Versió més simple del model de generacions encavalcades

Descripció de l'economia

1. Cada unitat de bé només pot existir en un període de temps. Els individus de l'economia només poden consumir o prestar les unitats de bé de què disposin.

2. Totes les generacions $t \geq 1$ són idèntiques (la generació 0 es podria definir per analogia). Cada generació està formada per dos grups: el grup 1 i el grup 2.

3. Grup 1. Està integrat per $N_1 = 300$ membres. Cada membre jove de la generació t disposa de la dotació $(1, 0)$ i té $u_1 = c_1(t) \cdot [c_1(t+1)]^2$ com a funció d'utilitat.

4. Grup 2. Està integrat per $N_2 = 100$ membres. Cada membre jove i de la generació t disposa de la dotació $(0, 2)$ i té $u_2 = [c_2(t)]^2 \cdot c_2(t+1)$ com a funció d'utilitat.

Qüestions

1. Quin és l'equilibri general competitiu de l'economia?

2. Verifica que el compliment de la condició d'equilibri del que podria denominar-se "mercat (de consum) del bé" és equivalent al compliment de la condició d'equilibri del mercat de préstecs.

3. Partint de l'assignació e de l'equilibri general, considera la següent mesura: per a cada període $t \geq 1$, cadascun dels 400 individus joves s'emparella amb un individu gran (de manera que tots els grans quedin emparellats) i li transfereix $\varepsilon > 0$ unitats del bé. Existeix algun valor d'ε que faci que l'assignació resultant sigui Pareto-superior a e?

Resposta a la qüestió 1

La taxa d'interès R s'expressa en funció de t perquè s'entén que la taxa es determina en el moment de fer el préstec (en t). Atès que la taxa es fa efectiva en t, també podria expressar-se en funció de $t+1$ i escriure $R(t+1)$.

Restricció pressupostària de cada membre jove del grup 1 (generació t)

$$c_1(t) + l_1(t) = w_1(t)$$

Restricció pressupostària de cada membre gran del grup 1 (generació t)

$$c_1(t+1) = w_1(t+1) + R(t) \cdot l_1(t)$$

Restricció pressupostària vital de cada membre del grup 1 (generació *t*)

$$c_1(t) + \frac{c_1(t+1)}{R(t)} = w_1(t) + \frac{w_1(t+1)}{R(t)}$$

Restricció pressupostària de cada membre jove del grup 2 (generació *t*)

$$c_2(t) + l_2(t) = w_2(t)$$

Restricció pressupostària de cada membre gran del grup 2 (generació *t*)

$$c_2(t+1) = w_2(t+1) + R(t) \cdot l_2(t)$$

Restricció pressupostària vital de cada membre del grup 2 (generació *t*)

$$c_2(t) + \frac{c_2(t+1)}{R(t)} = w_2(t) + \frac{w_2(t+1)}{R(t)}$$

En endavant, la coma volada ($'$) indicarà una variable referida al moment $t+1$ i la seva absència significarà que la variable corresponent es refereix al moment t. Seguint aquesta convenció, la restricció pressupostària vital d'un membre del grup 1 s'expressaria com $c_1 + \frac{c_1'}{R} = w_1 + \frac{w_1'}{R}$.

Funció de consum d'un jove del grup 1

Per a maximitzar u_1, cal que $\frac{\partial u_1/\partial c_1}{\partial u_1/\partial c_1'} = R(t)$. Com a resultat, $c_1 = \frac{c_1'}{2 \cdot R}$. Emprant la restricció pressupostària vital, $c_1 + 2 \cdot c_1 = w_1 + \frac{w_1'}{R}$. La funció de demanda de consum és $c_1 = \frac{w_1}{3} + \frac{w_1'}{3 \cdot R}$.

