5. Overlapping generations models with endogenous production

1. Storage technology

Before introducing the possibility of producing the good it is worth analyzing the case in which a technology allows the good to be stored from one period to the next; see chapter 8 in G. McCandless and N. Wallace (1991), *Introduction to Dynamic Macroeconomic Theory*, Harvard U. P.

Example 1.1. The utility function is $u_t^i\left(c_t^i(t), c_t^i(t+1)\right) = c_t^i(t) \cdot c_t^i(t+1)$ for each individual i. Every genera-tion is made up of two grups, 1 and 2. There are n_i members in group $i \in \{1, 2\}$. Each member of grup 1 has endowment $(0,\ w_1')$. Each member of grup 2 has endowment $(w_2,\ w_2')$. There is a free technology allowing individuals to transfer (store) good from one period to the next: for each unit of the good that an individual accumulates in period t, the same individual receives λ units of the good in $t+1$, where $0 < \lambda \leq 1$. The value $1 - \lambda$ can be seen as the <u>cost of using the technology</u> because this is the amount of good lost when one unit of the good is stored. It can also be viewed as a measure of the <u>depreciation</u> of the good.

It is the presumption that the technology is simply a <u>storage technology</u> that forces the constraint $\lambda \leq 1$: one cannot get in $t+1$ more good than has been accumulated in t. The models that have been considered so far could be associated with the case $\lambda = 0$. The case $\lambda > 1$ represents a <u>production technology</u> and will be dealt with in the next sections.

For the purpose of comparison, take first $\lambda = 0$ (with just a loan market). In this case, the savings function of a member of group 1 is $s_1 = -\frac{w_1'}{2 \cdot R}$ and the savings function of a member of group 2 is $s_2 = \frac{w_2}{2} - \frac{w_2'}{2 \cdot R}$. The total savings function is $S = n_1 \cdot s_1 + n_2 \cdot s_2 = \frac{n_2 \cdot w_2}{2} - \frac{n_1 \cdot w_1' + n_2 \cdot w_2'}{2 \cdot R}$. In equilibrium, $S = 0$. As a consequence,

$$R = \frac{n_1 \cdot w_1' + n_2 \cdot w_2'}{n_2 \cdot w_2} = \frac{\frac{n_1}{n_2} \cdot w_1' + w_2'}{w_2}.$$

If $R > 1$, then the introduction of a storage technology (which implies $\lambda \leq 1$) would be useless. By lending in t one unit of the good, one receives $R > 1$ in $t+1$. Hence, there is no need to resort to a technology that gives you λ units in $t+1$ in exchange for one unit in t. For example, if $w_1{}' = 8$, $w_2 = 6$, $w_2{}' = 2$, and $n_1 = n_2$, then $R = 5/3$ and a storage technology is useless in this case. This points to an important general conclusion.

Proposition 1.2. *If a storage technology allows every unit in t to become $\lambda \leq 1$ units in $t+1$, then the interest rate $R(t)$ must be at least λ.*

Proof. By storing one unit today, you get λ tomorrow; therefore, by lending one unit today, you cannot be repaid less than λ tomorrow, because in that case you would prefer storing to lending.■

In the case $\lambda = 0$ covered so far, the constraint $R(t) \geq \lambda$ amounted to $R \geq 0$: having $R < 0$ means that you relinquish good today by lending and that you also must give up good tomorrow (you lend today and you have to pay for it tomorrow).

Suppose now that $0 < \lambda \leq 1$. For young individual i of generation t, let $k^i(t+1)$ designate the amount of good that i accumulates (his "capital"). For any individual of group 1, the budget constraints (when young and old, respectively) are, in simplified notation,

$$c_1 + k_1' + l_1 = 0 \quad \text{and} \quad c_1' = w_1' + \lambda \cdot k_1' + R \cdot l_1.$$

Dividing by R the second equation and adding up both, the lifetime budget constraint of a member of group 1 is

$$c_1 + \frac{c_1'}{R} = \frac{w_1'}{R} + k_1' \cdot \left(\frac{\lambda}{R} - 1\right).$$

By Proposition 1.2, $R \geq \lambda$: <u>if $R < \lambda$, then the loan market ceases to exist</u>. On the other hand, <u>if $R > \lambda$, then the storage technology is useless</u>: it is as if $\lambda = 0$. In view of this, $R > \lambda$ leads to the solution for the case in which there is no storage technology. This leaves the case $R = \lambda$ as the only one in which the loan market can coexist with a storage technology that can actually be used.

