Microeconomia Superior · Curs 2010–11 · Exercicis del Tema 4

1. Propietats dels jocs cooperatius. (i) És el joc dels escurabosses superadditiu? (ii) Interpreta aquestes dues propietats: (a) un joc v és de suma constant si, per a tot $S \subseteq N$, $v(S) + v(N \setminus S) = v(N)$, on $N \setminus S = \{i \in N\colon i \notin S\}$ és el conjunt N menys el conjunt S; (b) el joc v és convex si, per a tot $S \subseteq N$ i tot $T \subseteq N$, $v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T)$. (iii) És superadditiu un joc convex? És convex un joc superadditiu? En cas negatiu, demostra-ho amb un exemple. (iv) Un joc és monotònic si, per a tot $S \subseteq N$ i tot $T \subseteq N$, $S \subseteq T$ implica $v(S) \leq v(T)$. Interpreta aquesta propietat. Demostra el següent: si, per a tot $i \in N$, $v_i = 0$ i el joc v és superadditiu aleshores v és monotònic. (v) Comprova que $v_1 = 5$, $v_2 = 10$, $v_3 = 15$, $v_{12} = 25$, $v_{13} = 30$, $v_{23} = 35$ i $v_{123} = 40$ és un joc superadditiu, essencial i de suma constant.

2. Càlcul del cor. La regla de la majoria amb 3 votants. Troba totes les imputacions del cor del següent joc: $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ i $v_{12} = v_{13} = v_{23} = v_{123} = 1$.

3. Càlcul del cor. Tallant arbres. Hi ha 4 persones que es dediquen a tallar arbres fent servir serres de dues mans. Per tant, per a tallar un arbre calen dues persones. Essent $|S|$ el nombre de membres del conjunt S, les 4 persones juguen el joc v que satisfà, per a tot $S \subseteq N$, $v(S) = |S|/2$ si $|S|$ és parell i $v(S) = |S - 1|/2$ si $|S|$ és senar. (i) Demostra que $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (½, ½, ½, ½)$ és l'única imputació del cor. (ii) Demostra que el cor seria buit si hi hagués 3 persones.

4. Càlcul del cor. Buscant parella. Hi ha un conjunt H format per 3 homes i un conjunt D format 2 dones. Considera el joc $(H \cup D, v)$ tal que, per a tot $S \subseteq N$, $v(S) = min\{|S \cap H|, |S \cap D|\}$. Aquesta funció característica diu que el valor d'una coalició és el nombre de membres del grup més petit d'homes o de dones. Per exemple, si S està format per dos homes i una dona, $v(S) = min\{2, 1\} = 1$; si S està format per un home i dues dones, $v(S) = min\{1, 2\} = 1$; i si S està format per tres homes i cap dona, $v(S) = min\{3, 0\} = 0$. (i) Demostra que una imputació és al cor si, i només si, el pagament de cada dona és 1 i el pagament de cada home és 0. (ii) Demostra que, si un dels homes es canvia de sexe, ara una imputació és al cor si, i només si, el pagament de cada home és 1 i el pagament de cada dona és 0. (iii) Partint de la situació inicial amb 3 homes i 2 dones, imagina que un dels homes mor. Determina totes les imputacions del cor del joc resultant.

5. Càlcul del cor. Calcula totes les imputacions al cor del joc v tal que $v_1 = v_2 = v_3 = 5$, $v_{12} = v_{13} = v_{23} = 10$ i $v_{123} = 15$. És v essencial? De suma constant? Superadditiu?

6. Cor buit. L'*apex game* de Michael Maschler. El joc (N, v) satisfà $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i que, per a tot $S \subseteq N$: (i) $v(S) = 1$ si $1 \in S$ i $|S| \geq 2$; (ii) $v(S) = 1$ si $|S| \geq 4$; i (iii) $v(S) = 0$ en qualsevol altre cas. Aquest joc representa la situació on el jugador 1 és un jugador "poderós" (*big player*) si compta amb el suport d'un altre jugador i on tota coalició que tingui almenys 4 membres és també "poderosa". Demostra que el cor del joc és buit.