Funció d'estalvi d'un jove del grup 1

L'estalvi d'un jove del grup 1 es defineix, en aquest model, com $s_1 = w_1 - c_1$. Sabent que $c_1 = \frac{w_1}{3} + \frac{w_1'}{3 \cdot R}$, resulta que $s_1 = \frac{2 \cdot w_1}{3} - \frac{w_1'}{3 \cdot R}$.

Funció d'estalvi agregat del grup 1

La funció d'estalvi agregat del grup 1 és $S_1 = N_1 \cdot s_1 = N_1\left(\frac{2 \cdot w_1}{3} - \frac{w_1'}{3 \cdot R}\right)$.

Funció de consum d'un jove del grup 2

Per a maximitzar u_2, cal que $\frac{\partial u_2/\partial c_2}{\partial u_2/\partial c_{12}'} = R(t)$. Per consegüent, $c_2 = \frac{2 \cdot c_1'}{R}$. Fent servir la restricció pressupostària vital, $c_2 + \frac{c_2}{2} = w_2 + \frac{w_2'}{R}$. La funció de demanda de consum és $c_2 = \frac{2 \cdot w_2}{3} + \frac{2 \cdot w_2'}{3 \cdot R}$.

Funció d'estalvi d'un jove del grup 2

L'estalvi d'un jove del grup 2 es defineix, en aquest model, com $s_2 = w_2 - c_2$. Atès que $c_2 = \frac{2 \cdot w_2}{3} + \frac{2 \cdot w_2'}{3 \cdot R}$, s'obté $s_2 = \frac{w_2}{3} - \frac{2 \cdot w_2'}{3 \cdot R}$.

Funció d'estalvi agregat del grup 2

La funció d'estalvi agregat del grup 2 és $S_2 = N_2 \cdot s_2 = N_2 \left(\frac{w_2}{3} - \frac{2 \cdot w_2'}{3 \cdot R}\right)$.

Funció d'estalvi agregat

La funció d'estalvi agregada és $S = S_1 + S_2$. En conseqüència,

$$S = N_1 \left(\frac{2 \cdot w_1}{3} - \frac{w_1'}{3 \cdot R}\right) + N_2 \left(\frac{w_2}{3} - \frac{2 \cdot w_2'}{3 \cdot R}\right).$$

Val la pena destacar que $\frac{\partial S}{\partial R} = \frac{N_1 \cdot w_1'}{3 \cdot R^2} > 0$. Això indica que canvis en la taxa d'interès mouen l'estalvi agregat en el mateix sentit (exemple: un augment d'R provoca un increment d'S).

D'altra banda, el signe de $\frac{\partial S}{\partial N_1}$ depèn de si $\frac{2 \cdot w_1}{3}$ és més gran, igual o inferior a $\frac{w_1'}{3 \cdot R}$. Amb les dades del problema, $w_1 = 1$ i $w_1' = 0$. Per tant, $\frac{\partial S}{\partial N_1} = \frac{2}{3} > 0$: que hi hagi més gent al grup 1 fa apujar el volum agregat d'estalvi.

De manera similar, tenint $w_2 = 0$ i $w_2' = 2$, $\frac{\partial S}{\partial N_2} = -\frac{4}{3 \cdot R} < 0$: afegir més membres al grup 2 fa minvar l'estalvi agregat. Aquest resultat i l'anterior no hauria de sorprendre. En primer lloc, els membres (joves) del grup 2 seran prestataris al mercat de préstecs, atès que no tenen dotació de joves. En conseqüència, incrementar el nombre de membres del grup 2 redueix l'estalvi (entès com a oferta de préstec del bé). En segon lloc, els joves del grup 1 faran de prestadors al mercat, perquè, en no tenir dotació de grans, han d'estalviar. Més gent al grup 1, més oferta de bé en forma de préstec.

Finalment, per a tot $i \in \{1, 2\}$, $\frac{\partial S}{\partial w_i} > 0$ (com més ric és un jove, més estalvi) i $\frac{\partial S}{\partial w_i'} < 0$ (com més pobre és un individu gran, més estalvi).

