3, w_2), en donde tanto 2 como 3 obtienen un objeto más preferido que en (w_2, w_1, w_3). Por ello, la coalición {2, 3} puede vetar (w_2, w_1, w_3). Como resultado, (w_2, w_1, w_3) $\notin C(w)$.

• <u>Asignación 2</u>: (w_1, w_3, w_2). Ninguna coalición que contenga a 3 puede vetar esta asignación, puesto que 3 obtiene su objeto más preferido. Ninguna coalición que contenga a 2 puede vetar esta asignación, puesto que 2 obtiene uno de sus objetos más preferidos, de modo que no hay manera de hacerle mejorar. Esto deja a {1} como la única coalición que podría vetar (w_1, w_3, w_2). Pero como la asignación (w_1, w_3, w_2) asigna a 1 el objeto de que dispone la coalición {1}, {1} no puede vetar (w_1, w_3, w_2). Conclusión: (w_1, w_3, w_2) $\in C(w)$.

El problema de (w_1, w_3, w_2) es que no pertenece al núcleo estricto, ya que la coalición {1, 2} puede vetar débilmente (w_1, w_3, w_2) mediante la asignación (w_2, w_1, w_3). Si 1 y 2 intercambian sus dotaciones, se consigue la asignación (w_2, w_1, w_3). Comparando (w_1, w_3, w_2) y (w_2, w_1, w_3) reultando obvio que 1 mejora y 2 no empeora, lo que hace que (w_2, w_1, w_3) $\notin C_e(w)$.

• <u>Asignación 3</u>: (w_2, w_1, w_3). Ninguna coalición que contenga a 1 puede vetar esta asignación, puesto que 1 obtiene su objeto más preferido. Ninguna coalición que contenga a 2 puede vetar esta asignación, puesto que 2 obtiene uno de sus objetos más preferidos. Esto deja a {3} como la única coalición que podría vetar (w_2, w_1, w_3). Pero {3} no puede hacerlo porque, en (w_2, w_1, w_3), 3 recibe el objeto de que dispone la coalición {3}. Así pues, (w_2, w_1, w_3) $\in C(w)$. Pero, como en el caso de la asignación 2, (w_2, w_1, w_3) $\notin C_e(w)$.

• <u>Asignación 4</u>: (w_2, w_3, w_1). En este caso, (w_2, w_3, w_1) $\in C(w)$ pero (w_2, w_3, w_1) $\notin C_e(w)$.

• <u>Asignación 5</u>: (w_3, w_2, w_1). En este caso, (w_3, w_2, w_1) $\notin C(w)$ y, por tanto, (w_3, w_2, w_1) $\notin C_e(w)$.

• <u>Asignación 6</u>: (w_3, w_1, w_2). En este caso, (w_3, w_1, w_2) $\in C(w)$ pero (w_3, w_1, w_2) $\notin C_e(w)$.

La conclusión final es que $C(w)$ contiene 4 elementos (las asignaciones 2, 3, 4 y 6), pero que $C_e(w)$ está vacío. Este ejemplo demuestra el resultado R2.

Ejemplo 2: Shapley y Scarf (1974)
Hay 3 individuos y tres objetos. El individuo *i* posee el objeto w_i. Las preferencias son las siguientes.

1	2	3
w_3	w_1	w_2
w_2	w_2	w_3
w_1	w_3	w_1

En este caso, hay una única secuencia de ciclos de comercio: 1 se dirige a 3, 3 se dirige a 2 y 2 se dirige a 1. Por tanto, la secuencia es ({1, 2, 3}) y la asignación resultante es (w_3, w_1, w_2). Por R4, $E(w)$ = {(w_3, w_1, w_2)}, de modo que (w_3, w_1, w_2) es la única asignación de equilibrio. Sin embargo, $C(w) \neq E(w)$, lo que probaría R8. De hecho, (w_2, w_1, w_3) $\in C(w)$.