The lifetime budget constraint of a member of group 2 is

$$c_2 + \frac{c_2'}{R} = w_2 + \frac{w_1'}{R} + k_1' \cdot \left(\frac{\lambda}{R} - 1\right).$$

If attention is restricted to the case $R = \lambda$, then the lifetime budget constraints are

$$c_1 + \frac{c_1'}{R} = \frac{w_1'}{R} \quad \text{and} \quad c_2 + \frac{c_2'}{R} = w_2 + \frac{w_1'}{R}.$$

These are the same constraints that arise when the technology does not exist, for which reason the aggregate savings function is given by $S = \frac{n_2 \cdot w_2}{2} - \frac{n_1 \cdot w_1' + n_2 \cdot w_2'}{2 \cdot R}$, as previously calculated. The important difference is that, in equilibrium, savings must finance investment: the capital accumulated by individuals should be considered a form of investment. Summing up, the new equilibrium condition is $S = K'$, where $K' = n_1 \cdot k_1' + n_2 \cdot k_2'$.

For instance, let $w_1' = 8$, $w_2 = 6$, $w_2' = 2$, and $n_2 = 4 \cdot n_1$. It then follows that $S = n_1\left(12 - \frac{8}{R}\right)$. Without the storage technology, in equibrium, $S = 0$, so $R = \frac{2}{3}$. With the technology, in equilibrium, $n_1\left(12 - \frac{8}{R}\right) = n_1 \cdot k_1' + 4 \cdot n_1 \cdot k_2'$; that is, since $R = \lambda$ has been assumed,

$$k_1' = 12 - \frac{8}{\lambda} - 4 \cdot k_2' \cdot \tag{1}$$

Condition (1) states the relationship between the amount of stored good by the two groups that must hold in order to have a general equilibrium in which $R = \lambda$, namely, individuals are indifferent between lending or storing the good. Since there are many pairs (k_1', k_2') satisfying (1), the final conclusion is that there are infinitely many equilibria in the economy (because now a general competitive equilibrium must specify the amount of capital accumulated by every individual in every period).

For example, with $\lambda = 4/5$, (1) becomes $k_1' = 2 - 4 \cdot k_2'$, where $k_1' \geq 0$ and $k_2' \geq 0$. Accordingly, if $k_2' = \frac{1}{4}$, then $k_1' = 1$; if if $k_2' = 0$, then $k_1' = 2$; and if $k_2' = \frac{1}{2}$, then $k_1' = 0$. To verify that $k_1' = 2 - 4 \cdot k_2'$ must hold in equilibrium, recall that $s_1 = -\frac{w_1'}{2 \cdot R} = -5$ and that $s_2 = \frac{w_2}{2} - \frac{w_2'}{2 \cdot R} = \frac{7}{4}$. Consequently, $S = S_1 + S_2 = -5 \cdot n_1 + 4 \cdot n_1 \cdot \frac{7}{4} = 2 \cdot n_1$. This is the total amount of savings in the economy, given $R = \lambda = 4/5$. Hence, $2 \cdot n_1$ must represent the total amount K' of good stored in every period: $K' = n_1 \cdot k_1' + n_2 \cdot k_2' = n_1 \cdot (k_1' + 4 \cdot k_2')$. For this reason, $S = K'$ amounts to

$$2 \cdot n_1 = n_1 \cdot (k_1' + 4 \cdot k_2')$$

or

$$2 = k_1' + 4 \cdot k_2'$$

that is,

$$k_1' = 2 - 4 \cdot k_2' .$$

2. Representing endogenous production

The main new features of the model are described next; see, for instance, McCandless and Wallace (1991, ch. 9), Acemoglu (2009, ch. 9), Heijdra (2009, ch. 17), and/or Wickens (2008, sec. 6.3)[1].

- People are endowed with labour, not goods.

The lifetime endowment of labour of member i of generation t is denoted by $L_t^i = \left(L_t^i(t), L_t^i(t+1)\right)$, where $L_t^i(t)$ is the amount of labour when i is young and $L_t^i(t+1)$ when old.

In each period t, there is a competitive labour market where people can sell their labour in exchange for a wage $\omega(t)$ paid in good units. People only care about consumption, not leisure. They (inelastically) supply all their labour in both periods of their life. The total amount of labour $L(t)$ in period t is

$$\sum_{i \in N(t)} L_t^i(t) + \sum_{i \in N(t-1)} L_{t-1}^i(t) .$$

- Time t good can be stored from t to $t+1$. The good stored at $t-1$ is called time t capital.

[1] Acemoglu, Daron (2009): *Introduction to Modern Economic Growth*, Princeton University Press, Princeton; Heijdra, Ben J. (2009): *Foundations of Modern Macroeconomics*, 2nd ed., Oxford University Press, New York; McCandless, George T. and Neil Wallace (1991): *Introduction to Dynamic Macroeconomic Theory*, Harvard University Press, Harvard; Wickens, Michael (2008): *Macroeconomic Theory*, Princeton University Press, Princeton.

In $t = 1$, there is an initial endowment of capital $K(1)$. Every young individual may save a part $K^i(t)$ of his wage $\omega(t)$. $K^i(t)$ is the capital owned in t (when old) by member i of generation $t-1$.

