# El joc del correu electrònic

L'intercanvi d'informació no presencial està sotmès a la possibilitat que l'intercanvi sigui estèril. El problema de l'atac coordinat[1] o parlar per telèfon[2] il·lustren aquesta possibilitat. El joc del correu electrònic (*electronic mail game*) d'Ariel Rubinstein[3] (http://arielrubinstein.tau.ac.il/) també permet d'analitzar l'esterilitat de l'intercanvi d'informació. Aquest joc es representa a la Fig. 1. Inicialment, els jugadors no saben en quina matriu juguen, però saben que la probabilitat d'estar jugant en la matriu dreta és de ⅔.

| | | **2** | |
|---|---|---|---|
| | | *c* | *d* |
| **1** | *a* | 3 3 | 0 2 |
| | *b* | 3 0 | 1 1 |

$1 - p = ⅓$

| | | **2** | |
|---|---|---|---|
| | | *c* | *d* |
| **1** | *a* | 1 1 | 0 2 |
| | *b* | 2 0 | 3 3 |

$p = ⅔$

Fig. 1

**Q1.** Calcula els equilibris baiesians del joc de la Fig. 1 si tots dos jugadors ignoren en quina matriu juguen i assignen la probabilitat ⅔ a estar jugant en la matriu dreta.

Suposem que el jugador 1 sempre sap en quina matriu es juga i que, quan es juga en la matriu de l'esquerra, es posa en marxa automàticament el següent mecanisme. L'ordinador d'1 envia un missatge a l'ordinador de 2 dient que estan jugant en la matriu del costat esquerre. Amb probabilitat $1 > \varepsilon > 0$ tan petita com es vulgui el missatge no arriba a l'ordinador de 2. Si l'ordinador de 2 rep el missatge (fet que passa amb probabilitat $1 - \varepsilon$) envia un altre missatge a l'ordinador d'1 confirmant la recepció del missatge. Amb probabilitat $\varepsilon$ el missatge no arriba a l'ordinador d'1. Si l'ordinador d'1 rep el missatge (fet que passa amb probabilitat $1 - \varepsilon$) envia un altre missatge a l'ordinador d'2 confirmant-ne la recepció. I així successivament fins que algun missatge no arriba al destinatari. En aquest moment, cada jugador ha de triar la seva estratègia en funció del nombre $n$ de missatges que l'ordinador d'1 ha enviat.

La Fig. 2 presenta un model que descriu la situació, on els parells $xy$ representen l'estat en què l'ordinador d'1 envia $x$ missatges i l'ordinador de 2 rep $y$ missatges (amb $y = x$ o $y = x - 1$). Els estats dins d'un mateix conjunt representen estats que són indistingibles per al jugador. Per exemple, en l'estat 00, el jugador 1 sap que es troba en aquell estat: sap que no ha enviat cap missatge. Però el jugador 2 no pot distingir l'estat 00 de l'estat 10, perquè a tots dos rep la

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Coordinated_Attack_Problem

[2] Per exemple, suposem que *i* i *j* parlen per telèfon, que *i* proposa a *j* trobar-se al cap de 30 minuts en un determinat lloc i que demana confirmació a *j*. Aleshores *j* confirma que accepta la proposta i demana a *i* que confirmi que *i* ha rebut la confirmació de *j*. Llavors *i* confirma que ha rebut la confirmació i demana a *j* que confirmi que ha rebut la confirmació de la seva confirmació… i així successivament. Imaginem que, en algun punt del creuament de confirmacions, la línia es talla. Assisteix *i* a la cita? Hi assisteix *j*?

[3] Rubinstein, Ariel (1989): "The electronic mail game: Strategic behavior under 'almost common knowledge'", *American Economic Review* 79, 385–391. http://arielrubinstein.tau.ac.il/papers/32.pdf.

mateixa informació: cap missatge rebut. El que diferencia els dos estats és que al 00 el jugador 1 no envia cap missatge però a l'10 l'envia i es perd (perquè 2 no rep cap missatge). De manera similar, 1 no pot distingir entre 10 i 11: a tots dos casos, 1 envia només un missatge, però a l'10 el missatge no és rebut per 2 i a l'11 sí.

