1. Un model de generacions encavalcades amb producció exògena

1.1. Elements del model

El model representa una economia on: (i) els seus membres són consumidors; (ii) només hi ha un bé de consum; i (iii) els consumidors només poden consumir o intercanviar l'objecte de consum.

• **Temps.** El temps es representa mitjançant períodes i es designa per t. L'economia s'inicia en el període $t = 1$ i continua sense fi passant pels períodes $t = 2$, $t = 3$, $t = 4$… La variable temps només serveix per a ordenar els estats en què successivament es troba l'economia,

• **Temps de vida dels consumidors.** Cada consumidor viu dos períodes consecutius. En el seu primer període el consumidor es considera jove; en el segon període, gran. En cada període t coexisteixen dues generacions de consumidors: els consumidors que neixen en t (que són joves en t i grans en $t+1$) i els que moren en t (que van néixer en el període $t-1$; els consumidors grans en $t = 1$ pot suposar-se que neixen grans). La Figura 1 mostra l'estructura demogràfica de l'economia. $N(t)$ designa la generació t: el conjunt de consumidors que neixen en el període t. El conjunt de consumidors en el període t és $N(t) + N(t-1)$.

	període							
generació	1	2	3	…	t	$t+1$	$t+2$	…
0	***gran***							
1	***jove*** →	***gran***						
2		***jove*** →	***gran***					
…			…	…				
t				…	***gran***			
$t+1$					***jove*** →	***gran***		
$t+2$						***jove*** →	***gran***	
…							…	…

Figura 1. Estructura demogràfica de l'economia

• **Bé de consum.** Només hi ha un bé de consum (el mateix bé) cada període. El bé no es pot produir: apareix espontàniament cada període. El bé no es pot acumular d'un període al següent: tota quantitat de bé no consumida en un període desapareix al final del període. Per tant, cada unitat del bé només existeix un període. La quantitat total de bé disponible en el període t és $Y(t)$.

• **Distribució inicial del bé de consum.** Cada membre i de la generació t té $w_t^i(t)$ unitats del bé en el període t (la seva dotació quan és jove) i $w_t^i(t+1)$ unitats del bé de consum en el període $t+1$ (la seva dotació quan és gran). La dotació total $Y(t)$ del bé es distribueix entre els consumidors vius en t, de manera que $\sum_{i \in N(t)} w_t^i(t) + \sum_{i \in N(t-1)} w_{t-1}^i(t) = Y(t)$.

• **Decisions dels consumidors.** Per a tot període t, cada consumidor jove en t decideix quantes unitats $c_t^i(t)$ del bé consumir de jove en t i quantes unitats $c_t^i(t+1)$ consumir de gran en $t+1$. El parell $c_t^i = \left(c_t^i(t),\ c_t^i(t+1)\right)$ és el lot de consum del membre i de la generació $t > 0$. Per a tot membre i de la generació $t = 0$, c_0^i és el número $c_0^i(1)$. Una assignació de consum és una seqüència $\{c_t^i\}_{t\geq 0, i\in N(t)}$ de lots de consum dels membres de totes les generacions. Una assignació de consum $\{c_t^i\}$ és factible si, per a tot període t, $\sum_{i\in N(t)} c_t^i(t) + \sum_{i\in N(t-1)} c_{t-1}^i(t) \leq Y(t)$.

• **Preferències dels consumidors joves.** Tot consumidor jove i en t té definida una preferència sobre el conjunt de possibles lots de consum. Aquesta preferència és representable numèricament mitjançant una funció d'utilitat u_t^i definida sobre el conjunt de possibles lots de consum d'i. El valor $u_t^i\left(c_t^i(t), c_t^i(t+1)\right)$ és la utilitat del consumidor jove i en t quan i consumeix $c_t^i(t)$ unitats del bé en el període t (quan és jove) i consumeix $c_t^i(t+1)$ unitats en el període $t+1$ (quan és gran).

• **Preferències dels consumidors grans.** Quan és jove, un consumidor decideix tant el seu consum de jove com de gran. Per tant, quan el consumidor es fa gran no té res a decidir: es limita a executar el pla de consum establert de jove. Per aquest motiu no cal especificar cap funció d'utilitat per als consumidors grans: si de cas, n'hi ha prou amb assumir que tot consumidor gran prefereix consumir més del bé que menys.