Ejemplo 3: Wako (1999)

Hay 3 individuos y tres objetos. El individuo i posee el objeto w_i. Las preferencias son las siguientes.

1	2	3
w_2	w_1 w_3	w_2
w_3	w_2	w_1
w_1		w_3

Las secuencias de ciclos de comercio son las mismas que en el Ejemplo 1: ({1, 2}, {3}) y ({2, 3}, {1}). La secuencia de ciclos ({1, 2}, {3}) da lugar a la asignación (w_2, w_1, w_3), en tanto que la secuencia ({2, 3}, {1}) da lugar a la asignación (w_1, w_3, w_2). Éstas dos constituyen las únicas asignaciones de equilibrio: $E(w) = \{(w_2, w_1, w_3), (w_1, w_3, w_2)\}$. Pero ninguna de ellas es Paretoeficiente, esto es, $(w_2, w_1, w_3) \notin P(w)$ y $(w_1, w_3, w_2) \notin P(w)$. El hecho de que $(w_2, w_1, w_3) \notin P(w)$ se debe a que existe la asignación (w_2, w_3, w_1). Comparando ambas asignaciones, se observa que 1 y 2 están indiferentes en ambas, pero que 3 está mejor en la segunda.

El Ejemplo 3 demuestra R5, a saber, que el Primer Teorema Fundamental de la Economía del Bienestar puede fallar cuando los bienes son indivisibles: una asignación de equilibrio no necesariamente es una asignación Paretoeficiente. Lo grave del ejemplo es que puede ser que ninguna asignación de equilibrio sea Paretoeficiente.

Bibliografía

- Kamijo, Yoshio y Kawasaki, Ryo (2009): "Dynamics, stability, and foresight in the Shapley-Scarf housing market", Fondazione Eni Enrico Mattei, Working Paper 312.
- Shapley, Lloyd y Scarf, Herbert (1974): "On cores and indivisibility", *Journal of Mathematical Economics* 1, 23–37.
- Svensson, Lars-Gunnar (1999): "Strategy-proof allocation of indivisible goods", *Social Choice and Welfare* 16, 557–567.
- Wako, Jun (1999): "Coalition-proofness of the competitive allocations in an indivisible goods market", en Myrna H. Wooders (ed): *Topics in Mathematical Economics and Game Theory. Essays in Honor of Robert J. Aumann*, American Mathematical Society, pp. 277-83.

Emparellament (matching)

Una de caçafortunes

En una celebració de l'alta societat, hi ha quatre vídues acabalades (A, B, C i D) i quatre gigolós (a, b, c i d) a la caça d'alguna d'aquestes vídues. La millor oportunitat la tenen en ocasió d'un ball, moment en què cada gigoló proposarà de ballar a alguna de les vídues. Cada vídua prefereix ballar amb algun dels gigolós a no ballar. Les preferències dels gigolós sobre les vídues, i d'elles sobre ells, són

a	b	c	d
A	A	A	B
B	C	C	C
C	B	D	A
D	D	B	D

A	B	C	D
d	c	c	a
c	b	a	d
b	a	d	b
a	d	b	c

on cada columna expressa un ordre de preferència estricta, de més preferit a menys preferit. Per exemple, la segona columa significa que el gigoló b prefereix la vídua A a totes les altres, la vídua C a les D i B i, finalment, la vídua D a la B. Una parella de ball (x, X) formada per l'home x i la vídua X és estable si no hi ha cap altra parella (y, Y) tal que: (i) x i Y prefererien ballar junts abans que ballar amb la parella que ara tenen; o bé (ii) y i X prefererien ballar junts abans que ballar amb la parella que ara tenen. Existeix alguna parella de ball estable?
http://en.wikipedia.org/wiki/Stable_marriage_problem

L'algorisme de Gale i Shapley (1962)