Condició d'equilibri general

$$S = 0$$

Taxa d'interès d'equilibri

S'obté d'aïllar R a la condició $S = 0$. En aquest cas,

$$R = \frac{N_1 \cdot w_1' + 2 \cdot N_2 \cdot w_2'}{2 \cdot N_1 \cdot w_1 + N_2 \cdot w_2} . \tag{1}$$

La fórmula (1) permet de determinar l'impacte sobre la taxa d'interès de variacions en les dimensions dels dos grups i de canvis en la riquesa dels individus. En particular, un increment en la riquesa dels individus grans ($w_1{}'$ o $w_2{}'$) fa apujar la taxa d'interès d'equilibri. Intuïtivament, com més ric (*ceteris paribus*) sigui un individu gran menys necessitat té l'individu d'estalviar de jove i, conseqüentment, menor sera l'oferta de préstecs. Això farà més costós aconseguir un préstecs i, en correspondència, més elevada serà la taxa d'interès.

A la inversa, com més ric (*ceteris paribus*) sigui un individu jove més capacitat/necessitat d'estalvi. Com a resultat, més oferta de préstecs hi haurà, d'on es desprén que la taxa d'interès tendirà a ser més baixa.

Càlcul de la taxa d'equilibri

Introduint els valors $N_1 = 300$, $N_2 = 100$, $w_1 = 1$, $w_1{}' = w_2 = 0$ i $w_2{}' = 2$ en la fórmula d' R, s'obté $R = \frac{400}{600} = \frac{2}{3}$. Aquest valor comporta una taxa d'interès neta negativa: $r = R - 1 = -\frac{1}{3}$. Que la taxa neta sigui negativa està causat pel fet que tenir (quedar-se) una unitat del bé avui no garanteix tenir-la demà: tenir/quedar-se una unitat avui no garanteix res demà.

Quan retenir una unitat avui permet de conservar-la i disposar d'ella demà implica que la taxa d'interès bruta R no pot ser inferior a 1: prestant una unitat avui no pot resultar en tenir-ne menys d'una unitat demà perquè retenint la unitat, sense prestar-la, assegura una taxa bruta igual a 1 (i, *a fortiori*, una taxa d'interès neta no negativa).

Contràriament, en el model present, no queda garantit que la taxa bruta sigui al menys la unitat, ja que no hi ha l'opció d'acumular bé i transferir-lo, sense passar pel mercat de préstecs, d'un període cap a un altre. El que sí és segur és que la taxa d'interès bruta R no serà mai negativa en equilibri. Que $R < 0$ comporta que avui fas un préstec i demà, en comptes de rebre un pagament, n'has de fer un el pagament. En aquestes circumstàncies pot evitar-se el pagament demà no fent cap préstec avui. El cas extrem admissible seria $R = 0$: per cada unitat que prestes avui no reps res demà. Tal és precissament la situació per defecte que crea el model: tenir bé avui no assegura tenir-lo demà perquè el bé no té la capacitat d'existir més d'un període.

En suma, $R < 1$ està causat pel fet que <u>els individus viuen més períodes</u> (dos períodes) <u>que els béns</u> (un període). Amb tot, pot comprovar-se que el valor $R = \frac{2}{3}$ és correcte: n'hi ha prou amb verificar que oferta i demanda agregades de préstecs coincideix quan $R = \frac{2}{3}$. Donat aquest valor, un jove del grup 1 estalvia $s_1 = \frac{2 \cdot w_1}{3} - \frac{w_1{}'}{3 \cdot R} = \frac{2}{3}$ i tot el grup estalvia $S_1 = N_1 \cdot s_1 = 200$. Aquest és el valor de l'oferta agregada de préstecs quan $R = \frac{2}{3}$ (en realitat, aquesta oferta no depèn d' R si $w_1' = 0$).