• **Mecanismes d'interacció.** Una manera de representar el funcionament de l'economia consisteix a especificar com interaccionen els consumidors i com aquesta interacció determina els resultats de l'economia. En particular, s'assumeix que el bé pot ser intercanviat en un mercat competitiu.

• **Mercat de préstecs.** Atès que en aquesta economia no hi ha res que explícitament faci de diner, l'intercanvi del bé es fa a canvi d'una promesa: qui rep bé en el període present es compromet a lliurar bé en el període següent. Per aquesta raó es pot interpretar que el mercat del bé és un mercat de préstecs (de crèdit, de dèbit o d'estalvi): la compra del bé es fa pagant amb un actiu financer, això és, la promesa de lliurar bé en el futur. La taxa d'interès real en t, designada per $r(t)$, representa tant el preu del bé o com del préstec: prestar 1 unitat del bé en t implica rebre $1 + r(t)$ unitats del bé en $t + 1$. Equivalentment, qui rep 1 unitat del bé en t ha de pagar $1 + r(t)$ unitats del bé en $t + 1$. Per a simplificar la notació, en general es farà servir la taxa d'interès bruta $R(t) = 1 + r(t)$. Atès que s'assumeix que el mercat és competitiu, hom prendrà $R(t)$ com a donat.

La següent llista recapitula les variables principals del model i la notació.

• Període de temps i generació	t
• Nombre de membres de la generació t	$N(t)$
• Quantitat de bé disponible en el període t	$Y(t)$
• Consum en t del consumidor i de la generació t (i jove)	$c_t^i(t)$
• Consum en $t+1$ del consumidor i de la generació t (i gran)	$c_t^i(t+1)$
• Dotació en t del consumidor i de la generació t (i jove)	$w_t^i(t)$
• Dotació en $t+1$ del consumidor i de la generació t (i gran)	$w_t^i(t+1)$
• Funció d'utilitat en t del membre i de la generació t (i jove)	u_t^i

1.2. Anàlisi del model

• **No hi ha préstecs intergeneracionals.** En particular, els grans no participen en el mercat de préstecs. Aquesta conclusió se segueix de l'objectiu (tant de joves com de grans) de maximització de la utilitat derivada del consum. D'una banda, cap consumidor no té incentiu a prestar a un consumidor gran, atès que un consumidor gran no serà viu en el següent període per a retornar el deute. Per tant, els grans no formen part de la demanda de préstecs: ningú no està disposat a prestar-los el bé. D'altra banda, un consumidor gran tampoc no té incentiu a prestar perquè la renúncia a consumir bé en el període present no es compensa amb la possibilitat de consumir més bé en el període següent. Així, els grans no formen part de l'oferta de préstecs. La conclusió final és que, per a tot t, en el mercat de préstecs del període t només hi participen els que són joves en t.

• **Oferta i demanda de préstecs.** Sigui $l^i(t)$ la quantitat de bé que un consumidor jove i presta o manlleva en el període t. Tenir $l^i(t) > 0$ vol dir que i fa de prestador del bé en t. Els prestadors en t estalvien el bé en t per a poder consumir en $t + 1$ més del que tindran. Tenir $l^i(t) < 0$ significa que i és prestatari del bé en t. Els prestataris en t volen consumir en t més bé del que tenen en t. Les restriccions pressupostàries determinen quant es pot prestar o manllevar.

• **Restricció pressupostària de joves.** La restricció pressupostària d'un consumidor jove i de la generació t estableix que la quantitat de bé consumida $c_t^i(t)$ més la prestada $l_t^i(t)$ no pot superar la dotació del consumidor. Formalment,

$$c_t^i(t) + l^i(t) \leq w_t^i(t).$$

Donat que i maximitza la seva utilitat, la restricció pressupostària pot ser assumida una igualtat: $c_t^i(t) + l^i(t) = w_t^i(t)$. Per consegüent, $l^i(t) = w_t^i(t) - c_t^i(t)$. Això suggereix que $l^i(t)$ representa l'estalvi d'i: la part de la seva dotació que no i consumeix. Si $l^i(t) > 0$, llavors $w_t^i(t) > c_t^i(t)$ i l'estalvi és positiu; en aquest cas, i acumula poder de compra del bé per al següent període adquirint un actiu financer (la promesa de rebre bé en el següent període). Si $l^i(t) < 0$, llavors $w_t^i(t) < c_t^i(t)$ i l'estalvi és negatiu; en aquest cas, i empra poder de compra del futur en el present, endeutant-se i podent així consumir més que la seva dotació.

