# Ejemplo del modelo de generaciones solapadas

## Descripción de la economía

1. Cada unidad del bien sólo puede existir en un período de tiempo.

2. Todas las generaciones $t \geq 1$ son idénticas. Cada generación está formada por dos grupos: G1 y G2. Cada grupo tiene $n$ miembros.

3. La dotación de cada miembro de G1 es $(w,\ w)$. La dotación de cada miembro de G2 es $(\delta \cdot w,\ 0)$, donde $w > 0$ y $\delta > 1$. El parámetro $\delta$ mide el número de veces que un individuo jovenn de G2 es más rico que un individuo jovenn de G1.

4. Función de utilidad de cada individuo $i$ joven en el período $t$: $u_i(t) = c_i(t) \cdot c_i(t+1)$.

## Pregunta 1. Determina el equilibrio general competitivo de la economía.

• **Hay dos mercados en la economía**: el mercado (de consumo) del bien y el mercado de préstamos (del bien). Ambos se asumen competitivos.

La condición de equilibrio del mercado del bien en el período $t$ establece que el consumo total del bien en el período $t$ coincide con la dotación total del bien en el mismo período $t$.

Con $i \in \{1, 2\}$, se designa por $c_i$ el consumo que, en $t$, realiza un miembro joven del grupo G$i$ y por $c_i{}'$ el consumo que, en $t$, realiza un miembro mayor del grupo G$i$.

El consumo total en $t$ es el consumo que en $t$ realizan los jóvenes de cada grupo ($n \cdot c_1 + n \cdot c_2$) más el consumo que en $t$ realizan los mayores de cada grupo ($n \cdot c_1{}' + n \cdot c_2{}'$).

La dotación total de bien en $t$ es la dotación de los jóvenes ($n \cdot w + n \cdot \delta \cdot w$) más la dotación de los mayores ($n \cdot w$).

En resumen, la **condición de equilibrio del mercado del bien** es

$$n \cdot c_1 + n \cdot c_2 + n \cdot c_1{}' + n \cdot c_2{}' = n \cdot w + n \cdot \delta \cdot w + n \cdot w$$

o, simplificando,

$$\boxed{c_1 + c_2 + c_1' + c_2' = w \cdot (2 + \delta)\,.}$$

La condición de equilibrio del mercado de préstamos en el período $t$ dice que la oferta total de préstamos en el período $t$ coincide con la demanda total de préstamos en el mismo período $t$.

Con $i \in \{1, 2\}$, se designa por $l_i$ la cantidad de bien que, en $t$, un miembro joven del grupo G$i$ decide prestar o tomar a préstamo en el mercado de préstamos.

Cuando $l_i > 0$ se interpreta que el individuo $i$ presta el (ofrece un préstamo del) bien ($i$ és prestamista). Cuando $l_i < 0$ se interpreta que el individuo $i$ toma a préstamo (demanda un préstamo del) bien ($i$ es prestatario).

Para que exista el mercado de préstamos deben cumplirse dos condiciones. Primera, no tener $l_1 = 0$ o $l_2 = 0$. Tener $l_i = 0$ equivale a que los miembros del grupo G$i$ no estén interesados en participar en el mercado. Segunda, que los signos de $l_1$ y $l_2$ sean diferentes: los individuos representativos de cada grupo no pueden ser ambos prestamistas ($l_i > 0$) o ambos prestatarios ($l_i < 0$).

La cantidad total de bien que presta o toma a préstamo G1 es

$$n \cdot l_1.$$

La cantidad total de bien que presta o toma a préstamo G2 es

$$n \cdot l_2.$$

Uno de los valores será positivo y representará la oferta total de préstamos. El otro valor será negativo y representarà (en valor absoluto) la demanda total de préstamos. De aquí que, en el equilibrio del mercado de préstamos,

$$n \cdot l_1 = -n \cdot l_2$$

o, equivalentmente,

$$n \cdot l_1 + n \cdot l_2 = 0\,.$$

La simplificación de la ecuación anterior define la **condición de equilibrio del mercado de préstamos**:

$$\boxed{l_1 + l_2 = 0\,.}$$

• En el equilibrio general competitivo de la economía, los dos mercados están en equilibrio. Pero para determinar el equilibrio general una de las dos ecuaciones que definen las condiciones de equilibrio es redundante.