D'altra banda, amb $R = \frac{2}{3}$, $s_2 = \frac{w_2}{3} - \frac{2 \cdot w_2'}{3 \cdot R} = -2$ i $S_2 = N_2 \cdot s_2 = -200$. Interpretant un valor negatiu (oferta negativa) com a demanda, la demanda agregada de préstecs quan $R = \frac{2}{3}$ és 200. La conclusió és que $R = \frac{2}{3}$ iguala oferta i demanda de préstecs i, per tant, és el valor d'equilibri de cada període (atès que l'economia és la mateixa període a període).

[La fórmula (1) seria útil ara per a determinar l'efecte de canvis en la dimensió dels grups o en riquesa dels individus. Per exemple, si els dos grups tinguessin el mateix nombre de membres i es mantinguessin les dotacions, R seria igual a la unitat.]

Assignació de consum

El vector de consum d'equilibri, cada període, d'un membre jove del grup 1 és $(c_1, c_1') = \left(\frac{w_1}{3} + \frac{w_1'}{3 \cdot R},\ 2 \cdot R \cdot c_1\right) = \left(\frac{1}{3},\ \frac{4}{9}\right)$. El vector de consum d'equilibri, cada període, d'un membre jove del grup 2 és $(c_2, c_2') = \left(\frac{2 \cdot w_2}{3} + \frac{2 \cdot w_2'}{3 \cdot R},\ \frac{1}{2} \cdot R \cdot c_2\right) = \left(2,\ \frac{2}{3}\right)$. La Taula 1 representa aquests valors (entre parèntesi, la dotació).

període t		
individus grans	G1	4/9 (0)
	G2	2/3 (2)
individus joves	G1	1/3 (1)
	G2	2 (0)

Taula 1. Consum de cada individu en cada període t

Sense mercat de préstecs (autarquia) els vectors serien les dotacions: $(c_1, c_1') = (1, 0)$ i $(c_2, c_2') = (0, 2)$. Òbviament, la utilitat de tots els individus joves és de zero sense mercat i és positiva amb mercat. L'exemple mostra que l'intercanvi en un context competitiu pot millorar el benestar de tothom. La Taula 2 indica el consum total de cada grup amb i sense mercat.

sense mercat			**amb mercat**		
perfil	grup	consum total	perfil	grup	consum total
grans	G1	0	grans	G1	400/3
	G2	200		G2	200/3
joves	G1	300	joves	G1	100
	G2	0		G2	200
	TOTAL	500		TOTAL	500

Taula 2. Consum agregat de cada grup en cada període t amb i sense mercat

Resposta a la qüestió 2

És casual, en la solució de mercat de la Taula 2, que el consum agregat de cada perfil (gran i jove) coincideixi amb la dotació agregada del perfil (200 per als grans i 300 per als joves)? La resposta a aquesta pregunta està relacionada amb la resposta a la qüestió 2.

Interpretant que hi ha un mercat (de consum) del bé, la condició d'equilibri d'aquest mercat és que el consum total del bé és igual a la dotació total del bé. Aquesta condició deriva dels fets que el bé no sobreviu més d'un període i que, per la maximització d'utilitat dels individus, cap unitat del bé no es deixarà sense consumir. Formalment (on, per a simplificar, s'ha fixat el valor que prenen alguns paràmetres):

$$300 \cdot (c_1 + c_1') + 100 \cdot (c_2 + c_2') = 300 \cdot (w_1 + w_1') + 100 \cdot (w_2 + w_2')\,.$$

L'import $300 \cdot (c_1 + c_1{}')$ representa el consum total fet, en cada període, pel grup 1; $100 \cdot (c_2 + c_2{}')$, el consum fet pel grup 2; $300 \cdot (w_1 + w_1{}')$, la dotació total de bé del grup 1; i $100 \cdot (w_2 + w_2{}')$, la del grup 2. Reordenant,

$$300 \cdot c_1' + 100 \cdot c_2' = 300 \cdot w_1' + 100 \cdot w_2' + 300 \cdot (w_1 - c_1) + 100 \cdot (w_2 - c_2)$$

o

$$300 \cdot c_1' + 100 \cdot c_2' = 300 \cdot w_1' + 100 \cdot w_2' + (300 \cdot s_1 + 100 \cdot s_2)$$

o

$$300 \cdot c_1' + 100 \cdot c_2' = 300 \cdot w_1' + 100 \cdot w_2' + S. \qquad (2)$$