• **Restricció pressupostària de gran.** La restricció pressupostària d'un consumidor gran i membre de la generació t estableix que la quantitat de bé consumida en $t + 1$ no pot superar la dotació del consumidor gran en $t + 1$ més el rendiment del seu préstec en t. Això és,

$$c_t^i(t+1) \leq w_t^i(t+1) + R(t)l^i(t).$$

Se segueix de la presumpció que un consumidor gran prefereix consumir més a menys que la restricció és, en la pràctica, una igualtat: $c_t^i(t+1) = w_t^i(t+1) + R(t)l^i(t)$. Si $l^i(t) > 0$, aleshores i va prestar de jove i rep $R(t)l^i(t)$ unitats del bé de gran. Si $l^i(t) < 0$, aleshores i va manllevar de jove i ha de pagar $R(t)l^i(t)$ quan és gran.

• **Restricció pressupostària vital.** Les dues restriccions pressupostàries, de jove i de gran, tenen un element comú: $l^i(t)$. Aïllant el terme en una restricció i susbtituint-lo en l'altra s'obté la restricció pressupostària vital (1) del consumidor i de la generació t, on $\frac{1}{R(t)}$ fa de factor de descompte que homogeneïtza les unitats del bé de diferents períodes. L'equació (1) diu que el valor descomptat del consum vital coincideix amb el valor descomptat de la dotació vital: en termes de valor, un consumidor només pot consumir el que té.

$$\underbrace{c_t^i(t) \quad + \quad \frac{c_t^i(t+1)}{R(t)}}_{\textbf{Valor present del consum de tota la vida}} \quad = \quad \underbrace{w_t^i(t) \quad + \quad \frac{w_t^i(t+1)}{R(t)}}_{\textbf{Valor present de la dotació de tota la vida}} \tag{1}$$

• **Un o dos béns?** Des del punt de vista d'un consumidor la diferent disponibilitat temporal del bé provoca que, en la pràctica, hi hagin dos béns: el bé en un període i el mateix bé en el període següent. Segons aquesta interpretació, és com si i triés la quantitat de dos béns: consum present $c_t^i(t)$ i consum futur $c_t^i(t+1)$. També és com si el preu del consum present s'hagués normalitzat a 1 i el preu del consum futur fos $\frac{1}{R(t)}$. Finalment, l'equivalent a la renda del consumidor seria el valor de la seva dotació $w_t^i = \left(w_t^i(t), w_t^i(t+1)\right)$ valorada segons els preus $\left(1, \frac{1}{R(t)}\right)$.

• **Problema de decisió d'un consumidor jove.** L'equació (1) determina el conjunt de lots de consum $\left(c_t^i(t), c_t^i(t+1)\right)$ que són factibles per al consumidor i de la generació t, donada la dotació $w_t^i = \left(w_t^i(t), w_t^i(t+1)\right)$ i la taxa d'interès bruta $R(t)$, i assumint que la dotació del bé només pot ser incrementada mitjançant el mercat de préstecs del bé. Establerta la restricció vital (1), el problema de decisió (2) de tot consumidor jove i de la generació t consisteix a

$$\begin{gathered} maximitzar_{\{c_t^i(t),\, c_t^i(t+1)\}} \;\; u_t^i\left(c_t^i(t), c_t^i(t+1)\right) \\ sotmès\ a \;\; c_t^i(t) + \frac{c_t^i(t+1)}{R(t)} = w_t^i(t) + \frac{w_t^i(t+1)}{R(t)}. \end{gathered} \tag{2}$$

• **Solució del problema de decisió d'un consumidor jove.** Emprant la tècnica dels multiplicadors de Lagrange, la solució del problema (2) pot obtenir-se resolent el problema (3). A més, s'assumeix que u_t^i satisfà propietats que garanteixen que les condicions necessàries (de primer ordre) per a resoldre (3) són també condicions suficients (per exemple, que les corbes d'indiferència d'u_t^i són estrictament convexes, contínues i decreixents).