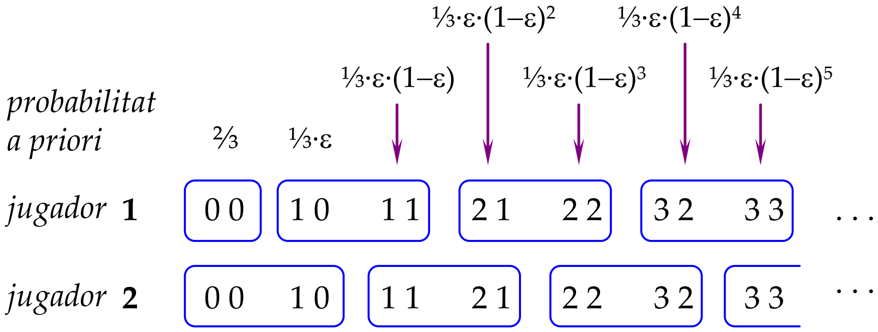


Fig. 2

La fila superior de la Fig. 2 mostra la probabilitat a priori que els jugadors hagin de prendre la decisió a cada estat indicat. Quan el procés d'enviament de missatges es posa en marxa (això succeeix a tots els estats tret del 00), aquesta probabilitat és la probabilitat que el procés s'aturi a l'estat corresponent. En el cas 00, el jugador 1 no envia cap missatge, la qual cosa té lloc només si la naturalesa escull la matriu dreta. Aquesta matriu és escollida amb probabilitat ⅔. Per tant, la probabilitat a priori de l'estat 00 és ⅔. Amb probabilitat ⅓, es juga en la matriu esquerra i s'engega el procés d'enviament de missatges.

L'estat 10 representa la situació on el procés s'atura quan 1 envia el primer missatge i 2 no el rep. La probabilitat a priori d'aquesta situació és la probabilitat que 1 enviï el primer missatge (la probabilitat ⅓ de jugar en la matriu esquerra i, per tant, que 1 sàpiga que s'està jugant en aquella matriu) multiplicada per la probabilitat ε que el missatge no arribi al jugador 2.

L'estat 11 representa la situació on el procés s'atura quan 1 envia el primer missatge i 2 el rep. Ara el procés s'atura perquè la resposta de 2 no arriba a 1. Així, la probabilitat a priori d'11 és ⅓ (la probabilitat que 1 enviï el primer missatge) per 1 – ε (la probabilitat que 2 el rebi) per ε (la probabilitat que 1 no rebi la confirmació de 2 de la recepció del primer missatge d'1).

**Q2.** Explica el significat de la probabilitat $⅓·ε·(1 – ε)^2$ atribuïda a l'estat 21 i la probabilitat $⅓·ε·(1 – ε)^3$ atribuïda al 22. Mostra que la probabilitat a priori de l'estat $n$+1 $n$ —la probabilitat que l'intercanvi de missatges s'aturi quan 1 ha enviat $n + 1$ missatges i 2 els ha rebut tots tret de l'últim— és $⅓·ε·(1 – ε)^{2n}$. Mostra que la probabilitat a priori de l'estat $n$+1 $n$+1 —la probabilitat que l'intercanvi de missatges s'aturi quan 1 ha enviat $n + 1$ missatges i 2 els ha rebut tots— és $⅓·ε·(1 – ε)^{2n+1}$.

La importància de la Fig. 2 rau en el fet que identifica els conjunts d'informació dels jugadors. Això implica que, per a tot $n \geq 1$, 1 ha de triar la mateixa estratègia a l'estat $n$ $n$–1 que a l'estat $nn$: 1 no pot distingir aquests dos estats perquè no sap si 2 ha rebut el missatge $n$ (estat $nn$) o no l'ha rebut (estat $n$ $n$–1). De manera anàloga, per a tot $n \geq 0$, 2 ha de triar la mateixa estratègia a l'estat $nn$ que a l'estat $n$+1 $n$.

