

Part 1

1.1. [5 punts] Altruïsme. Hi ha un únic bé que es pot acumular d'un període al següent. No hi ha producció. Cada període neixen n individus idèntics que viuen dos períodes consecutius. Els individus de cada període es numeren de l'1 a l' n , de manera que l'individu amb número i que neix en el període t és el pare de l'individu amb número i que neix en el període $t + 1$ (i aquest segon és el fill del primer).

La funció d'utilitat de l'individu i que neix en el període t és $u_t = c_t \cdot c_{t+1} \cdot (\tilde{c}_{t+1})^2$, on \tilde{c}_{t+1} representa el consum del fill d' i . Cada individu que neix en el període t té una dotació de w unitats del bé, que pot dedicar a consumir-les o acumular-les per al següent període. La quantitat del bé acumulada en t té dos usos en $t + 1$: una part la consumeix el propi individu i l'altra la transfereix al seu fill.

La funció d'utilitat en el període $t + 1$ de tot individu nascut en t és $u_{t+1} = (c_{t+1})^2 \cdot \tilde{c}_{t+1}$. Tot individu viu en el període t que no ha nascut en aquest període no té dotació de bé.

- Assumint que cada individu pren decisions amb l'objectiu de maximitzar la seva funció d'utilitat, determina quina quantitat de bé rep cada fill del seu pare.

1.2. [6 punts] Més altruïsme. El problema és el mateix que 1.1 amb la diferència que les funcions d'utilitat són $u_t = c_t \cdot c_{t+1} \cdot (\tilde{c}_{t+1})^{h_t}$ i $u_{t+1} = c_{t+1} \cdot (\tilde{c}_{t+1})^{h_{t+1}}$, on h_t és l'herència que un individu nascut en t rep del seu pare i h_{t+1} és l'herència que un individu nascut en t deixa al seu fill.

1.3. [6,5 punts] Famílies. Hi ha un únic bé que es pot produir i acumular d'un període al següent. Els individus que neixen en el període t són tots idèntics i viuen dos períodes consecutius. La funció d'utilitat de tot individu que neix en el període t és $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^\beta$, on $\beta > 0$. Aquest mateix individu disposa d'una unitat de treball, que ofereix a canvi d'un salari ω_t . Aquest salari es pot emprar en consumir, en acumular capital i en tenir fills. El cost (en termes del bé) per fill és $\gamma > 0$.

En el segon període de vida els individus maximitzen el seu consum. El capital que un individu va acumular en el període anterior no es pot consumir en el període present sinó que només serveix per a produir. Cada individu nascut en t té accés, en el període $t + 1$, a la funció de producció $y_{t+1} = (k_{t+1})^\alpha \cdot (n_{t+1})^\beta$, on k_{t+1} és el capital que l'individu va acumular en el període t i n_{t+1} és el nombre de fills que l'individu va tenir en el període t . La interpretació és que els treballadors que un individu contracta són els seus fills. Per a tot t , el pagament en salaris que fa cada individu i (nascut en el període anterior) és una proporció fixa ϕ de la producció que fa i mitjançant la funció de producció.

- Determina l'equació d'acumulació de capital i l'equació que estableix l'evolució del nombre de fills.

1.4. [3,5 punts] Tema lliure. Redacta i soluciona un exercici (diferent dels exercicis i de les preguntes d'exàmens) on algun individu del model tingui una funció d'utilitat on apareguin tres variables sobre les quals tingui incidència el propi individu.

1.5. [5 punts] Cicle demogràfic. Hi ha un únic bé que es pot produir i acumular d'un període al següent. En cada període senar neixen n individus idèntics. En cada període parell neixen $2 \cdot n$ individus idèntics. Cada individu viu dos períodes consecutius, neix amb una unitat de treball, i no té cap dotació en el seu segon període de vida. Per a tot període t , la funció d'utilitat de tot individu nascut en t és $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$. L'objectiu de tot individu en el seu segon període de vida és maximitzar el seu consum.

En el seu primer període t de vida, tot individu lloga el seu treball a canvi d'una remuneració. Aquesta remuneració es pot emprar en consumir i en acumular capital. El capital que un individu va acumular en el període anterior no es pot consumir en el període present sinó que només serveix per a produir. Els individus vius en $t + 1$ nascuts en t apleguen tot el seu capital i contracten treballadors per a produir el bé segons la funció de producció agregada $Y_{t+1} = K_{t+1} \cdot L_{t+1}$, on K_{t+1} és el capital total acumulat pels individus en el període anterior i L_{t+1} és la quantitat de treball oferta pels nascuts en $t + 1$. La producció del bé feta en cada període es distribueix igualitàriament entre tots els individus vius en el període.

- Determina l'equació d'acumulació de capital i identifica els estats estacionaris.

1.6. [5 punts] Tres grups. Hi ha un únic bé que no es pot produir ni acumular. Hi ha tres grups d'individus G1, G2 i G3, cadascun format per n membres. Cada individu viu dos períodes consecutius. Per a tot període t , la funció d'utilitat de tot individu nascut en t és $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$. La dotació de bé de cada membre de G1 és (2, 0), on 2 és la dotació quan neix i 0 és la dotació en el següent període. La dotació de bé de cada membre de G2 és (0, 2) i la de cada membre de G3 és (1, 1) on 1 és la dotació de gran.