$$\begin{gathered} maximitzar_{\{c_t^i(t),\, c_t^i(t+1)\}} \; L\left(c_t^i(t), c_t^i(t+1), \lambda\right) = u_t^i\left(c_t^i(t), c_t^i(t+1)\right) + \\ \lambda\left(w_t^i(t) + \frac{w_t^i(t+1)}{R(t)} - c_t^i(t) - \frac{c_t^i(t+1)}{R(t)}\right) \end{gathered} \tag{3}$$

Les condicions de primer ordre per a resoldre (3) són (4), (5) i (6).

$$0 = \frac{\partial L}{\partial c_t^i(t)} = \frac{\partial u_t^i}{\partial c_t^i(t)} - \lambda \tag{4}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial c_t^i(t+1)} = \frac{\partial u_t^i}{\partial c_t^i(t+1)} - \frac{\lambda}{R(t)} \tag{5}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = w_t^i(t) + \frac{w_t^i(t+1)}{R(t)} - c_t^i(t) - \frac{c_t^i(t+1)}{R(t)} \tag{6}$$

La condició (6) és la restricció pressupostària (1). Aïllant λ en (4), $\lambda = \frac{\partial u_t^i}{\partial c_t^i(t)}$. Aïllant λ en (5), $\lambda = \frac{\partial u_t^i}{\partial c_t^i(t+1)} R(t)$. Com a resultat, $\frac{\partial u_t^i}{\partial c_t^i(t)} = \frac{\partial u_t^i}{\partial c_t^i(t+1)} R(t)$. Equivalentment,

$$R(t) = \frac{\partial u_t^i / \partial c_t^i(t)}{\partial u_t^i / \partial c_t^i(t+1)}\,. \tag{7}$$

El terme $\frac{\partial u_t^i}{\partial c_t^i(t)}$ és la utilitat marginal que el consumidor jove i obté del consum present $c_t^i(t)$. El terme $\frac{\partial u_t^i}{\partial c_t^i(t+1)}$ és la utilitat marginal que el consumidor jove i obté del consum futur $c_t^i(t+1)$. El seu quocient és la relació marginal de substitució $RMS_t^i = \frac{\partial u_t^i / \partial c_t^i(t)}{\partial u_t^i / \partial c_t^i(t+1)}$ del consumidor i. Geomètricament, RMS_t^i avaluada en el lot $c_t^i = \left(c_t^i(t), c_t^i(t+1)\right)$ és el pendent en valor absolut de la corba d'indiferència que conté el lot c_t^i. La interpretació estàndard és que RMS_t^i representa l'increment en $c_t^i(t+1)$ necessari per a mantenir la utilitat constant davant d'una reducció de $c_t^i(t)$.

• **Mètode alternatiu de solució.** El problema (2) també es pot resoldre inserint (1) en la funció d'utilitat. Aïllant $c_t^i(t+1)$ en (1), $c_t^i(t+1) = R(t)[w_t^i(t) - c_t^i(t)] + w_t^i(t+1)$. Un cop introduïda aquesta condició en u_t^i, (2) esdevé

$$max_{\{c_t^i(t)\}} \; u_t^i\left(c_t^i(t), R(t)[w_t^i(t) - c_t^i(t)] + w_t^i(t+1)\right).$$

Atès que $c_t^i(t+1) = R(t)[w_t^i(t) - c_t^i(t)] + w_t^i(t+1)$, el càlcul del diferencial total de la funció d'utilitat u_t^i resulta en

$$du_t^i = \frac{\partial u_t^i}{\partial c_t^i(t)} dc_t^i + \frac{\partial u_t^i}{\partial c_t^i(t+1)} \frac{\partial c_t^i(t+1)}{\partial c_t^i(t)} dc_t^i\,,$$

això és,

$$\frac{du_t^i}{dc_t^i(t)} = \frac{\partial u_t^i}{\partial c_t^i(t)} - \frac{\partial u_t^i}{\partial c_t^i(t+1)} R(t).$$

Maximitzar u_t^i requereix $\frac{du_t^i}{dc_t^i(t)} = 0$. D'aquí s'obté (7). Aquesta condició i $c_t^i(t+1) = R(t)[w_t^i(t) - c_t^i(t)] + w_t^i(t+1)$, que és la restricció pressupostària (1), solucionen el problema (2). Les solucions de (2) són les funcions de demanda d'i de consum present $c_t^i(t) = c(w_t^i(t), w_t^i(t+1), R(t))$ i de consum futur $c_t^i(t+1) = \tilde{c}(w_t^i(t), w_t^i(t+1), R(t))$. En general, ambdues funcions de demanda dependran de les dotacions $w_t^i(t)$ i $w_t^i(t+1)$ del consumidor, que són variables exògenes, i de la taxa d'interès bruta $R(t)$, que és una variable endògena.