7. Cor buit. (i) Determina si el cor del joc v tal que $v_1 = v_2 = v_3 = 0$, $v_{12} = v_{13} = v_{23} = 3$ i $v_{123} = 5$ és o no buit. (ii) Construeix un joc (diferent de tots els jocs anteriorment definits) que tingui el cor buit i: (a) 2 jugadors; (b) 3 jugadors; (c) 4 jugadors.

8. Valor de Shapley. (i) Calcula el valor de Shapley del joc $v_1 = 5$, $v_2 = 10$, $v_3 = 15$, $v_{12} = 25$, $v_{13} = 30$, $v_{23} = 35$ i $v_{123} = 40$ aplicant tant la fórmula (1) com la (3) dels apunts. (ii) Prova que el cor d'aquest joc és buit.

9. Valor de Shapley. (J. C. Harsanyi) (i) Demostra que $\phi(v) = (35, 60, 65)$ és el valor de Shapley del joc v tal que $v_1 = 10$, $v_2 = 20$, $v_3 = 30$, $v_{12} = 40$, $v_{13} = 40$, $v_{23} = 80$ i $v_{123} = 160$. (ii) Comprova que (30, 30, 30) és el valor de Shapley dels jocs v i w tals que $v_1 = v_2 = v_3 = 0$, $v_{12} = v_{13} = v_{23} = 42$, $v_{123} = 90$, $w_1 = w_2 = w_3 = 0$ i $w_{12} = w_{13} = w_{23} = w_{123} = 90$. (iii) Demostra que $\phi(v) = (12, 37, 42)$ és el valor de Shapley del joc $v_1 = v_2 = v_3 = 5$, $v_{12} = v_{13} = v_{23} = 10$ i $v_{123} = 91$.

10. Valor de Shapley. Comprova, aplicant les fórmules (1) i (3) dels apunts que el valor de Shapley del joc $v_1 = 1$, $v_2 = 2$, $v_3 = 3$, $v_{12} = 5$, $v_{13} = 6$, $v_{23} = 7$ i $v_{123} = 9$ és $\phi(v) = (2, 3, 4)$.

11. Valor de Shapley. Determina el valor de Shapley del joc dels escurabosses $v_1 = v_2 = v_3 = 0$, $v_{12} = v_{13} = 10$, $v_{23} = 5$ i $v_{123} = 12$ seguint el procés de retirada i dissolució de coalicions.

12. Valor de Shapley i cor. Comprova que (⅔, ⅙, ⅙) és el valor de Shapley del joc $v_1 = v_2 = v_3 = v_{23} = 0$, $v_{12} = v_{13} = v_{123} = 1$. Verifica que l'única imputació que pertany al cor és (1, 0, 0). [Aquest joc representa un mercat on 1 és el venedor d'un objecte que no valora i 2 i 3 són dos possibles compradors que valoren l'objecte en 1.]

13. Suma de jocs. (i) Troba dos jocs u i w que sumin el joc dels escurabosses. (ii) Troba dos jocs u i w que sumin el joc dels escurabosses de manera que u sigui superadditiu. (iii) Troba dos jocs u i w que sumin el joc dels escurabosses de manera que u i w siguin superadditius.

14. Suma de jocs. (D. Luce i H. Raiffa). Considera els següents tres jocs: $u(S) = 0$ excepte $u_{123} = u_{23} = 1$; $v(S) = 0$ excepte $v_{123} = v_{12} = 1$; i $w_1 = w_2 = w_3 = w_{13} = 0$, $w_{12} = w_{23} = 1$ i $w_{123} = 2$. Comprova que: (i) $w = u + v$; i (ii) $\phi(w) = \phi(u) + \phi(v)$, amb $\phi(w) = (½, 1, ½)$, $\phi(u) = (0, ½, ½)$ i $\phi(\mathrm{v}) = (½, ½, 0)$.

15. Jocs de votació. Verifica que els jocs de votació [2; 1, 1, 1] i [5; 4, 4, 1] tenen la mateixa funció característica.

16. Jocs de votació. (William Lucas) Comprova que [58; 31, 31, 28, 21, 2, 2] i [2; 1, 1, 1, 0, 0, 0] defineixen el mateix joc. [El *Board of Supervisors* del comtat de Nassau a Long Island, Nova York, estava format per 6 membres i operava al 1964 amb vot ponderat i quota [58; 31, 31, 28, 21, 2, 2]. L'equivalència anterior mostra que tres dels membres no tenien cap influència en les decisions.]