L'estructura demogràfica de l'economia es repeteix cada tres períodes. En el període inicial neixen els membres dels grups G1 i G2. En el següent període neixen els dels grups G2 i G3. En el darrer període del cicle neixen els dels grups G3 i G1.

- Calcula l'equilibri general de l'economia de cada període.

1.7. [6,5 punts] Tres períodes. Hi ha un únic bé que no es pot produir ni acumular. Cada període neixen n individus idèntics que viuen tres períodes consecutius. Els individus només tenen dotació del bé en el seu segon període de vida: una unitat del bé. Les funcions d'utilitat d'un individu nascut en t són: en t , $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$; en $t + 1$, $u_{t+1} = c_{t+1} \cdot c_{t+2}$; i en $t + 2$, $u_{t+2} = c_{t+2}$.

- Calcula l'equilibri general de l'economia de cada període.

1.8. [6,5 punts] Govern. Hi ha un únic bé que no es pot produir però sí acumular un període. Cada període neixen n individus idèntics que viuen dos períodes consecutius. Els individus només tenen dotació del bé en el seu primer període de vida: una unitat del bé. Les funcions d'utilitat d'un individu nascut en t són: en t , $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$; en $t + 1$, $u_{t+1} = c_{t+1}$. La quantitat de bé que acumulen els individus té una taxa de depreciació del 25%: si un individu acumula k unitats del bé en t només disposarà en $t + 1$ de $3 \cdot k/4$ unitats en $t + 1$. Hi ha un govern que estableix un impost cada període de τ unitats del bé.

- El govern pot acumular l'impost sense patir cap depreciació. L'impost en t el paguen els que neixen en t . La recaptació del l'impost en t es distribueix igualitàriament en $t + 1$ entre els individus que van néixer en t . Obté el volum de capital que acumula cada individu.
- Obté el volum de capital que acumula cada individu si el govern distribueix la recaptació de l'impost feta en t de manera igualitària entre els individus vius en t nascuts en $t - 1$. Quina de les dues polítiques maximitza el benestar dels individus?
- En la situació descrita pel primer apartat, troba el valor de τ que maximitza la utilitat dels individus en el seu primer període de vida i el valor que maximitza la utilitat dels individus en el seu segon període.

1.9. [5 punts] Que paguin els fills. Hi ha un únic bé que no es pot produir ni acumular. Cada període neixen n individus idèntics que viuen dos períodes consecutius. Els individus només tenen dotació del bé en el primer període de vida: una unitat del bé. Les funcions d'utilitat d'un individu nascut en t són: en t , $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$; en $t + 1$, $u_{t+1} = c_{t+1} \cdot c_{t+2}$; i en $t + 2$, $u_{t+2} = c_{t+2}$.

Els individus joves accepten prestar als individus grans del mateix període perquè els joves del següent període pagaran els deutes dels grans del període anterior. Troba quant presten els joves als grans cada període i la taxa d'interès corresponent.

1.10. [6,5 punts] Convergència i divergència. Hi ha un únic bé que es pot produir i acumular un període. Cada període, neixen n individus idèntics que viuen dos períodes consecutius. La funció d'utilitat en t d'un individu nascut en t és $u_t = (c_t)^\beta \cdot c_{t+1}$, on $\beta > 1$. La funció d'utilitat en $t + 1$ d'un individu nascut en t és $u_{t+1} = c_{t+1}$. Quan neix, tot individu disposa d'una unitat de treball; no en té cap en el següent període. En el seu primer període de vida els individus lloguen el seu treball a canvi d'un salari. El salari rebut és la productivitat marginal del treball segons la funció de producció agregada $Y_t = K_t^{1/2} \cdot L_t^{1/2}$. La remuneració dels propietaris de capital és la productivitat marginal del capital.

- Determina l'equació d'acumulació de capital i troba els estats estacionaris.
- Hi ha una segona economia idèntica amb l'anterior, excepte pel fet que $Y_t = K_t^{2/3} \cdot L_t^{1/3}$. Els individus vells de la primera economia tenen la possibilitat de portar part del seu capital a l'altra economia sense cap cost. Calcula quina part de l'estoc de capital de la primera economia es transfereix a la segona.

1.11. [6,5 punts] Proposta d'MO, NS i JS. Hi ha un únic bé que no es pot produir ni acumular. Cada període hi ha dos grups, G1 i G2. En cada grup hi ha n membres, que viuen dos períodes consecutius. La dotació de bé de cada membre de G1 és (2, 1): dues unitats de jove i una de gran. La dotació de bé de cada membre de G2 és (1, 2): una unitat de jove i dues de gran. De grans, tots els individus només es preocupen del seu consum.