• **Equilibri en el mercat de préstecs.** Sigui $O(t) = \{i \in N(t): l^i(t) > 0\}$ el total de prestadors (els oferents de préstecs) en el període t. Sigui $D(t) = \{i \in N(t): l^i(t) < 0\}$ el total de prestataris (els demandants de préstecs) en el període t. En equilibri, la suma del que ofereixen els prestadors és igual a la suma (en valor absolut) del que demanden els prestataris. Formalment, $\sum_{i\in O(t)} l^i(t) = \left| \sum_{i\in D(t)} l^i(t) \right|$. Expressant aquesta condició eliminant el valor absolut resulta $\sum_{i\in O(t)} l^i(t) + \sum_{i\in D(t)} l^i(t) = 0$. Atès que en el mercat de préstecs només hi participen els joves, $O(t) + D(t) = N(t)$. En resum, la condició d'equilibri en el mercat de préstecs estableix que

$$\sum_{i\in N(t)} l^i(t) = 0\,. \tag{8}$$

Emprant (8) es calcula la taxa d'interès bruta $R(t)$ que equilibria el mercat de préstecs. Coneixent $R(t)$, les funcions de demanda $c(w_t^i(t), w_t^i(t+1), R(t))$ i $\tilde{c}(w_t^i(t), w_t^i(t+1), R(t))$ del consum del bé obtingudes en solucionar (2) determinen el lot de consum triat pel consumidor donades les seves dotacions i la taxa d'interès d'equilibri derivada de (8).

• **Equilibri general competitiu.** Un equilibri general competitiu és una seqüència $\{\hat{R}(t)\}_{t\geq 1}$ de taxes d'interès brutes i una assignació de consum $\{\hat{c}_t^i\}_{t\geq 0, i\in N(t)}$ que satisfan les condicions **E1** i **E2**.

E1. Per a tot període $t \geq 1$ i consumidor $i \in N(t)$, $\hat{c}_t^i$ maximitza u_t^i donat $\hat{R}(t)$ i les dotacions w_t^i d'i (per a $t = 0$, $\hat{c}_t^i$ és la dotació del consumidor gran i); equivalentment, $\hat{c}_t^i$ soluciona (2) i, en conseqüència, s'obté combinant (1) i (7).

E2. Per a tot període $t \geq 1$, $\hat{R}(t)$ equilibra el mercat de préstecs; això és, $\hat{R}(t)$ satisfà (8).

• **Funcions d'estalvi.** Estalvi és la dotació no consumida. Els únics consumidors que poden tenir interès en estalviar són els joves. De la restricció pressupostària d'un jove i resulta $l^i(t) = w_t^i(t) - c_t^i(t)$. Per tant, l'estalvi $s^i(t)$ d'un consumidor jove i coincideix amb els seus préstecs: $s^i(t) = w_t^i(t) - c_t^i(t)$. En aquest model, l'única manera d'estalviar és fent préstecs del bé. Si $c_t^i(t) = c(w_t^i(t), w_t^i(t+1), R))$ és la funció de demanda de consum present obtinguda en solucionar (2), aleshores es pot definir una funció d'estalvi $s^i(t) = s(w_t^i(t), w_t^i(t+1), R(t))$ que depèn de les dotacions i la taxa d'interès. Atès que (8) expressa la condició d'equilibri del mercat de préstecs i que, per a tot jove i, $s^i(t) = l^i(t)$, se segueix que (8) pot ser reemplaçada per (9).