L'equació (2) expressa la condició d'equilibri en el mercat del bé. La condició d'equilibri en l'altre mercat de l'economia, el mercat de préstecs, és $S = 0$. La qüestió 2 demana comprovar que (2) és equivalent a $S = 0$: una condició es compleix si, i només si, es compleix l'altra. La prova passa per demostrar (3).

$$300 \cdot c_1' + 100 \cdot c_2' = 300 \cdot w_1' + 100 \cdot w_2' \qquad (3)$$

De fet, si (3) se satisfà aleshores tenir $S = 0$ implica que (2) es compleix. I si (2) es compleix quan (3) se satisfà, llavors resulta que $S = 0$. En resum, si la condició (3) és certa, el mercat del bé està en equilibri si, i només si, el mercat de préstecs està en equilibri.

Per a demostrar (3), interpretem què diu. La part esquerra, $300 \cdot c_1' + 100 \cdot c_2'$, equival al consum agregat de tots els individus grans. La part dreta, $300 \cdot w_1' + 100 \cdot w_2'$, representa la dotació agregada de tots els individus grans. És cert que el conjunt d'individus grans consumeixen exactament el total de la seva dotació, ni més ni menys?

Primera possibilitat: en equilibri general, pot el conjunt d'individus grans consumir menys de la seva dotació agregada? Si consumissin menys, hi ha dues possibilitats: que prestin el que no consumeixen o que, simplement, llencin part de la seva dotació. La segona opció és incompatible amb l'objectiu dels grans de maximitzar utilitat: consumint la part que es llençaria augmentarien la seva utilitat. La primera opció tampoc no és consistent amb la maximització d'utilitat, ja que els prestadors (que són grans) no estaran vius en el següent període per a rebre la recompensa pel sacrifici que fan avui (atès que fer un préstec comporta renunciar a consum present que faria augmentar la utilitat). Com a conclusió, no pot ser que els grans consumeixin menys de la seva dotació: essent el seu últim període, el millor ús que poden fer del que tenen és consumir-ho.

Segona possibilitat: en equilibri general, el conjunt d'individus grans consumir més de la seva dotació agregada? Per a fer possible que, com a conjunt, els grans consumeixin més del que tenen, cal que els joves prestin als grans. Però, per la hipòtesi que els joves també maximitzen la seva utilitat, no és una bona opció renunciar a consum present prestant als grans quan aquests no seran vius per a retornar el préstec. Un jove que presta a un gran fa un sacrifici del qual no obté recompensa. Per tant, millor no fer el sacrifici. De tot plegat es dedueix que el conjunt de grans no pot consumir més del que tenen.

Si, en equilibri, el conjunt de grans no pot consumir ni més ni menys del que tenen, s'ha de concloure que, en equilibri, els grans consumeixen exactament el total del que tenen. Això és precisament el que expressa (3). Havent demostrat la validesa de (3), pel raonament fet a l'inici de la pàgina, les condicions d'equilibri dels dos mercats de l'economia (del bé i de préstecs) són equivalents i, així, amb una n'hi ha prou per a determinar l'equilibri (com, d'altra banda, estableix la Llei de Walras).

Resposta a la qüestió 3

De la resposta a la qüestió 2 se'n deriva el fet que, en aquesta economia, no hi ha incentius a dur a terme transferències intergeneracionals. La qüestió 3 està motivada per la possibilitat que algú forcés a fer-les. Augmentaria la utilitat d'algun individu sense que cap altre no en perdés? Dit d'una altra manera: és l'assignació de consum d'equilibri Pareto-eficient? A continuació es demostra que no.