The aggregate savings $\sum_{i\in N(t)} K^i(t)$ in t become the capital stock $K(t+1)$ in $t+1$. All capital available in t depreciates (is completely used up) during t.

- Time t good can be produced by using time t labour and time $t-1$ good. This process is represented by a production function.

Definition 2.1. A production function takes the form $Y(t) = G\big(A(t), K(t), L(t)\big)$, where $A(t)$ represents the state of technology in t, $L(t)$ is total labour in t, and $K(t)$ is the capital stock in t. For simplicity, it will be assumed that, for each t, $Y(t) = A(t) \cdot F\big(K(t), L(t)\big)$.

Definition 2.2. The production function F displays constant returns to scale if, for all $\delta > 0$,

$$F\big(\delta \cdot K(t),\ \delta \cdot L(t)\big) = \delta \cdot F\big(K(t), L(t)\big).$$

Marginal productivities are positive but decreasing: $\frac{\partial F}{\partial K(t)} > 0$, $\frac{\partial F}{\partial L(t)} > 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial K(t)^2} < 0$, and $\frac{\partial^2 F}{\partial L(t)^2} < 0$.

- Production activities are carried out by a new type of agent: firms.

There are many profit-maximizing competitive firms with the same production function. Competitiveness and constant returns imply that firms employ K and L in the same proportion.

This means that all of them can be viewed as larger or smaller copies of a given firm. Hence, given the state of technology, total production $Y(t)$ in t is a function of total capital $K(t)$ and labour $L(t)$ in t. The typical production function is Cobb-Douglas, $Y(t) = A(t) \cdot K(t)^{\alpha} \cdot L(t)^{1-\alpha}$, where $A(t)$ captures the state of technology.

Total production $Y(t)$ in t is: (i) obtained from total labour $L(t)$ and total capital $K(t)$ available in t; and (ii) is either consumed or accumulated for the next period. Formally,

$$\sum_{i\in N(t)} c_t^i(t) + \sum_{i\in N(t-1)} c_{t-1}^i(t) + \sum_{i\in N(t)} K^i(t+1) = A(t) \cdot F\big(K(t), L(t)\big)$$

or

$$C(t) + K(t+1) = A(t) \cdot F\big(K(t), L(t)\big).$$

Assumptions: $\frac{\partial F}{\partial K(t)} \to \infty$ if $K(t) \to 0$, $\frac{\partial F}{\partial K(t)} \to 0$ if $K(t) \to \infty$, and the same for $L(t)$.

Since the labour market is competitive, the wage rate equals the marginal productivity of labour: $\omega(t) = \partial F / \partial L(t)$. The capital market is also assumed to be competitive, so the price $\sigma(t)$ of capital equals the marginal productivity of capital: $\sigma(t) = \partial F / \partial K(t)$. The assumption of constant returns guarantees that ω and σ depend on the relative, not the absolute, amounts of K and L.

Example 2.3. Let $Y(t) = A(t) \cdot K(t)^{\alpha} \cdot L(t)^{1-\alpha}$. Then:

$$\omega(t) = \frac{\partial F}{\partial L(t)} = (1-\alpha) \cdot A(t) \cdot \left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)^{\alpha} \text{ and } \sigma(t) = \frac{\partial F}{\partial K(t)} = \alpha \cdot A(t) \cdot \left(\frac{L(t)}{K(t)}\right)^{1-\alpha}.$$

By the uniqueness of the input prices, all firms use K and L in the same proportion: firms using more K will be using more L. Since all labour is hired, the total wage bill is $\omega(t) \cdot L(t) = (1-\alpha) \cdot A(t) \cdot \left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)^{\alpha} \cdot L(t) = (1-\alpha) \cdot Y(t)$. Similarly, $\sigma(t) \cdot K(t) = \alpha \cdot Y(t)$. This says that the total payment to labour is the fraction $1-\alpha$ of output, whereas the total payment to capital is the fraction α. As a result,

$$\omega(t) \cdot L(t) + \sigma(t) \cdot K(t) = Y(t).$$

Production is distributed between labour and capital in fixed proportions (this holds for production functions with constant returns) and, therefore, firms earn no profit.

3. General competitive equilibrium and steady (stationary) state

Every individual i aims at maximizing his or her utility subject to his or her lifetime budget constraint. When young and old, i's budget constraints are

$$c_t^i(t) + l^i(t) + K^i(t+1) = \omega(t) \cdot L_t^i(t)$$

$$c_t^i(t+1) = R(t) \cdot l^i(t) + \sigma(t+1) \cdot K^i(t+1) + \omega(t+1) \cdot L_t^i(t+1).$$

By combining the two constraints,

$$c_t^i(t) + \frac{c_t^i(t+1)}{R(t)} = \omega(t) \cdot L_t^i(t) + \frac{\omega(t+1) \cdot L_t^i(t+1)}{R(t)} + K^i(t+1) \cdot \left(\frac{\sigma(t+1)}{R(t)} - 1\right).$$

Remark 3.1. By arbitrage between the capital and loan markets, in a general equilibrium, $R(t) = \sigma(t+1)$ and, consequently, $K^i(t+1)\left(\frac{\sigma(t+1)}{R(t)} - 1\right) = 0$.