17. Jocs de votació. (P.C. Ordeshook) Demostra que (⅓, ⅓, ⅓) és el vector d'índexs de poder del joc representat per [51; 49, 37, 14]. Comprova que aquest joc és equivalent a [2; 1, 1, 1]: el mètode de votació amb ponderacions 49, 37 i 14 amb quota 51 funciona, en la pràctica, com si no hi haguessin ponderacions (i el fet que 1 tingui més pes no reflecteix que tingui més poder).

18. Jocs de votació. (E. Gura i M. Maschler) Fins al 1965, el Consell de Seguretat de les Nacions Unides consistia en 11 membres: 5 membres permanents (EUA, Unió Soviètica, Xina, Anglaterra i França: *the five Big Powers*) i 6 membres transitoris. Per a aprovar una resolució, calia el suport d'almenys 7 membres del Consell de Seguretat. Indica un joc amb quota i pesos consistents amb l'antiga l'estructura del Consell de Seguretat. Calcula l'índex de poder que cada membre permanent i de cada membre no permanent. En l'actualitat, el Consell de Seguretat té 15 membres: els 5 grans i 10 membres no permanents amb un mandat de 2 anys. Cada membre té un vot. Es requereixen almenys 9 vots per a aprovar una resolució i, en determinants assumptes, també es requereix els vots dels 5 membres permanents. Segons l'índex de poder de Shapley i Shubik calculat a Gura i Maschler (2008, p. 156–158), el poder de cada estat no permanent és 0'186% (sumant l'1'86% els 10 no permanents) i el de cada estat permanent és del 19'63% (sumant el 98'14% els 5 permanents). http://en.wikipedia.org/wiki/Security_council

19. Cor d'un mercat amb un venedor (jugador 1) i dos compradors (jugadors 2 i 3). (R. Luce i H. Raiffa). El jugador 1 vol vendre un objecte que valora en a €. El jugador 2 valora l'objecte en b € i el 3 en c €, on $a < b \leq c$. (i) Explica per què aquesta situació pot ser representada mitjançant el joc $v_1 = a$, $v_2 = v_3 = v_{23} = 0$, $v_{12} = b$ i $v_{13} = v_{123} = c$. (ii) Comprova que el cor està format per les imputacions (x_1, x_2, x_3) tals que $b \leq x_1 \leq c$, $x_2 = 0$ i $\leq x_3 = c - x_1$. (iii) Interpreta'n el resultat. (iv) Comprova que $\phi(v) = (a/3 + b/6 + c/2, -a/6 + b/6, -a/6 - b/3 + c/2)$.

20. Jocs de votació. Comprova que [5; 2, 3, 4] i [2; 1, 1, 1] defineixen el mateix joc. Demostra que el valor de Shapley d'aquest joc és (⅓, ⅓, ⅓) i que aquesta imputació no pertany al cor.

21. Valor de Shapley. Verifica que (½, ⅙, ⅙ , ⅙) és el valor de Shapley del joc representat per [3; 2, 1, 1, 1].

22. Valor de Shapley i cor. Verifica que (⅔, ⅙, ⅙) és el valor de Shapley del joc representat per [3; 2, 1, 1]. Comprova que l'única imputació que pertany al cor és (1, 0, 0).

23. Índexs de poder. El preu competitiu d'un vot (Robert Aumann). Calcula el valor de Shapley del joc representat per [½; ⅓, ⅓, 1/12, 1/12, 1/12, 1/12] i interpreta'n el resultat. [El joc modelitza un parlament amb 6 grups parlamentaris on les decisions es prenen per majoria simple i on dos dels grups són majoritaris (cadascú té un terç dels escons) i la resta minoritaris (cadascú té un dotzè del total d'escons). La mesura de poder de cada grup reflectida al valor de Shapley indica que, en conjunt, els partits minoritaris tenen més poder del que la suma dels seus escons suggereix.]

24. Índexs de poder. Prova que (¼, ¼, ¼, ¼) és el vector d'índexs de poder del joc representat per [3; 1, 1, 1, 1].