$$\sum_{i\in N(t)} s^i(t) = 0\,. \tag{9}$$

• **El mercat de préstecs del bé com a mercat de consum del bé.** L'únic mercat d'aquesta economia, el mercat de préstecs, es pot reinterpretar com a "mercat del bé". El mercat de préstecs és intertemporal, perquè vincula una transferència del bé en un període (de prestador a prestatari) amb una transferència en el període següent (de prestatari a prestador). El mercat del bé és intratemporal (només involucra un període) i connecta l'oferta del bé (la dotació total de bé en l'economia en un període) amb la demanda de consum del bé (el consum total del bé en el mateix període). La condició d'equilibri d'aquest mercat seria

$$\sum_{i\in N(t)} w_t^i(t) + \sum_{i\in N(t-1)} w_{t-1}^i(t) = \sum_{i\in N(t)} c_t^i(t) + \sum_{i\in N(t-1)} c_{t-1}^i(t)\,, \tag{10}$$

on $Y(t) = \sum_{i\in N(t)} w_t^i(t) + \sum_{i\in N(t-1)} w_{t-1}^i(t)$ representa la quantitat total de bé existent en el període t (l'oferta agregada del bé) i $\sum_{i\in N(t)} c_t^i(t) + \sum_{i\in N(t-1)} c_{t-1}^i(t)$ representa la quantitat total que es vol consumir del bé en el període t (la demanda agregada del bé).

• **Les condicions** (9) **i** (10) **són equivalents.** Reordenant (10),

$$\sum_{i\in N(t)}(w_t^i(t) - c_t^i(t)) + \sum_{i\in N(t-1)} w_{t-1}^i(t) = \sum_{i\in N(t-1)} c_{t-1}^i(t).$$

Equivalentment,

$$\sum_{i\in N(t)} s^i(t) + \sum_{i\in N(t-1)} w_{t-1}^i(t) = \sum_{i\in N(t-1)} c_{t-1}^i(t).$$

La condició anterior és equivalent a (9) si $\sum_{i\in N(t-1)} w_{t-1}^i(t) = \sum_{i\in N(t-1)} c_{t-1}^i(t)$. Aquesta igualtat diu que el que consumeixen els grans en el període t coincideix amb el que els grans, com a grup, tenen com a dotació en t. La igualtat es compleix per la hipòtesi que tots els consumidors intenten obtenir la màxima utilitat del seu consum present i futur. La demostració és per contradicció: suposar que la igualtat no se satisfà condueix a una contradicció.

Si $\sum_{i\in N(t-1)} w_{t-1}^i(t) > \sum_{i\in N(t-1)} c_{t-1}^i(t)$ fos el cas, aleshores el conjunt de grans en t estaria consumint menys que la seva dotació total. En particular, algun gran estaria consumint menys del que té. En tal cas, aquell gran podria augmentar la seva utilitat consumint tot el que té. Per tant, la desigualtat $\sum_{i\in N(t-1)} w_{t-1}^i(t) > \sum_{i\in N(t-1)} c_{t-1}^i(t)$ implica que algun consumidor gran no maximitza la seva utilitat, conclusió que contradiu la hipòtesi que tots els consumidors maximitzen utilitat.

Si $\sum_{i\in N(t-1)} w_{t-1}^i(t) < \sum_{i\in N(t-1)} c_{t-1}^i(t)$ fos el cas, llavors el conjunt de grans en t estaria consumint més que la seva dotació total. Això requereix que algun gran rebi dotació d'algun jove. Però en fer un préstec a un gran aquest jove estaria malbaratant utilitat, atès que estaria renunciant a consumir bé en el període present a canvi de no res en el següent període (perquè en el següent període el consumidor gran no hi serà per a retornar el deute contret amb el jove). D'aquesta manera, la desigualtat $\sum_{i\in N(t-1)} w_{t-1}^i(t) < \sum_{i\in N(t-1)} c_{t-1}^i(t)$ és inconsistent amb la hipòtesi que tots els consumidors maximitzen utilitat.

• **L'assignació de consum d'un equilibri general no necessàriament és Paretoeficient.** Una assignació de consum $C = \{c_t^i\}_{t\geq 0, i\in N(t)}$ és <u>Paretoeficient</u> si no hi ha cap altra assignació de consum $\tilde{C} = \{\tilde{c}_t^i\}_{t\geq 0, i\in N(t)}$ tal que: (i) per a algun $t \geq 1$ i algun $i \in N(t)$, $u_t^i(\tilde{c}_t^i) > u_t^i(c_t^i)$; i (ii) per a tot $t \geq 1$ i tot $i \in N(t)$, $u_t^i(\tilde{c}_t^i) \geq u_t^i(c_t^i)$.