To see this, if $\sigma(t+1) > R(t)$, then everyone would like to borrow as much of the good to invest in capital. This cannot be in equilibrium, because no one would lend. If $\sigma(t+1) < R(t)$, nobody would like to hold capital, so $K(t+1) = 0$. This makes the marginal productivity of K, arbitrarily large. Hence, $\sigma(t+1)$ is also arbitrarily large, contradicting the assumption that $\sigma(t+1) < R(t)$.

The decision problem of every $i \in N(t)$ is the same as with exogenous production because the lifetime budget constraints in the two cases are analogous: endowments $w_t^i(s)$ are now the wage incomes $\omega(s) \cdot L_t^i(s)$. The only qualification is that $\omega(t+1)$ is not known in t (and neither is $\sigma(t+1)$ known). Accordingly, for both problems to be the same, it is necessary to postulate perfect foresight: individuals know in each period t the market prices prevailing in $t+1$.

Definition 3.2. A general competitive equilibrium (with initial capital $K(1) > 0$, production function F, labour endowments, and perfect foresight) is a sequence $\{\hat{R}(t),\ \hat{\sigma}(t),\ \widehat{\omega}(t),\ \widehat{K}(t)\}_{t\geq 1}$ such that, for all $t \geq 1$:

(i) $S_t\left(\hat{R}(t)\right) = \widehat{K}(t+1)$, where S_t is the total savings function obtained by maximizing each individual's utility;

(ii) $\widehat{\sigma}(t+1) = \hat{R}(t)$;

(iii) $\widehat{\sigma}(t) = \partial F/\partial K(t)$; and

(iv) $\widehat{\omega}(t) = \partial F/\partial L(t)$.

Definition 3.3. A steady state of the economy is characterized by the condition $K(t+1) = K(t)$.

Example 3.4. Let $u_t^i = c_t^i(t) \cdot c_t^i(t+1)$ and $Y(t) = A(t) \cdot K(t)^\alpha \cdot L(t)^{1-\alpha}$. Then, defining $L_t(s) = \sum_{i\in N(s)} L_t^i(s)$ and $L(t) = L_t(t) + L_{t-1}(t)$,

$$S_t = \frac{\omega(t) \cdot L_t(t)}{2} - \frac{\omega(t+1) \cdot L_t(t+1)}{2 \cdot R(t)},\ \ \omega(t) = (1-\alpha) \cdot A(t) \cdot \left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)^\alpha, \sigma(t) = \alpha \cdot A(t) \cdot \left(\frac{L(t)}{K(t)}\right)^{1-\alpha}.$$

Inserting all three equations into the equilibrium condition $S_t = K(t+1)$ and solving for $K(t+1)$,

$$K(t+1) = \left(\frac{\dfrac{(1-\alpha)\cdot A(t)}{2} \cdot \dfrac{L_t(t)}{L(t)^\alpha}}{1 + \dfrac{1-\alpha}{2\alpha} \cdot \dfrac{L_t(t+1)}{L(t+1)}}\right) \cdot K(t)^\alpha\,. \tag{2}$$

• **Case 1**: population and technology constant.

If A, L, and L_t all remain constant, then the term within the parenthesis in (2) is a positive constant. Denote this constant by a. The equation describing the dynamics of capital accumulation in equilibrium is then

$$K(t+1) = a \cdot K(t)^\alpha.$$

The steady state capital stock $\bar{K}$ is obtained when $K(t+1) = K(t) = \bar{K}$. That is, $\bar{K} = a \cdot \bar{K}^\alpha$ and

$$\bar{K} = a^{1/(1-\alpha)}\,.$$

Fig. 1 next represents $\bar{K}$ and the equation $K(t+1) = a \cdot K(t)^\alpha$. No matter the initial stock $K(1) > 0$, the economy's capital stock converges to $\bar{K}$. Once found a steady state value $\bar{K}$, then, assuming L and A constant, the value $\bar{Y}$ of output in the steady state can also be found: $\bar{Y} = A \cdot \bar{K}^\alpha \cdot L^{1-\alpha}$. Knowing this, both $\bar{\omega}$ and $\bar{\sigma}$ can be subsequently determined. From the equilibrium condition $S_t = K(t+1)$, it follows that $\bar{S} = \bar{K}$. Given this, as S_t is a function of $R(t)$, $\bar{R}$ can also be ascertained (in equilibrium, $\bar{R} = \bar{\sigma}$).

