2. Un model de generacions encavalcades amb producció exògena i govern

2.1. Elements del model

• **Govern.** El model conté els elements del model descrit en el punt 1.1 amb la inclusió d'un agent immortal: el govern. Les funcions econòmiques del govern es redueixen a una de sola: redistribuir bé entre els consumidors, prenent a uns per a donar a d'altres. El mercat de préstecs aconseguia la mateixa funció, però sense forçar la voluntat dels consumidors. El govern actua sense que el vist-i-plau dels afectats. En particular, el govern només pot dur a terme tres activitats: recaptar bé mitjançant imposts; assignar la recaptació impositiva a consumidors per mitjà de transferències; i endeutar-se amb els consumidors. Un impost pot ser interpretat com una transferència negativa i una transferència pot interpretar-se com un impost negatiu. Per aquesta raó, els conceptes d'impost i transferència es poden reduir a un de sol. D'altra banda, l'endeutament del govern està al servei de la seva funció redistributiva: és una eina per a dur a terme la redistribució del bé.

2.2. Anàlisi del model amb imposts

• **Imposts.** Un impost τ_t^i que recau sobre consumidor i de la generació t és un parell $\left(\tau_t^i(t), \tau_t^i(t+1)\right)$, on $\tau_t^i(s)$ és la quantitat de bé que el consumidor $i \in N(t)$ paga al govern, o rep del govern, en el període $s \in \{t, t+1\}$. Si $\tau_t^i(s) > 0$, aleshores el consumidor paga $\tau_t^i(s)$ unitats del bé al govern; si $\tau_t^i(s) < 0$, llavors el consumidor rep $\tau_t^i(s)$ unitats del bé del govern.

• **Restricció pressupostària del govern.** La restricció pressupostària del govern quan tota la recaptació que fa el govern en un període es reparteix entre els consumidors del mateix període estableix que, per a tot $t \geq 1$, $\sum_{i \in N(t)} \tau_t^i(t) + \sum_{i \in N(t-1)} \tau_{t-1}^i(t) = 0$: tot el que es recapta es reparteix.

• **Càlcul de l'equilibri general competitiu**. Es calcula de la mateixa manera que en el cas sense govern (i) reemplaçant la dotació $w_t^i(s)$ amb $w_t^i(s) - \tau_t^i(s)$ i (ii) afegint-hi la restricció pressupostària del govern. En concret, la nova restricció pressupostària vital del consumidor i és

$$c_t^i(t) + \frac{c_t^i(t+1)}{R(t)} = w_t^i(t) - \tau_t^i(t) + \frac{w_t^i(t+1) - \tau_t^i(t+1)}{R(t)} \,. \tag{1}$$

• **Redefinició de l'estalvi**. L'estalvi $s^i(t)$ d'un consumidor jove i es pot redefinir com la part de la dotació disponible d'i (la dotació neta d'imposts) $w_t^i(t) - \tau_t^i(t)$ que no es consumeix. Això és,

$$s^i(t) = w_t^i(t) - \tau_t^i(t) - c_t^i(t) \,. \tag{2}$$

• **Condició d'equilibri**. Amb l'estalvi definit com (2), la taxa d'interès d'equilibri $R(t)$ en el període t s'obté (com en el cas sense imposts) de la condició $\sum_{i \in N(t)} s^i(t) = 0$. Si $s^i(t)$ es definís com en el cas sense imposts (és a dir, $s^i(t) = w_t^i(t) - c_t^i(t)$), aleshores la condició d'equilibri seria $\sum_{i \in N(t)} s^i(t) = \sum_{i \in N(t)} \tau_t^i(t)$: l'estalvi dels joves coincideix amb els imposts que paguen els joves.

2.3. Anàlisi del model amb imposts i deute públic

• **Bons.** L'únic instrument d'endeutament del govern és el bo d'un període. Un bo d'un període (emès en el període t i amb venciment en el període $t + 1$) és una promesa certa i segura de pagament del govern de lliurar una unitat del bé en $t + 1$ a canvi d'un preu $p(t) < 1$ que el comprador del bo paga al govern en el període t.

• **Preu dels bons.** El preu $p(t)$ d'un bo s'assumeix determinat en un mercat competitiu de bons: oferta de bons en t i demanda de bons en t determien el preu dels bons en t. En aquest mercat, el govern fa d'únic venedor del bo i els consumidors (joves o grans) poden comprar-los pagant el preu $p(t)$. El valor nominal de cada bo és 1: qui compra un bo en t, paga $p(t) < 1$ unitats del bé en t i rep una unitat del bé en $t + 1$. Això significa que el govern emet els bons amb descompte: el preu de venda d'un bo és inferior al seu valor nominal.

• **Taxa d'interès implícita dels bons.** La taxa d'interès que es pot associar a un bo és $\frac{1-p(t)}{p(t)}$: el guany $1 - p(t)$ obtingut de la inversió en bons dividit pel cost $p(t)$ de la inversió. La taxa d'interès bruta del bo és $1 + \frac{1-p(t)}{p(t)} = \frac{1}{p(t)}$: el comprador del bo obté 1 en $t + 1$ a canvi d'invertir $p(t)$ en t.

• **Emissió de bons.** Per a $t \geq 1$, $B(t)$ designa el nombre total de bons que el govern emet en el període t. Atès que el valor nominal de cada bo és 1, $B(t)$ també representa el deute (en unitats del bé) que el govern ha de pagar en el període $t + 1$ als compradors dels bons.