Que l'assignació C sigui Paretoeficient vol dir que no hi ha cap altra assignació $\tilde{C}$ on algun consumidor tingui més utilitat que a C i cap consumidor no en tinc menys que a C. El següent exemple demostra que una assignació d'equilibri no és necessàriament Paretoeficient.

1.3. Exemple

• **Descripció de l'economia**. Cada generació neixen dos grups de consumidors, G1 i G2, cadascú amb 50 membres. Tots ells tenen la mateixa funció d'utilitat: tot consumidor jove i en t té la funció d'utilitat $u_t^i = c_t^i(t) \cdot c_t^i(t+1)$. La dotació de cada membre G1 de és (1, 0): una unitat de jove i cap de gran. La dotació de cada membre G2 de és (2, 2): dues unitats de jove i dues de gran.

• **Convenció.** En endavant, la coma volada ($'$) indicarà una variable referida al moment $t+1$ i la seva absència significarà que la variable corresponent es refereix al moment t. A més, en general s'obviarà el superíndex que identifica a un consumidor. Seguint aquesta convenció, la funció d'utilitat $u_t^i = c_t^i(t) \cdot c_t^i(t+1)$ s'expressa $u = c \cdot c'$. El número 1 identificarà un membre del grup G1 i el 2 a un member de G2.

• **Càlcul de les funcions de demanda de consum dels membres de** G1. La restricció pressupostària de cada membre jove del grup 1 és $c_1 + l_1 = 1$. La restricció pressupostària de cada membre gran del grup 1 és $c_1' = Rl_1$. La restricció pressupostària vital de cada membre del grup 1 és $c_1 + \frac{c_1'}{R} = 1$. Per a maximitzar u_1, cal que $\frac{\partial u_1/\partial c_1}{\partial u_1/\partial c_1'} = R$. Com a resultat, $c_1 = \frac{c_1'}{R}$. Emprant la restricció pressupostària vital, resulta $c_1 + c_1 = 1$. La funció de demanda de consum de cada membre jove de G1 és $c_1 = \frac{1}{2}$.

• **Càlcul de les funcions de demanda de consum dels membres de** G2. La restricció pressupostària de cada membre jove del grup 2 és $c_2 + l_2 = 2$. La restricció pressupostària de cada membre gran del grup 2 és $c_2' = Rl_2 + 2$. La restricció pressupostària vital de cada membre del grup 2 és $c_2 + \frac{c_2'}{R} = 2 + \frac{2}{R}$. Per a maximitzar u_2, cal que $\frac{\partial u_2/\partial c_2}{\partial u_2/\partial c_2'} = R$. Així, $c_2 = \frac{c_2'}{R}$. Fent servir la restricció pressupostària vital, s'obté $c_2 + c_2 = 2 + \frac{2}{R}$. La funció de demanda de consum de cada membre jove de G2 és $c_2 = 1 + \frac{1}{R}$.

• **Càlcul de la funció d'estalvi agregat.** La funció d'estalvi de cada membre de G1 és $s_1 = w_1 - c_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. L'estalvi agregat del grup G1 és $S_1 = 50 \cdot s_1 = 25$. La funció d'estalvi de cada membre de G2 és $s_2 = w_2 - c_2 = 2 - \left(1 + \frac{1}{R}\right) = 1 - \frac{1}{R}$. L'estalvi agregat del grup G2 és $S_2 = 50 \cdot s_2 = 50 - \frac{50}{R}$. L'estalvi agregat és $S = S_1 + S_2 = 75 - \frac{50}{R}$.

• **Càlcul de la taxa d'interès d'equilibri.** La condició d'equilibri és $S = 0$. Se segueix de $75 - \frac{50}{R} = 0$ que $R = \frac{2}{3}$. Substituint a les funcions de consum dels joves, $c_1 = \frac{1}{2}$ i $c_2 = \frac{5}{2}$. Sabent que $c_1 = \frac{c_1'}{R}$, $c_1' = \frac{1}{3}$. Sabent que $c_2 = \frac{c_2'}{R}$, $c_2' = \frac{5}{3}$. Per tant, el total de joves de G1 consumeixen 25 (quan la seva dotació total és 50) i el total de joves de G2 consumeixen 125 (quan la seva dotació total és 100). Les 25 unitats que estalvien (presten) els membres de G1 són les 25 unitats addicionals que consumeixen (manlleven) els membres de G2. Com era d'esperar, el consum total dels grans ($\frac{50}{3}$ dels de G1 i $\frac{250}{3}$ dels de G2) coincideix amb la dotació total dels grans (100).