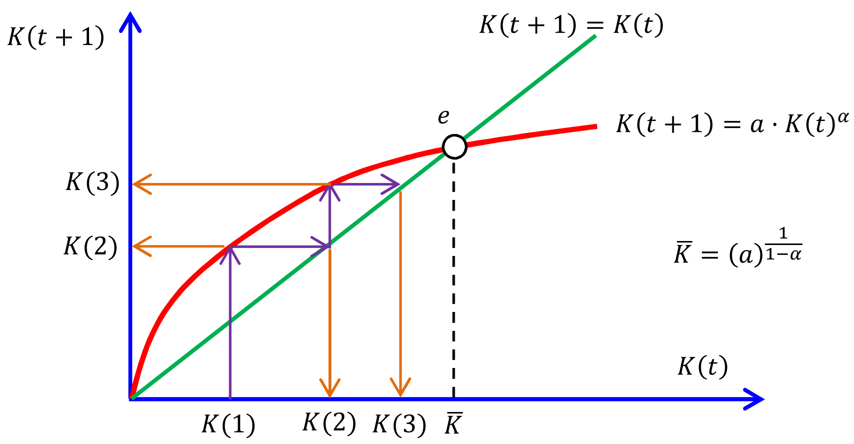

Fig. 1. Capital stock dynamics and convergence to the steady state with technology and population constant

• **Case 2**: population grows and technology constant.

With everything else the same as in Case 1, let $N(t+1) = N \cdot N(t)$, for some $N > 1$, and all generations be endowed with the same amount of labour. Let $L_0(0)$ be the labour endowment of the young in $t = 0$ and $L_0(1)$ the labour of the old in $t = 1$. Define $L(0) = L_0(0) + L_0(1)/N$. The total labour endowment (supply) of the young in t is

$$L_t(t) = N^t \cdot L_0(0)$$

and the labour endowment of the old in t is

$$L_{t-1}(t) = N^{t-1} \cdot L_0(1).$$

Therefore, total labour supply in t is

$$L(t) = L_t(t) + L_{t-1}(t) = N^t \cdot L_0(0) + N^{t-1} \cdot L_0(1) = N^t \left(L_0(0) + \frac{L_0(1)}{N}\right) = N^t \cdot L(0).$$

The savings function of each individual i in t is

$$s^i(t) = \frac{1}{2}\left(\omega(t) \cdot L_t^i(t) - \frac{\omega(t+1) \cdot L_t^i(t+1)}{R(t)}\right).$$

Aggregate savings in t are

$$S_t = N(t) \cdot s^i(t) = N^t \cdot N(0) \cdot s^i(t) = \frac{1}{2}\left(\omega(t) \cdot N^t \cdot L_0(0) - \frac{\omega(t+1) \cdot N^t \cdot L_0(1)}{R(t)}\right).$$

The wage in t is

$$\omega(t) = \frac{\partial F}{\partial L(t)} = (1-\alpha) \cdot A(t) \cdot \left(\frac{K(t)}{N^t \cdot L(0)}\right)^{\alpha}.$$

The price of capital in $t+1$ (which equals $R(t)$ in equilibrium) is

$$\sigma(t+1) = \frac{\partial F}{\partial K(t+1)} = \alpha \cdot A(t) \cdot \left(\frac{K(t+1)}{N^{t+1} \cdot L(0)}\right)^{\alpha-1}.$$

Using these equations and the equilibrium condition $S_t = K(t+1)$, or simply recalling that,

$$K(t+1) = \left(\frac{\frac{(1-\alpha)\cdot A(t)}{2} \cdot \frac{L_t(t)}{L(t)^\alpha}}{1 + \frac{1-\alpha}{2\alpha} \cdot \frac{L_t(t+1)}{L(t+1)}} \right) \cdot K(t)^\alpha$$

which is the equation (2) describing the equilibrium path of capital,

$$K(t+1) = \left(\frac{\frac{(1-\alpha)\cdot A(0)}{2} \cdot \frac{L_0(0)}{L(0)^\alpha}}{1 + \frac{1-\alpha}{2\alpha} \cdot \frac{L_0(1)}{N \cdot L(0)}} \right) \cdot N^{t(1-\alpha)} \cdot K(t)^\alpha .$$

Denoting by B the term in parenthesis, the final conclusion is

$$K(t+1) = B \cdot N^{t(1-\alpha)} \cdot K(t)^\alpha .$$

The gross growth rate of capital is

$$G_K(t+1) = \frac{K(t+1)}{K(t)} = \frac{B \cdot N^{t(1-\alpha)} \cdot K(t)^\alpha}{B \cdot N^{(t-1)(1-\alpha)} \cdot K(t-1)^\alpha} = \frac{1}{N^{\alpha-1}} \cdot G_K(t)^\alpha = N^{1-\alpha} \cdot G_K(t)^\alpha .$$

Let G_K designate the limit of the gross growth rate of capital. As a result,

$$G_K = N^{1-\alpha} \cdot {G_K}^\alpha .$$

Solving for G_K, ${G_K}^{1-\alpha} = N^{1-\alpha}$. In sum,

$$G_K = N .$$

To recap, in the equilibrium steady state, capital accumulates at the same rate as population grows: $K(t+1) = N \cdot K(t)$. The growth rate of the capital stock K and the growth rate of ouput Y eventually equal the growth rate of the population.