L'algorisme de Gale i Shapley permet de determinar un emparellament estable a problemes del tipus anterior. Segons l'algorisme, a la primera etapa, cada home s'adreça a la dona que considera més preferida. Si totes les dones són sol·licitades per algun proponent, l'algorisme s'acaba i cada home és emparellat amb la dona sol·licitada. En cas contrari, les dones que reben més d'una proposta, mantenen a la reserva al proponent més preferit i rebutgen definitivament als altres. A la segona etapa, els homes rebutjats s'adrecen a la segona dona més preferida. Si totes les dones tenen un sol·licitant (els homes en la reserva es consideren sol·licitants), l'algorisme acaba. Si no totes en tenen algun, aleshores cada dona amb algun proponent manté en la reserva el més preferit i rebutja definitivament els demés. Aquest mateix procediment s'aplica a les següents etapes, fins que totes les dones tinguin algun sol·licitant, moment en què l'algorisme finalitza i s'emparella cada dona amb el seu únic sol·licitant. Per a il·lustrar com funciona l'algorisme, apliquem-lo al cas dels gigolós i les vídues.

A l'etapa 1, els gigolós proposen de ballar a les vídues més preferides.

A	B	C	D
a b c	d		

L'anterior representa el següent: A rep les propostes d'a, b i c; B rep la proposta de d; i ni C ni D reben cap proposta. Atès que no totes les dones tenen un pretendent, l'algorisme no termina. Llavors identifiquem les dones amb més d'una proposta (en aquest cas, A), mantenim a la reserva el seu proponent més preferit entre els qui la sol·liciten (c) i eliminem els altres (a i b).

A	B	C	D
$\cancel{a}$ $\cancel{b}$ c	d		

S'inicia ara l'etapa 2, on A manté c a la reserva, B manté d a la reserva i a i b s'adrecen a les seves segones opcions més preferides: B en el cas d'a i C en el cas de b.

A	B	C	D
c	d a	b	

Ara és B qui té dos sol·licitants. Aleshores, manté a la reserva el més preferit dels dos (l'a) i dóna carbasses a l'altre (el d).

A	B	C	D
c	$\cancel{d}$ a	b	

A l'etapa 3, en haver estat rebutjat per la seva primera opció B, d passa a sol·licitar a la seva segona millor opció, C.

A	B	C	D
c	a	b d	

En tenir C dos sol·licitants, manté a la reserva el més preferit dels dos (d) i rebutja l'altre (b).

A	B	C	D
c	a	$\cancel{b}$ d	

A l'etapa 4, l'únic gigoló rebutjat (b), s'adreça a la vídua més preferida entre aquelles que no l'han rebutjat: B.

A	B	C	D
c	a b	d	

Dels seus dos sol·licitants, B prefereix b a a. Per tant, manté b i es desfà d'a.

A	B	C	D
c	$\cancel{a}$ b	d	

A l'etapa 5, després d'haver estat rebutjat, a proposa a la vídua més preferida entre aquelles que no l'han rebutjat: C.

A	B	C	D
c	b	a d	

C manté a a i rebutja d.

A	B	C	D
c	b	a $\cancel{d}$	

A l'etapa 6, el rebutjat d s'adreça a A.

A	B	C	D
c d	b	a	

A manté a d i rebutja c. I s'arriba a una primera conclusió: d s'emparellarà amb A, ja que d és el gigoló més preferit per la vídua A, de manera que A rebutjarà a qualsevol altre gigoló que la pretengui.

A	B	C	D
$\cancel{c}$ d	b	a	

A l'etapa 7, després d'haver estat rebutjat per la seva primera opció A, c s'adreça a la seva segona opció, C.

A	B	C	D
d	b	a c	

En la mesura que C prefereix c a a, a és rebutjat per C.

A	B	C	D
d	b	$\cancel{a}$ c	

A l'etapa 8, a sol·licita a l'única vídua que no l'ha rebutjat: D.

A	B	C	D
d	b	c	a

Però ara totes les vídues tenen un pretendent i l'algorisme finalitza amb l'emparellament anterior: A–d, B–b, C–c i D–a (coses de la vida: el mal tràngol de D en no haver estat demanada per ningú fins a l'últim moment es compensa amb el fet d'emparellar-se amb el seu gigoló més preferit).