La Taula 1 presenta l'assignació de consum d'equilibri. La qüestió 3 demana comprovar si l'assignació de la Taula 3 proporciona més utilitat al algun individu que l'assignació de la Taula 1 i no en proporciona menys a cap. L'assignació de la Taula 3 s'ha obtingut de l'assignació de la Taula 1 fent que cada individu jove transfereixi a un individu gran ε unitats del bé (cap individu gran no pot rebre la transferència de dos de joves).

període t	grup	assignació amb transferències α	utilitat en α (amb ε = 0,1)	assignació d'equilibri e	utilitat de l'assignació e
individus grans	G1	$4/9+\varepsilon$	$u(4/9+0{,}1)$	$4/9$	$u(4/9)$
	G2	$2/3+\varepsilon$	$u(2/3+0{,}1)$	$2/3$	$u(2/3)$
individus joves	G1	$1/3-\varepsilon$	$\approx 16/243+0{,}003$	$1/3$	$16/243$
	G2	$2-\varepsilon$	$8/3+0{,}101$	2	$8/3$

Taula 3. Demostració de la Pareto-ineficiència de l'assignació d'equilibri (Taula 1)

L'assignació amb transferències α de la Taula 3 és realment una assignació, això és, la suma de les unitats de bé assignades coincideix amb la dotació agregada de l'economia. L'assignació α parteix de l'assignació d'equilibri e i simplement treu d'uns individus per a donar a d'altres. Cada jove transfereix ε i cada gran rep ε. Atès que hi ha el mateix nombre d'individus joves que de grans a cada període (400), les transferències són factibles i el que resulta és una assignació.

Tots els individus grans de tots els períodes tenen més bé en α que en e. Per tant, en el pas de l'assignació e a l'α tots els individus grans milloren (inclosos els de la generació 0).

Pel que fa a cada jove del grup 1, la seva utilitat en l'assignació e és $u_1\left(\frac{1}{3},\frac{4}{9}\right)=\frac{16}{243}\approx 0{,}065$ i la seva utilitat en l'assignació α és $u_1\left(\frac{1}{3}-\varepsilon,\ \frac{4}{9}+\varepsilon\right)=\frac{16}{243}+\frac{8}{81}\varepsilon-\frac{5}{9}\varepsilon^2-\varepsilon^3$. Per a què la utilitat en α sigui més gran, cal que $\frac{8}{81}\varepsilon-\frac{5}{9}\varepsilon^2-\varepsilon^3>0$. Equivalentment, (4) és necessari.

$$8-45\varepsilon-81\varepsilon^2>0 \tag{4}$$

En relació amb el grup 2, la utilitat de cada jove en l'assignació e és $u_2\left(2,\ \frac{2}{3}\right)=\frac{8}{3}\approx 2{,}66$ i la seva utilitat en l'assignació α és $u_2\left(2-\varepsilon,\ \frac{2}{3}+\varepsilon\right)=\frac{8}{3}+\frac{4}{3}\varepsilon-\frac{10}{3}\varepsilon^2+\varepsilon^3$. Per a què la utilitat en α sigui més gran, s'ha de tenir $\frac{4}{3}\varepsilon-\frac{10}{3}\varepsilon^2+\varepsilon^3>0$. Per tant, (5) s'ha de complir.

$$4-10\varepsilon+3\varepsilon^2>0 \tag{5}$$

Si ε = 0, (4) i (5) se satisfan. Donat que el valor del polinomi de la part esquerra de les dues desigualtats és funció contínua d'ε, per a un valor prou petit d'ε (per exemple, ε = 0,1) les dues desigualtats, (4) com (5), es compliran. La conclusió final és que l'assignació de consum d'equilibri e no és Pareto-eficient: tothom guanya en el pas d'e a α (amb ε = 0,1).