Se trata a continuación de comprobar que cada condición de equilibrio implica la otra:

$$c_1 + c_2 + c_1' + c_2' = w \cdot (2 + \delta) \quad \Leftrightarrow \quad l_1 + l_2 = 0 \,.$$

Las restricciones presupuestarias dels miembros de G1 son (donde $R$ es el tipo de interés bruto en el mercado de préstamos)

$$\begin{array}{ll} \text{de joven} & c_1 + l_1 = w \\ \text{de mayor} & c_1' = w + R \cdot l_1 \,. \end{array}$$

Por tanto,

$$c_1 = w - l_1 \,.$$

Las restricciones presupuestarias de los miembros de G2 son (donde $\delta > 1$ es el grado de desigualdad de la renta de los grupos de jóvenes)

$$\begin{array}{ll} \text{de joven} & c_2 + l_2 = \delta \cdot w \\ \text{de mayor} & c_2' = R \cdot l_2 \,. \end{array}$$

Por consiguiente,

$$c_2 = \delta \cdot w - l_2 \,.$$

La conclusión es que

$$c_1 + c_2 + c_1' + c_2' = (w - l_1) + (\delta \cdot w - l_2) + (w + R \cdot l_1) + R \cdot l_2$$

o, reordenando,

$$c_1 + c_2 + c_1' + c_2' = w \cdot (2 + \delta) + (R - 1) \cdot (l_1 + l_2) \,. \qquad (1)$$

Primera parte de la demostración de la equivalencia: **equilibrio en el mercado de préstamos implica equilibrio en el mercado del bien**.

Formalmente, se tracta de demostrar que $(l_1 + l_2 = 0) \Rightarrow \left( c_1 + c_2 + c_1' + c_2' = w \cdot (2 + \delta) \right)$. A tal fin, supongamos que $l_1 + l_2 = 0$. Por (1), el término $(R - 1) \cdot (l_1 + l_2)$ se anula. El resultado es que $c_1 + c_2 + c_1' + c_2' = w \cdot (2 + \delta)$, que es la condición de equilibrio del mercado del bien.

Segunda parte de la demostración de la equivalencia: **equilibrio en el mercado del bien implica equilibrio en el mercado de préstamos**.

Ahora hay que demostrar que $(c_1 + c_2 + c_1' + c_2' = w \cdot (2 + \delta)) \Rightarrow (l_1 + l_2 = 0)$. Así que supongamos que $c_1 + c_2 + c_1' + c_2' = w \cdot (2 + \delta)$. Por (1) se concluye que $(R - 1) \cdot (l_1 + l_2) = 0$. Son dos los casos posibles.

Caso 1: $R \neq 1$. En este caso $(R - 1) \cdot (l_1 + l_2) = 0$ implica $l_1 + l_2 = 0$, que es la condición de equilibrio del mercado de préstamos.

Caso 2: $R = 1$. Que $R = 1$ abre la posibiliad de que $c_1 + c_2 + c_1' + c_2' = w \cdot (2 + \delta)$ (equilibrio en el mercado del bien) pero $l_1 + l_2 \neq 0$ (desequilibrio en el mercado de préstamos). Para descartar esta posibilidad, hay que invocar la presunción de que todas las variables ( $c_1, c_2, l_1, l_2, \ldots$ ) que son objeto de decisión de los individuos se han determinado mediante un proceso de maximización de la utilidad de los individuos. De hecho, $R = 1$ quiere decir que prestar (tomar a préstamo) una unidad del bien en $t$ significa recibir (pagar) una en $t + 1$. Los miembros de G1 tienen la misma cantidad del bien en $t$ y $t + 1$. demás, valoran igualmente una unidad de consum en $t$ que en $t + 1$. Como consecuencia, la maximización de su función de utilidad conlleva que no estén interesados en participar en el mercado de préstamos: su utilidad ya es máxima con la dotación que tienen. Dado que $l_1 = 0$, la conclusión de este razonamiento es que no hay mercado de préstamos. Esta conclusión contradice la hipótesis de que el mercado de préstamos existe.

Habiendo quedado probado que, para calcular el equilibrio general tanto puede emplearse

$$l_1 + l_2 = 0$$

como

$$c_1 + c_2 + c_1' + c_2' = w \cdot (2 + \delta)$$

adoptemos la primera condición.

Para hacerla operativa hay que determinar $l_1$ y $l_2$. Estos valors se obtienen de la maximización de utilidad de cada individuo sujeta a su restricción presupuestaria vital.