• **Paretoineficiència de l'assignació de consum d'equilibri.** L'assignació de consum d'equilibri C és aquella on, per a cada període, el lot de consum de cada membre de G1 és $(c_1, c_1') = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ (cada un d'ells estalvia $s_1 = \frac{1}{2}$) i el lot de consum de cada membre de G2 és $(c_2, c_2') = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{3}\right)$ (cada un estalvia $s_2 = -\frac{1}{2}$). Per a demostrar que C no és Paretoeficient, sigui $\tilde{C}$ l'assignació de consum definida a partir de C fent que, en cada període, cada consumidor jove lliuri $\varepsilon > 0$ unitats del bé a un consumidor gran diferent. Això fa que, en $\tilde{C}$, el lot de consum de cada membre de G1 sigui $(\tilde{c}_1, \tilde{c}_1') = \left(\frac{1}{2} - \varepsilon,\ \frac{1}{3} + \varepsilon\right)$ i el lot de consum de cada membre de G2 sigui $(\tilde{c}_2, \tilde{c}_2') = \left(\frac{5}{2} - \varepsilon,\ \frac{5}{3} + \varepsilon\right)$.

En C, la utilitat cada període és $u_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ per a cada membre de G1 i $u_2\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{3}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{25}{6}$ per a cada membre de G2. En $\tilde{C}$, la utilitat cada període és $u_1\left(\frac{1}{2} - \varepsilon,\ \frac{1}{3} + \varepsilon\right) = \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \cdot \left(\frac{1}{3} + \varepsilon\right) = \frac{1}{6} + \varepsilon \cdot \left(\frac{1}{6} - \varepsilon\right)$ per a cada membre de G1 i $u_2\left(\frac{5}{2} - \varepsilon,\ \frac{5}{3} + \varepsilon\right) = \left(\frac{5}{2} - \varepsilon\right) \cdot \left(\ \frac{5}{3} + \varepsilon\right) = \frac{25}{6} + \varepsilon \cdot \left(\frac{5}{6} - \varepsilon\right)$ per a cada membre de G2.

En conseqüència, per a què la utilitat de cada membre de G1 sigui superior en $\tilde{C}$ que en C cal que $\varepsilon \cdot \left(\frac{1}{6} - \varepsilon\right) > 0$; això és, cal que $\varepsilon < \frac{1}{6}$. De manera anàloga, per a què la utilitat de cada membre de G2 sigui superior en $\tilde{C}$ que en C cal que $\varepsilon \cdot \left(\frac{5}{6} - \varepsilon\right) > 0$; és a dir, cal que $\varepsilon < \frac{5}{6}$. En suma, la transferència de joves a grans de qualsevol $\varepsilon < \frac{1}{6}$ fa que tots els joves tinguin més utilitat en $\tilde{C}$ que en C.

En relació amb els grans, en C, en cada període un membre gran de G1 consumeix $\frac{1}{3}$ unitats del bé, en tant que, en $\tilde{C}$, consumeix $\frac{1}{3} + \varepsilon$. Respecte dels membres grans de G2, cadascun d'ells consumeix $\frac{5}{3}$ en C i $\frac{5}{3} + \varepsilon$ en $\tilde{C}$. La conclusió és que tots els consumidors grans consumeixen més (i, així, obtenen més utilitat) en $\tilde{C}$ que en C. Tot plegat demostra que C no es Paretoeficient.

• **Desigualtat.** <u>L'existència del mercat de préstecs augmenta la utilitat de tothom en relació amb la utilitat sense mercat</u>. En concret, sense mercat, la utilitat de cada membre jove de G1 seria la utilitat de la seva dotació: $u_1(1{,}0) = 1 \cdot 0 = 0$. Amb mercat, la utilitat puja a $u_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Una lliçó paral·lela és que el mercat de préstecs incrementa la desigualtat en la distribució del bé. Sense mercat, cada membre de G1 podia consumir, al llarg de la seva vida, $1 + 0 = 1$ unitats del bé; amb el mercat, només consumeix $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. Això implica que cada membre de G2 té accés a més quantitat de bé al llarg de la seva vida amb mercat que sense.