• **Case 3**: population constant and technology grows.

Suppose now that technology improves at gross rate $G > 1$: $A(t+1) = G \cdot A(t)$. Since $Y = A \cdot K^\alpha \cdot L^{1-\alpha}$, technological growth is called neutral, due to the fact that changes in A affect the productivity of both capital and labour. Given $A(t) = G^t \cdot A(0)$ and constant population, the equilibrium path of capital (1) becomes

$$K(t+1) = \left(\frac{\frac{(1-\alpha)\cdot A(0)}{2} \cdot \frac{L_0(0)}{L(0)^\alpha}}{1 + \frac{1-\alpha}{2\alpha} \cdot \frac{L_0(1)}{N \cdot L(0)}} \right) \cdot G^t \cdot K(t)^\alpha .$$

Denoting by B the term in parenthesis, $K(t+1) = B \cdot G^t \cdot K(t)^\alpha$.

The gross growth rate of capital is

$$G_K(t+1) = \frac{K(t+1)}{K(t)} = \frac{B \cdot G^t \cdot K(t)^\alpha}{B \cdot G^{t-1} \cdot K(t-1)^\alpha} = G \cdot G_K(t)^\alpha.$$

If G_K is the limit of $G_K(t)$, $G_K = G \cdot {G_K}^\alpha$ and

$$G_K = G^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

As $\frac{1}{1-\alpha} > 1$, $G_K > G$: the capital stock growth rate (which equals the ouput growth rate) is greater than the technology growth rate.

4. Exercicis

Exercici 1. Finançament col·lectiu de tecnologia d'emmagatzematge. La funció d'utilitat de cada consumidor i és $u_t^i\left(c_t^i(t), c_t^i(t+1)\right) = c_t^i(t) \cdot c_t^i(t+1)$. Cada generació está formada per dos grups, G1 i G2, cadascun format per n individus. Cada membre de G1 té dotació $(0, w)$ i cada membre de G2 compta amb dotació $(0, v)$, on $w > v > 0$. Tot i que el bé no es pot conservar, es pot crear una tecnologia d'emmagatzematge d'un període: per cada unitat del bé acumulada en el període t per un individu i, en el període $t+1$ i tindrà la quantitat $\lambda(t)$ del bé, on $0 < \lambda(t) < 1$.

L'efectivitat de la tecnologia depèn de les contribucions dels individus al seu desenvolupament. Si, en t, cada membre de G1 aporta τ_1 unitats del bé per a finançar/desenvolupar la tecnologia i cada i cada membre de G2 aporta τ_2 unitats, aleshores $\lambda(t) = \frac{\tau_1 + \tau_2}{w + v}$. Determina, en l'equilibri general, quina part de la seva dotació estalvia (i quina aporta al finançament de la tecnologia) cada individu.

Exercici 2. Tecnologia de transferència. Considera una economia on tots els individus són iguals, viuen durant dos períodes consecutius i el bé només pot existir durant un període. Imagina que es descobreix una tecnologia que, sense cost, permet de transferir una unitat del bé dos períodes cap al futur. Així, si un individu acumula una unitat del bé en el període t fent servir la tecnologia, aquesta unitat estarà disponible per a ser consumida (o novament acumulada) en el període $t+2$. Tindria aquesta tecnologia utilitat pràctica? En particular, acumularien bé els individus?

Exercici 3. Equilibri amb tecnologia d'emmagatzematge imperfecta. La funció d'utilitat de cada consumidor i és $u_t^i\left(c_t^i(t), c_t^i(t+1)\right) = c_t^i(t) \cdot c_t^i(t+1)$. Cada generació está formada per dos grups, 1 i 2, cadascun format per n individus. Cada membre d'un grup 1 té dotació (v, w) i cada membre del grup 2 compta amb dotació (w, v), on $w > v > 0$. Tot i que la naturalesa del bé no permet de transferir-lo d'un període a cap altre posterior, existeix una tecnologia que possibilita l'acumulació del bé: per cada unitat del bé que un individu jove acumuli en el període t, l'individu disposarà de $0 < \lambda < 1$ unitats del bé en el període $t+1$. Assumint que hi ha un mercat de préstecs del bé, calcula l'equilibri general.

Exercici 4. Equilibri amb producció endògena. La funció d'utilitat de cada individu jove i és $u_t^i = ln\, c_t^i(t) \ + \beta \cdot ln\, c_t^i(t+1)$, on $0 < \beta < 1$. Cada generació està formada per 50 individus amb dotació $(0,1)$ i 50 amb dotació $(2,0)$. La funció de producció és $Y(t) = K(t)^{\alpha} L(t)^{1-\alpha}$ i $K(1) > 0$.