Passem ara a determinar quins són els els equilibris baiesians del joc de la Fig. 1 quan l'intercanvi de missatges o no comença (estat 00) o s'atura (resta d'estats). A l'estat 00 la naturalesa selecciona la matriu de la dreta i 1 ho sap. En canvi, 2 no sap si es troba a l'estat 00 o a l'10, ja que 2 té dues explicacions al fet de no rebre cap missatge d'1: que 1 no l'ha enviat (perquè la naturalesa ha triat la matriu de la dreta) o que l'ha enviat i no ha arribat. La primera possibilitat té probabilitat ⅔; la segona, probabilitat $\varepsilon \cdot ⅓$. En el primer cas, el jugador 1 sap que es troba a la matriu de la dreta, on $b$ domina fortament a $a$. Així, 1 tria $b$ a l'estat 00 i 2 sap que 1 tria $b$ a l'estat 00.

Amb relació a la decisió del jugador 2, la probabilitat condicionada (creença) de ser a l'estat 00 (atès que sap que no ha rebut cap missatge) és (aplicant la fórmula de Bayes) $p_{00} = ⅔ / (⅔ + \varepsilon \cdot ⅓) = 2/(2 + \varepsilon)$. Per tant, la creença de 2 de ser a l'estat 10 és $1 - p_{00}$. Triant $c$, el pagament esperat de 2 és el que espera obtenir triant $c$ quan l'estat és 00 més el que espera obtenir triant $c$ quan l'estat és 10. Això és, el pagament esperat de triar $c$ és $p_{00} \cdot 0$ (perquè 2 sap que 1 tria $b$ a la matriu dreta a l'estat 00) més $(1 - p_{00})3a$, on $a$ és la probabilitat amb què 1 tria $a$ (a la matriu esquerra) a l'estat 10. D'aquí resulta un pagament esperat de triar $c$ de $3a\varepsilon/(2 + \varepsilon)$.

De manera similar, el pagament esperat de 2 triant $d$ és $p_{00} \cdot 3 + (1 - p_{00})[2a + 1 \cdot (1 - a)]$ on $a$ és la probabilitat amb què 1 tria $a$ a l'estat 10 (a la matriu esquerra). El pagament esperat de triar $d$ és $(6 + \varepsilon + \varepsilon a)/(2 + \varepsilon)$. Així doncs, $d$ és millor que $c$ si, i només si, $6 + \varepsilon + \varepsilon a > 3a\varepsilon$, que és el cas per a qualsevol valor d'$a$ i d'$\varepsilon$ (atès que $a$ i $\varepsilon$ són probabilitats). En resum, als estats 00 i 10 el jugador 2 tria $d$. Com a recapitulació, en l'estat 00, 1 tria $b$ i 2 tria $d$: quan 1 no envia cap missatge, 1 tria $b$ i 2 tria $d$.

La conclusió anterior serveix com a base d'un raonament inductiu: triem un nombre $n \geq 0$ de missatges enviats per 1 i suposem que 1 tria $b$ i 2 tria $d$ quan s'han enviat $n$ missatges. Es tracta de demostrar que 1 continuarà triant $b$ i 2 continuarà triant $d$ quan el missatge $n + 1$ s'ha enviat. Per inducció, la conclusió serà que, amb independència del nombre de missatges que 1 envïi, els jugadors prendran la mateixa decisió que prendrien si no s'enviés cap missatge.

El resultat paradoxal serà que el sistema d'enviament de missatges és inútil: a tot estat $nm$ on $n > 0$ i $m > 0$, els dos jugadors saben que realment estan jugant en la matriu de l'esquerra, però tot i el mínim soroll $\varepsilon$ que afecta al sistema de comunicació que permet confirmar el que cadascú sap, els jugadors aparentment ignoren la informació que juguen en la matriu de l'esquerra (ja que trien el mateix amb i sense la informació).