## • Grupo G1

Las restricciones presupuestarias de los miembros de G1 son

$$\begin{array}{ll} \text{de joven} & c_1 + l_1 = w \\ \text{de mayor} & c_1' = w + R \cdot l_1\,. \end{array}$$

Despejando $l_1$ en la segunda restricción, $l_1 = \frac{c_1'}{R} - \frac{w}{R}$. Substituyendo en la primera, se obtiene la restricción presupuestaria vital:

$$c_1 + \frac{c_1'}{R} = w + \frac{w}{R}\,. \tag{2}$$

Cada miembro de G1 escoge el par $(c_1, c_1')$ que maximiza $u_1 = c_1 \cdot c_1'$ sujeto a (2). Este problema puede resolverse mediante el lagrangiano

$$L_1 = c_1 \cdot c_1' + \lambda \cdot \left(w + \frac{w}{R} - c_1 - \frac{c_1'}{R}\right).$$

Las condiciones de primer orden son:

$$0 = \frac{\partial L_1}{\partial c_1} = c_1' - \lambda \qquad 0 = \frac{\partial L_1}{\partial c_1'} = c_1 - \frac{\lambda}{R} \qquad 0 = \frac{\partial L_1}{\partial \lambda} = w + \frac{w}{R} - c_1 - \frac{c_1'}{R}\,.$$

De la primera condición, $\lambda = c_1'$. Substituyendo en la segunda, $c_1 = \frac{c_1'}{R}$. Substituyendo en la tercera, $0 = w + \frac{w}{R} - c_1 - c_1$. En conclusión, la **función de demanda de consumo de un individuo joven de G1** es

$$\boxed{c_1 = \frac{w}{2} + \frac{w}{2 \cdot R}.}$$

De la restricción presupuestaria de joven $c_1 + l_1 = w$ se deduce que $l_1 = w - c_1$. Por tanto, la **función de demanda neta de préstamos de un individu joven de G1** és

$$\boxed{l_1 = \frac{w}{2} - \frac{w}{2 \cdot R}.}$$

En concreto, la función $l_1$ se interpreta como una función de demanda si $l_1 < 0$ y como una función de oferta si $l_1 > 0$.

Definiendo la función de ahorro de un individuo (joven) como su dotación (de joven) que queda disponible un vez pagados los impuestos y recibidas las transferencias (ambos cero en este ejemplo) menos su consumo, la **función de ahorro de un individuo joven de G1** es $s_1 = w - c_1$. Esta función, en este caso, coincide con la función de oferta de préstamos.

$$\boxed{s_1 = \frac{w}{2} - \frac{w}{2 \cdot R}}$$

**• Grupo G2**

Las restricciones presupuestarias de los miembros de G2 son

$$\begin{array}{ll} \text{de joven} & c_2 + l_2 = \delta \cdot w \\ \text{de mayor} & c_2' = R \cdot l_2 \,. \end{array}$$

Despejando $l_2$ en la segunda restricció, $l_2 = c_2'/R$. Substituyendo en la primera, se obtiene la restricción presupuestaria vital:

$$c_2 + \frac{c_2'}{R} = \delta \cdot w \,. \tag{3}$$

Cada miembro de G2 escoge el par $(c_2, c_2')$ que maximiza $u_1 = c_1 \cdot c_1'$ sujeto a (3). Este problema puede ser resuelto construyendo el lagrangiano

$$L_2 \;=\; c_2 \cdot c_2' \;+\; \lambda \cdot \left( \delta \cdot w \;-\; c_2 \;-\; \frac{c_2'}{R} \right).$$

Las condiciones de primer orden son:

$$0 = \frac{\partial L_2}{\partial c_2} = c_2' - \lambda \qquad 0 = \frac{\partial L_2}{\partial c_2'} = c_2 - \frac{\lambda}{R} \qquad 0 = \frac{\partial L_2}{\partial \lambda} = \delta \cdot w - c_2 - \frac{c_2'}{R} \,.$$

De la primera condición, $\lambda = c_2'$. Substituyendo en la segunda, $c_2 = \frac{c_2'}{R}$. Substituyendo en la tercera, $0 = \delta \cdot w - c_2 - c_2$. En resumen, la **función de demanda de consumo de un individuo joven de G2** es

$$\boxed{c_2 = \frac{\delta \cdot w}{2} \,.}$$

De la restricción presupuestaria de joven $c_2 + l_2 = \delta \cdot w$ se deduce que $l_2 = \delta \cdot w - c_2$. Por todo ello, la **función de demanda neta de préstamos de un individu joven de G2** es

$$\boxed{l_2 = \frac{\delta \cdot w}{2} \,.}$$

En este caso, dado que $l_2$ toma siempre un valor positivo, se interpreta $l_2$ como función de oferta de préstamos. La **función de ahorro de un individuo joven de G2** es $s_2 = \delta \cdot w - c_2$, que coincide con la función $l_2$.