(i) Determina l'equació en diferències que estableix la trajectòria de l'estock de capital.

(ii) Calcula un estat estacionari amb estoc de capital positiu i l'equilibri general.

(iii) Respon a (i) i (ii) si, per a tot t, la generació $t+1$ té un 50% més de membres que la t.

(iv) Respon a (i) i (ii) si, per a tot t, si en el període 2 mor la meitat dels joves de cada tipus.

(v) Respon a (i) i (ii) si, per a tot t, si en el període 2 es destrueix la meitat de l'estoc de capital.

Exercici 5. Un amb evasió fiscal sense capital. Cada generació té 100 membres: 50 ("els pobres") amb dotació de treball $(1,0)$ i els altres 50 ("els rics") amb dotació de treball $(4,0)$. Tots els joves de totes les generacions tenen la mateixa funció d'utilitat $u_t^i = c_t^i(t) \cdot c_t^i(t+1)$. No hi ha capital: la producció només depèn del treball: $Y(t) = L(t)^{1/2}$. El salari és $\omega(t) = L(t)^{-1/2}$.

Hi ha un goven que estableix un impost τ a pagar pels rics joves. Per a cada t, la recaptació tributària en t es distribueix entre tots els que són grans en t (sistema de pensions de repartiment). Cada individu gran rebrà $\tilde{\tau}$.

Els rics joves poden dedicar una part x de la seva dotació de treball tractant d'evadir el pagament de l'impost. Quan un ric esmerça x per a defraudar el pagament, acabar pagant $\tau \cdot g(x)$ en comptes de τ, on $g(x) = \left(1 - \frac{x}{4}\right)^2$.

En cada període t, el pressupost del govern està equilibrat: els ingressos tributaris obtinguts dels rics són iguals a les transferències fetes als grans $(100 \ \cdot \tilde{\tau})$. Els ingressos provinents dels rics no són necessàriament $50 \cdot \tau$ perquè cal determinar el nivell d'evasió fiscal que decideixen els rics. Troba l'equació que determina $\tilde{\tau}$ en funció de τ i calcula $\tilde{\tau}$ quan $\tau = 1$.

Exercici 6. Sostenibilitat. Només hi ha un bé, que pot acumular-se d'un període cap a un altre en forma de capital i que pot produir-se combinant els factors treball i capital. Si en el moment t un individu acumula l'estoc k_t de capital, aleshores en el moment $t+1$ estarà disponible el només l'estoc $(1-\delta) \cdot k_t$, on $0 < \delta < 1$. Cada generació està formada per n individus idèntics, amb la funció d'utilitat de jove $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$. La funció d'utilitat de cada individu gran coincideix amb el seu consum. Els individus prenent decisions per a maximitzar la seva funció d'utilitat.

Cada individu disposa d'una unitat de treball de jove i cap unitat de gran. Es necessita capital per a què el treball possibiliti la producció del bé. Els individus joves empren tot el seu treball en la producció del bé. En emprar tot el seu treball per a produir el bé, cada individu que és jove en t aconsegueix produir $a \cdot (1-\delta) \cdot k_t$, on $a > 0$ és una constant i k_t és l'estoc de capital mitjà acumulat en el moment $t-1$ i disponible en el moment t (atès que hi ha el mateix nombre d'individus en cada generació, k_t és el capital que cadascun dels individus va acumular en $t-1$). Cada individu jove decideix quina part de la producció que realitza la consumeix i quina part l'acumula en forma de capital. El consum de cada individu gran en el període t coincideix amb la part no depreciada del capital que el mateix individu va acumular en el període $t-1$.

(i) Determina l'equació que expressa la trajectòria d'acumulació del capital i representa-la gràficament.

(ii) Considera la següent modificació de l'economia. Hi ha un recurs lliure i gratuït X que és necessari per a produir el bé. Sigui x_t la quantitat de recurs existent en el moment t. Cada unitat de capital emprada en la producció comporta la pèrdua d'α unitats d'X. El recurs X té la capacitat de regeneració: si y_t representa la quantitat d'X disponible un cop descomptada la pèrdua causada pel procés de producció, aleshores hi ha $y_t \cdot (1+\beta)$ unitats del recurs en $t+1$, on $\beta > 0$. Assumint que $\alpha = \delta$ i que $\beta = \alpha/2$, determina el valor màxim $\bar{a}$ que pot assolir a per a què el procés productiu no esgoti X. Com es veu afectat $\bar{a}$ per canvis en α?

Exercici 7. Independència. Hi ha únicament un bé, que pot acumular-se només un període en forma de capital (sense depreciació) i que pot produir-se combinant els factors treball i capital. Cada generació està integrada per dos grups, 1 i 2. El grup 1 està format per $2 \cdot n$ individus idèntics, cadascú amb una unitat de treball de jove i dues unitats de treball de grans. La funció d'utilitat de cada jove del grup 1 en el moment t és $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^{\beta}$, on $0 < \beta < 1$. La funció d'utilitat de cada individu gran coincideix amb el seu consum.