Passem a demostrar que 1 tria $b$ i 2 tria $d$ quan 1 ha enviat $n + 1$ missatges. Quan aquest és el cas, 1 no pot distingir entre l'estat $n$+1 $n$ i l'estat $n$+1 $n$+1. Però pot determinar la probabilitat condicionada de ser a un o a l'altre. Per la fórmula de Bayes i **Q2**, quan 1 ha enviat $n + 1$ missatges, la probabilitat condicionada de ser a l'estat $n$+1 $n$ és

$$q = \frac{\frac{1}{3}\varepsilon(1-\varepsilon)^{2n}}{\frac{1}{3}\varepsilon(1-\varepsilon)^{2n} + \frac{1}{3}\varepsilon(1-\varepsilon)^{2n+1}} = \frac{1}{1+(1-\varepsilon)} = \frac{1}{2-\varepsilon} > ½.$$

Aquest resultat és la clau de la demostració, perquè diu que, quan el jugador 1 envia el missatge $n + 1$, creu que el més probable és que no arribi: atès que la probabilitat condicionada de l'estat $n$+1 $n$ és superior a ½, la probabilitat corresponent de l'estat $n$+1 $n$+1 (el missatge $n + 1$ arriba al 2) és inferior a ½ i, així, inferior a la probabilitat que el missatge $n + 1$ no arribi al 2. Per la hipòtesi inductiva, el jugador 2 tria $d$ quan 1 envia $n$ missatges i el 2 els rep. Això és, 2 tria $d$ a l'estat $nn$. Com que 2 no distingeix entre $nn$ i $n$+1 $n$, 2 ha de triar el mateix en tots dos estats: $d$.

Atès que el jugador 2 ha rebut almenys un missatge informant sobre el fet que es troben jugant a la matriu esquerra, tothom sap que la matriu rellevant per a calcular els pagaments esperats és la de l'esquerra. El pagament esperat d'1 triant $a$ és el pagament que espera obtenir triant $a$ quan l'estat és $n$+1 $n$ més el pagament que espera obtenir triant $a$ quan l'estat és $n$+1 $n$+1. A l'estat $n$+1 $n$, 1 sap que 2 triaria $d$. Així, el pagament que espera obtenir triant $a$ quan l'estat és $n$+1 $n$ serà $q\cdot 0$. El pagament esperat de triar $a$ quan l'estat és $n$+1 $n$+1 és $(1 - q)[3c + 0\cdot(1 - c)]$, on $c$ és la probabilitat que 2 jugui $c$ a l'estat $n$+1 $n$+1. En total, el pagament esperat de triar $a$ és $(1 - q)3c$.

De forma anàloga es calcula el pagament esperat de triar $b$: $q\cdot 1 + (1 - q)[3c + 1\cdot(1 - c)] = 1 + 2c - 2cq$. Per tant, $b$ és millor que $a$ quan 1 ha enviat $n + 1$ missatges si $1 + 2c - 2cq > (1 - q)3c$, que equival a $1 + qc > c$. Atès que $c \leq 1$ i $q > ½$, la conclusió és que $b$ és millor que $a$.

**Q3.** Finalitza la demostració anterior verificant que $d$ és millor que $c$ quan 1 ha enviat $n + 1$ missatges.

De tot plegat es conclou que, per molts missatges que 1 enviï (i 2 rebi), tots dos continuarien triant $b$ i $d$, que és l'elecció que farien sense enviar-se missatges. El vector de pagaments obtingut quan es tria $b$ i $d$ en la matriu esquerra de la Fig. 1 (que és la matriu que tots dos saben que estan jugant quan 2 ha rebut al menys un missatge) és (1, 1), que és superat pel vector (3, 3). Què succeeiria, en el límit, si tots els missatges sempre arribessin? Que 1 i 2 sabrien, i sabrien que sabrien, i sabrien que sabrien que sabrien, i sabrien que sabrien que sabrien que sabrien… que estan jugant el joc de l'esquerra a la Fig. 1. En aquest cas, [$a$, $c$] seria un equilibri i els jugadors obtindrien el vector de pagaments (3, 3).

**Q4.** A l'estat 11, el jugador 1 sap que està jugant en la matriu esquerra de la Fig. 1, el 2 també ho sap però l'1 no sap que ell ho sap. Per què? Què saben els jugadors a l'estat 21 que no saben a l'11? I al 22 en relació amb el 21?

*Agraïments*. Moltes gràcies a Judit Garcia per la detecció d'errades.