Verifiquem que es tracta d'un <u>emparellament estable</u>. Comencem per la parella (d, A). És evident que, per a A, aquest emparellament és estable, ja que d és el gigoló més preferit per A. Amb relació a d, A és la tercera vídua favorita. Per tant, cal verificar que cap de les altres dues vídues més preferides que A (B i C) no prefereix ballar amb d que amb la parella respectiva (b en el cas de B i c en el cas de C).

Considerem primer la possible parella (d, B). És clar que d prefereix aquest emparellemant a l'emparellament (d, A), però també es clar que B prefereix mantenir la parella (b, B) a trencar-la en favor de (d, B), perquè B prefereix qualsevol gigoló abans que d. Amb la segona possible parella (d, C) passa el mateix: C prefereix c (la parella que li toca a l'emparellemant construït per l'algorisme) a d. Conclusió: (d, A) és una parella estable.

L'algorisme de Gale i Shapley s'ha presentat en la versió "els homes proposen". També es pot definir en la versió alternativa "les dones proposen", on tot és igual tret que són les dones les que sol·liciten els homes i són aquests qui accepten o rebutgen. En general, però, les dues versions de l'algorisme no sempre generen el mateix emparellament.

Estabilitat i optimalitat dels emparellaments

Un emparellament és estable si, per a totes les parelles (x, X) i (y, Y), no és el cas que (i) x prefereix Y a X i Y prefereix x a y o que (ii) X prefereix y a a i y prefereix X a Y. Un emparellament E és òptim per a l'home (o dona) α si no existeix cap emparellament estable E' tal que α prefereix la parella que li assigna E' a la parella que li assigna E.

Propietats de l'algorisme de Gale i Shapley

• *Tant en la versió on proposen els homes com en la versió on proposen les dones, l'algorisme finalitza en un màxim d'$n^2 - 2n + 2$ etapes, on n és el nombre d'homes (i de dones).*

• *Tant en la versió on proposen els homes com en la versió on proposen les dones, l'algorisme finalitza amb un emparellament estable.*

• *Si la versió on proposen els homes i la versió on proposen les dones generen el mateix emparellament, aleshores aquest emparellament és l'únic emparellament estable.*

Per exemple, els únics emparellaments estables amb les preferències indicades a continuació són: (i) *A–a*, *B–d*, *C–b* i *D–c*; (ii) *A–d*, *B–b*, *C–c* i *D–a*; i (iii) *A–a*, *B–b*, *C–c* i *D–d*. Considerem la dona *D*. Aquesta dona prefereix l'emparellament (ii) al (iii) i el (iii) a l'(i). Això fa que ni (i) ni (iii) siguin òptims per a *D*. Per a *D*, només (ii) és òptim. En canvi, per a *C*, tant (ii) com (iii) són òptims, ja que de les parelles que obté a algun emparellament estable (*b* i *c*), el més preferit de totes dues (*c*) s'obté tant a (ii) com a (iii).

a	*b*	*c*	*d*
B	*C*	*D*	*C*
A	*B*	*A*	*B*
D	*A*	*C*	*D*
C	*D*	*B*	*A*

A	*B*	*C*	*D*
d	*c*	*a*	*a*
b	*b*	*c*	*d*
a	*d*	*b*	*c*
c	*a*	*d*	*b*

Optimalitat dels emparellaments de l'algorisme de Gale i Shapley

L'emparellament generat per l'algorisme de Gale i Shapley quan els homes proposen és òptim per a tots els homes. L'emparellament generat per l'algorisme quan les dones proposen és òptim per a totes les dones.

Bibliografia

- Gura, Ein-ya i Maschler, Michael B. (2008): *Insights into Game Theory: An Alternative Mathematical Experience*. Cambridge University Press: Cambridge, capítol 1.
- Gale, David i Shapley Lloyd S. (1962): "College admissions and the stability of marriage", *American Mathematical Monthly* 69, 9–15.