Macroeconomia avanzada · Máster en Economía

Lista 1 de ejercicios

1. Demuestra el teorema de Euler (sugerencia: partiendo de la definición de homogeneidad de grado h, deriva ambos lados de la ecuación con respecto al parámetro λ y considera el valor $\lambda = 1$; para la segunda parte del teorema, deriva ahora con respecto a K y divide por λ).

2. Sea $F(K, L, A)$ una función de producción de una empresa representativa que satisface H1. Utiliza el teorema de Euler para verificar que, asumiendo el precio del producto igual a 1, la maximización de beneficios de la empresa representativa en equilibrio de la economía implica que la empresa tiene beneficios nulos cuando toma los precios de K y L como dados (Pista: teorema de Euler).

3. Sea $F(K, L, A)$ una función de producción que satisface H1. Fija el valor de A. (i) Muestra que puede expresarse en forma $f(k)$, donde $k = K/L$. (ii) Asumiendo los mercados de K y L competitivos, demuestra que el precio r de K es igual a la derivada $f'(k)$ y que el precio w de L es igual a $f(k) - k{\cdot}f'(k)$. (Pista: del ejercicio 2 se sigue que $Y = r{\cdot}K + w{\cdot}L$, donde Y es el valor de la función de producción dados K y L).

4. Considera la función Cobb-Douglas $Y = F(K, L, A) = A{\cdot}K^{\alpha}{\cdot}L^{1-\alpha}$, con $0 < \alpha < 1$ y $A > 0$. (i) Comprueba si satisface las hipótesis H1 y H2. (ii) Definiendo $y = Y/L$ y $k = K/L$, obtén la expresión correspondiente $y = f(k)$ (esto es, determina f). (iii) Asumiendo mercados competitivos de K y L, indica la fórmula que expresa r en términos de k y la que expresa w en términos de k. (Sugerencia: aplica los resultados del ejercicio 3).

5. Sea $Y = F(K, L)$ una función de producción doblemente diferenciable con rendimientos constantes de escala. En ese caso, se tiene que: (i) $F_K K + F_L L = Y$; (ii) F_L y F_K son homogéneas de grado 0; (iii) F_L y F_K dependen sólo de K/L; (iv) $F_{LK}K + F_{LL}L = 0$ y $F_{KK}K + F_{KL}L = 0$ (donde F_{KL} es la derivada de F_K con respecto a L y F_{LK} es la derivada de F_L con respecto a K); y (v) $F_{KL} = F_{LK}$. Verifica todas estas propiedades para el caso de la función de producción Cobb-Douglas $Y = F(K, L) = A{\cdot}K^{\alpha}{\cdot}L^{1-\alpha}$, con $0 < \alpha < 1$ y $A > 0$.

6. (i) En el modelo de Solow sin crecimiento de la población ni progreso tecnológico, muestra que $f(k)/k$ es una función estrictamente decreciente. (ii) ¿Qué importancia tiene este hecho para el modelo?

7. (i) En el modelo de Solow sin crecimiento de la población ni progreso tecnológico, demuestra que, si $k_0 < k^*$, entonces la secuencia de salarios $\{w_t\}$ es una secuencia creciente en tanto que la secuencia $\{R_t\}$ de precios del factor capital es decreciente ($k^* \neq 0$ es el valor de k en el estado estacionario). (ii) Interpreta económicamente la razón de esta evolución. (iii) Muestra que $\{w_t\}$ es decreciente y $\{R_t\}$ creciente si $k_0 > k^*$.

8. Considera el modelo de Solow sin crecimiento de la población ni progreso tecnológico con $y = k^{1/3}$, tasa de depreciación 0'1 y tasa de ahorro 0'4. (i) Calcula los valores de la producción per cápita, el consumo per cápita, la inversión per cápita y la depreciación per cápita en el estado estacionario. (ii) Señala estos valores en una representación gráfica del modelo. (iii) Indica en la representación gráfica cómo variarían esos valores si (a) la tasa de depreciación aumentara; (b) la tasa de ahorro aumentara; (c) se produjeran simultánemante (a) y (b). (iv) Obtén la tasa de ahorro y el consumo per cápita correspondientes a la regla de oro. (v) Representa gráficamente la tasa de crecimiento de la relación capital-trabajo k en función de k.

9. Impacto de la diferencia de productividades entre países. En el modelo de Solow sin crecimiento de la población ni progreso tecnológico hay dos países. La función de producción (expresada en términos per cápita) de uno de ellos es $f(k)$; la del otro, $g(k) = \lambda \cdot f(k)$, con $\lambda > 0$. La interpretación es que el país con función g es λ veces más productivo que el país con función f. Para la variable x, sea x_h el valor de x en el país con función $h \in \{f, g\}$. (i) Demuestra que $k^*_g > k^*_f$ y que $y^*_g > y^*_f$. (ii) Interpreta los resultados.

10. Sea el modelo de Solow sin crecimiento de la población ni progreso tecnológico en el que $F(K, L, A) = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}$, con $0 < \alpha < 1$ y $A > 0$. Determina el cambio que provoca en k^*, y^* y c^*: (i) una duplicación de δ; (ii) la reducción de s a la mitad; (iii) la reducción de A a la mitad; (iv) de (i) y (ii) a la vez; (v) de (ii) y (iii) a la vez.

11. En el modelo de Solow sin crecimiento de la población ni progreso tecnológico, muestra que la tasa de ahorro de la regla de oro satisface $s_{\text{ORO}} = [\, k^*(s_{\text{ORO}}) \cdot f\,'(k^*(s_{\text{ORO}}))\,] / f(k^*(s_{\text{ORO}}))$, interpreta este resultado e indica el efecto sobre la proporción de la renta de la economía que reciben las familias de un aumento en s_{ORO}.

12. El modelo de Solow con crecimiento de la población y progreso tecnológico. Determina la ecuación en diferencias que establece la dinámica del capital per cápita, la fórmula del capital per cápita en el estado estacionario y la fórmula de la tasa de ahorro de la regla de oro cuando la población crece a la tasa constante $n > 0$, la tecnología se acumula a la tasa constante $a > 0$, de manera que $L_{t+1} = (1 + n)L_t$ y $A_{t+1} = (1 + a)A_t$ y la función de producción toma la forma $Y_t = F(K_t, A_t \cdot L_t)$. [Sugerencia. La forma de F permite medir el factor trabajo en unidades de eficiencia, por lo que una dotación L_t de factor trabajo equivale, en términos productivos, a tener la dotación $A_t \cdot L_t$. Esta interpretación aconseja definir k como K/AL e y como Y/AL.]

13. Verifica que los tres tipos de progreso tecnológico neutral (en el sentido de Harrod, de Hicks y de Solow) son equivalentes en la función de producción Cobb-Douglas $F(K, L, A) = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}$, con $0 < \alpha < 1$ y $A > 0$.