El grup 2 està constituït per n individus idèntics, cadascú amb quatre unitats de treball de jove i dues unitats de treball de grans. La funció d'utilitat de cada jove del grup 2 en el moment t és $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$. La funció d'utilitat de cada individu gran coincideix amb el seu consum.

La funció de producció de l'economia en cada moment t és $Y_t = K_t \cdot L_t$, on K_t és el capital total en el moment t i L_t és el volum total de treball ofert en t. Tots els individus d'ambdós grups ofereixen el seu treball, tant de joves com de grans. La remuneració del capital és la meitat de la productivitat marginal del capital. La remuneració del treball és la meitat de la productivitat marginal del treball. S'assumeix que, per arbitratge, la taxa d'interès d'un préstec en el moment t coincideix amb la remuneració del capital en el moment $t+1$.

(i) Determina l'equació que descriu la trajectòria d'acumulació del capital i representa-la gràficament.

(ii) Imagina que els membres del grup 2 s'independitzen i constitueixen una economia pròpia, separada de l'economia que formarien els membres del grup 1. A cada economia es mantenen les dotacions dels membres dels grups respectius, la funció de producció de l'economia original i les regles que determinen les remuneracions dels factors. Determina l'equació que representa la trajectòria d'acumulació del capital de cada economia i compara-la amb l'obtinguda en l'apartat (i) per a jutjar si a algun dels grups li convé la secessió.

(iii) Respon a (i) i (ii) si la funció de producció és $Y_t = K_t^{1/2} \cdot L_t^{1/2}$ (però ara la remuneració de cada factor coincideix amb la seva productivitat marginal).

Exercici 8. Cicles. Hi ha un únic bé que es pot acumular un període. Cada període hi ha n individus idèntics que viuen dos períodes consecutius i que de joves tenen la funció d'utilitat $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove i c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran. Els individus que neixen en un període senar tenen la dotació de factor treball $(1, 1)$: una unitat de treball de joves i una unitat de grans. Els individus que neixen en un període parell tenen la dotació de factor treball $(2, 2)$: dues unitats de treball de joves i dues unitats de grans. La funció de producció agregada en el període t és $Y_t = K_t \cdot L_t$, on K_t és l'estoc total de capital en t i L_t és la quantitat total de treball disponible en t. Cada factor de producció rep com a remuneració la meitat de la seva productivitat marginal segons la funció de producció agregada. Determina l'equació que descriu la trajectòria d'acumulació de l'estoc de capital i troba els estats estacionaris.

Exercici 9. Globalització. Hi ha dues economies, E1 i E2. En cada economia: (i) hi ha n individus idèntics i el mateix bé, que es pot acumular un període i es pot produir; i (ii) cada factor de producció es remunera segons la seva productivitat marginal en la funció de producció agregada.

La dotació de treball dels membres d'E1 és $(2, 1)$: dues unitats de treball de jove i una de gran. Cada jove d'E1 té funció d'utilitat $u_t = c_t^{\beta} \cdot c_{t+1}$, on $0 < \beta < 1$ és una constant, c_t és el consum que l'individu fa de jove i c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran. La funció de producció agregada en el període t és $Y_t = 2K_t + L_t$, on K_t és l'estoc total de capital en t i L_t és la quantitat total de treball disponible en t..

La dotació de treball dels membres d'E2 és $(1, 0)$: una unitat de treball de jove i una de gran. Cada jove d'E2 té funció d'utilitat $u_t = c_t \cdot c_{t+1}^{\beta}$, on $0 < \beta < 1$ és la mateixa constant d'E1, c_t és el consum que l'individu fa de jove i c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran. La funció de producció agregada en el període t és $Y_t = 2K_t + L_t$, on K_t és l'estoc total de capital en t i L_t és la quantitat total de treball disponible en t.

(i) Per a cada economia, determina l'equació que descriu la trajectòria d'acumulació de l'estoc de capital i l'estoc de capital a tot estat estacionari.

(ii) Suposa que els membres de les dues economies s'emparellen, de manera que cada membre d'E1 ha de transferir $1/8$ unitats de capital a la seva parella d'E2. Torna a calcular, només per a l'economia E2, l'equació que descriu la trajectòria d'acumulació de l'estoc de capital i l'estoc de capital a tot estat estacionari. Sobre la base dels resultats, fes una anàlisi crítica de la transferència com a mesura de política econòmica per a contribuir a la prosperitat d'E2.

(iii) Determina l'equació que descriu la trajectòria d'acumulació de l'estoc de capital i l'estoc de capital a tot estat estacionari si les dues economies s'integressin i formessin una de sola.