• **Cálculo del equilibrio general**

La variable clave en el equilibrio general es el precio $R$ de un préstamo.

[El precio del bien puede entenderse que siempre está normalizado a la unidad puesto que en cada período sólo hay un bien mediante el que expresar los precios. En cambio, el precio de un préstamo no puede ser siempre normalizado a uno porque $R$ es un precio relativo entre el bien en el período $t$ y el bien en el período $t+1$. La posibilidad de tener el mismo bien en dos momentos del tiempo implica, en la práctica, tener dos bienes. Los bienes se diferencian por sus características y su disponibilidad temporal es una de ellas.]

El valor de $R$ lo determina la condición de equilibrio del mercado de préstamos: $l_1 + l_2 = 0$. En la medida en que $l_1 = s_1$ y $l_2 = s_2$, la condición de equilibrio del mercado de préstamos es equivalente a $s_1 + s_2 = 0$. Ésta es equivalente a $n \cdot (s_1 + s_2) = 0$. El término $n \cdot (s_1 + s_2)$ representa el ahorro agregado $S$ de todos los individuos en cada período. Por esta razón, también podría emplearse la condición

$$S = 0$$

para calcular el valor de $R$ en el equilibrio general.

Recuperando la condición $l_1 + l_2 = 0$, en el equilibrio general

$$\left(\frac{w}{2} - \frac{w}{2 \cdot R}\right) + \frac{\delta \cdot w}{2} = 0$$

Despejando $R$, se obtiene el valor del **tipo de interés bruto en el equilibrio general**:

$$\boxed{R = \frac{1}{1+\delta}.}$$

Es destacable que $R$ no depende de la riqueza o dotación $w$. Tampoco depende del tamaño $n$ de los grups. El parámetro $\delta$ es una medida de la desigualdad entre la riquesa de un joven de G2 (el más rico) y un joven de G1. En particular, $R$ disminuye cuando la desigualdad de la riqueza entre los dos grups se incrementa $\left(\frac{\partial R}{\partial \delta} = -\frac{1}{(1+\delta)^2} < 0\right)$.

Una vez determinado $R$, se puede calcular el resto de variables que definen el equilibrio general: $c_1$, $c_2$, $c_1'$ y $c_2'$ (recordando que $c_1 = \frac{c_1'}{R}$ y que $c_2 = \frac{c_2'}{R}$).

$$c_1 = \frac{w}{2} + \frac{w}{2 \cdot R} = w + \frac{\delta \cdot w}{2} = \frac{w}{2} \cdot (2 + \delta)$$

$$c_2 = \frac{\delta \cdot w}{2}$$

$$c_1' = c_1 \cdot R = \frac{w \cdot (2 + \delta)}{2} \cdot \frac{1}{1 + \delta} = \frac{w}{2} \cdot \left(\frac{2 + \delta}{1 + \delta}\right)$$

$$c_2' = c_2 \cdot R = \frac{\delta \cdot w}{2} \cdot \frac{1}{1 + \delta} = \frac{w}{2} \cdot \left(\frac{\delta}{1 + \delta}\right)$$

Estos resultados indican que un incremento de la desigualad (del parámetro $\delta$) hace

(i) aumentar el consumo de los jóvenes, ya que $\frac{\partial c_1}{\partial \delta} = \frac{w}{2} > 0$ y $\frac{\partial c_2}{\partial \delta} = \frac{w}{2} > 0$;

(ii) disminuir el consumo de los mayores del grupo G1, dado que

$$\frac{\partial c_1{}'}{\partial \delta} = -\frac{w}{2} \cdot \left(\frac{1}{1 + \delta}\right)^2 = -\frac{w \cdot R^2}{2} < 0$$

(iii) pero aumentar el consumo de los mayores del grupo G2, en la medida que

$$\frac{\partial c_2{}'}{\partial \delta} = \frac{w}{2} \cdot \left(\frac{1}{1 + \delta}\right)^2 = \frac{w \cdot R^2}{2} > 0\,.$$

**Pregunta 2. Determina el equilibrio general competitivo de la economía si, cada período, los jóvenes de ambos grupos están obligados a contribuir con la cuarta parte de su dotación a un fondo que se distribuye igualitariamente entre los mayores del mismo período.**

**Pregunta 3. Cada período, los jóvenes de ambos grupos están obligados a contribuir con una cantidad fija $\tau$ de su dotación a un fondo que se distribuye igualitariamente entre los mayores del mismo período. Determina el valor de $\tau$ que maximiza el consumo de los mayores del grupo G2 en el equilibrio general competitivo de la economía.**