Els membres de cada grup se suposen ordenats, de manera que el jove que ocupa la posició p en un grup s'emparella amb el jove que ocupa la mateixa posició en l'altre grup. La funció d'utilitat de cada jove de G2 és $u_{2,t} = c_{2,t} \cdot c_{2,t+1}$. La funció d'utilitat de cada jove de G1 és $u_{1,t} = c_{1,t} \cdot c_{1,t+1} - c_{2,t}$, on $c_{2,t}$ és el consum que fa el jove de G2 amb què s'emparella el jove de G1. Per tant, el consum de la parella en G2 causa una pèrdua d'utilitat a l'individu de G1. Cada jove de G1 pot causar la pèrdua de bé z sobre el membre de G2 amb què es troba emparellat però al cost d'assumir ell mateix una pèrdua pròpia del bé de $\alpha \cdot z$ unitats del bé.

- Si l'objectiu de tots els individus és maximitzar la seva funció d'utilitat, quina pèrdua causen els membres de G1 sobre els de G2?

Part 2

2.1. [4,5 punts] Solow i Swan amb funció de producció per càpita inicialment convexa. Analitza gràficament el model de Solow i Swan bàsic quan la funció de producció per càpita és inicialment convexa i després es torna còncava. En particular: (i) identifica tots els possibles estats estacionaris; (ii) explica quins són estables i quins no; i (iii) indica com obtenir la taxa d'estalvi que satisfaria la regla d'or.

2.2. [4,5 punts] Solow i Swan amb funció de producció per càpita eventualment convexa. Analitza gràficament el model de Solow i Swan bàsic quan la funció de producció per càpita és inicialment còncava i després, eventualment, es torna convexa. Específicament: (i) identifica tots els possibles estats estacionaris; (ii) explica quins són estables i quins no; i (iii) indica com obtenir la taxa d'estalvi que satisfà la regla d'or.

2.3. [3 punts] Solow i Swan amb tres estats estacionari. Construeix gràficament un model de Solow i Swan bàsic on: (i) totes les funcions siguin contínues; (ii) hi hagi tres estats estacionaris; i (iii) tots tres estats siguin estables.

2.4. [4,5 punts] Solow i Swan sense creixement de la població i sense progrés tecnològic. Considera el model de Solow i Swan sense creixement de la població i sense progrés tecnològic on la funció de producció agregada és $Y = K^{1/2} \cdot L^{1/2}$, la taxa d'estalvi és $s = 1/2$ i la funció de depreciació és $d = \delta \cdot k$, on $\delta = 1/4$ si $k < 10$ i on $\delta = 1/8$ si $k \geq 10$.

- Troba tots els valors del capital per càpita d'estat estacionari, explica quins són estables i quins no, i calcula la taxa d'estalvia que satisfà la regla d'or.

2.5. [4,5 punts] Solow i Swan sense creixement de la població i sense progrés tecnològic. Considera el model de Solow i Swan sense creixement de la població i sense progrés tecnològic on la funció de producció agregada és $Y = K^{1/2} \cdot L^{1/2}$, la taxa d'estalvi és $s = 1/2$ i la funció de depreciació és $d = k/4$ si $k < 32/3$ i $d = 4 - k/8$ si $k \geq 32/3$.

- Troba tots els valors del capital per càpita d'estat estacionari, explica quins són estables i quins no, i calcula la taxa d'estalvia que satisfà la regla d'or.

2.6. [3,5 punts] Solow i Swan amb estalvi constant i depreciació eventualment decreixent. Analitza gràficament el model de Solow i Swan bàsic quan la funció d'estalvi és constant (no depèn de k) i la funció de depreciació és còncaua, inicialment creixent i eventualment decreixent. En concret: (i) identifica tots els possibles estats estacionaris; (ii) explica quins són estables i quins no; i (iii) indica com obtenir la taxa d'estalvi que satisfà la regla d'or.

2.7. [5,5 punts] Solow i Swan sense funció de producció Cobb-Douglas. Considera el model de Solow i Swan sense creixement de la població i sense progrés tecnològic on la funció de producció agregada és $Y = L + K^{1/2} \cdot L^{1/2}$, la taxa d'estalvi és $s = 1/2$ i la taxa de depreciació és $\delta = 1/4$. (i) Calcula tots els possibles estats estacionaris, (ii) explica quins són estables i quins no, i (iii) troba la taxa d'estalvi que satisfà la regla d'or.

2.8. [5,5 punts] Solow i Swan amb funció d'estalvi definida per trams. Considera el model de Solow i Swan sense creixement de la població i sense progrés tecnològic on la funció de producció agregada és $Y = L + K^{1/2} \cdot L^{1/2}$, la taxa de depreciació és $\delta = 1/4$ i la funció d'estalvi és $s = 1/2$ si $k \leq 4$, $s = -3/2 + k/2$ si $9 < k < 4$ i $s = 3$ si $k > 9$. (i) Calcula tots els possibles estats estacionaris, (ii) explica quins són estables i quins no, i (iii) troba la taxa d'estalvi que satisfà la regla d'or.

Extra

3.1. [1 punt] Què consideres més important de tot el que has après durant el curs? Formula una pregunta (relacionada amb els continguts del curs) la resposta de la qual t'hauria agradat conèixer durant el curs.