• **Restricció pressupostària del govern.** La restricció pressupostària del govern en el període t és

$$\underbrace{B(t-1)}_{\textit{deute a pagar en t}} = \underbrace{\textstyle\sum_{i\in N(t)} \tau_t^i(t)}_{\textit{imposts sobre joves}} + \underbrace{\textstyle\sum_{i\in N(t-1)} \tau_{t-1}^i(t)}_{\textit{imposts sobre grans}} + \underbrace{p(t)B(t)}_{\textit{nous bons}}.$$

• **Redempció de bons.** La restricció mostra les tres maneres de redimir els bons emesos en $t - 1$: fer pagar imposts als joves en t; fer pagar imposts als grans en t; i emetre bons nous en t. Gràcies al bons, ara no cal que $\sum_{i\in N(t)} \tau_t^i(t) + \sum_{i\in N(t-1)} \tau_{t-1}^i(t)$ sigui zero.

• **Els grans no compren bons.** En el model sense govern, els consumidors grans no prestaven a ningú. El mateix raonament que demostrava aquest fet és vàlid per a concloure que cap consumidor gran no comprarà bons (activitat que equival a prestar al govern).

• **Restricció pressupostària d'un jove.** Atès que només els joves estaran disposats a comprar bons, el consumidor jove i de la generació t s'enfronta a la següent restricció pressupostària, on $b^i(t)$ és el nombre de bons que compra i en el mercat de bons.

$$c_t^i(t) + l^i(t) + \tau_t^i(t) + p(t)b^i(t) = w_t^i(t).$$

La restricció diu que i pot donar quatre usos a la seva dotació de bé $w_t^i(t)$: la pot consumir; la pot prestar en el mercat de préstecs (mercat de deute privat); la pot lliurar (en forma d'impost) al govern; i la pot prestar al govern, comprant $b^i(t)$ bons en el mercat de deute públic.

• **Restricció pressupostària d'un consumidor gran.** Designant per $R(t)$ la taxa d'interès bruta en el mercat de préstecs, la restricció pressupostària d'un consumidor gran i de la generació t és

$$c_t^i(t+1) + \tau_t^i(t+1) = w_t^i(t+1) + R(t)l^i(t) + b^i(t).$$

• **Restricció pressupostària vital.** Reunint les dues restriccions (aïllant $l^i(t)$ en la primera d'elles i inserint el resultat en la segona), la restricció pressupostària vital del consumidor i esdevé

$$c_t^i(t) + \frac{c_t^i(t+1)}{R(t)} = w_t^i(t) - \tau_t^i(t) + \frac{w_t^i(t+1) - \tau_t^i(t+1)}{R(t)} - b^i(t)\left[p(t) - \frac{1}{R(t)}\right]. \tag{3}$$

• **Relació entre el preu dels préstecs i el preu dels bons: $\boldsymbol{p(t)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{R(t)}}$.** Un consumidor que vulgui estalviar $p(t)$ unitats del bé en el període t té a l'abast dues opcions.

- **Opció 1.** Ser comprador en el mercat de bons. Essent $p(t)$ el preu d'un bo en t, el benefici corresponent a aquesta decisió d'estalvi és 1 unitat del bé en el període següent $t+1$.

- **Opció 2.** Ser prestador en el mercat de préstecs. Prestant $p(t)$ unitats del bé en el mercat de préstecs i donada la taxa $R(t)$ en t, s'obtenen $p(t)R(t)$ unitats del bé en el període $t+1$.

Si s'assumeix l'existència d'arbitratge entre els mercats de préstecs i de bons, les dues opcions han de generar el mateix resultat; això és, $1 = p(t)R(t)$: prestar al govern produeix el mateix benefici que prestar a consumidors. Aquesta igualtat pot demostrar-se per contradicció.

Si $1 > p(t)R(t)$ fos el cas, aleshores el préstec públic seria més profitós que el préstec privat. Així, manllevant $p(t)$ unitats del bé en el mercat de préstecs per a adquirir un bo, en $t+1$ el bo pagaria 1 unitat del bé, en tant que retornar el deute requereix $p(t)R(t)$ unitats. Com a resultat, es genera un benefici segur d'$1 - p(t)R(t)$ unitats del bé. Però en un equilibri general no poden existir oportunitats d'arbitratge. Per tant, una demanda creixent de préstecs i bons provocaria un augment en els seus respectius preus $R(t)$ i $p(t)$. De manera anàloga, també hi hauria oportunitats d'arbitratge si $1 < p(t)R(t)$: el préstec públic és menys profitós que el préstec privat.

Per a què ambdós mercats existeixin cal que hi hagi prestadors disposats a participar en tots dos mercats. Per consegüent, s'ha de tenir la mateixa rendibilitat en els dos mercats: $1 = p(t)R(t)$, que implica $\frac{1}{p(t)} = R(t)$, on $\frac{1}{p(t)}$ representa la taxa d'interès bruta del bo i $R(t)$ és la taxa d'interès bruta d'un préstecs. Atès que $\frac{1}{p(t)} = R(t)$ equival a $p(t) - \frac{1}{R(t)} = 0$, el terme $b^i(t)\left[p(t) - \frac{1}{R(t)}\right]$ en el costat dret de (3) és zero. La conclusió final és que, assumint arbitratge, la restricció pressupostària vital de tot consumidor jove i és idèntica a la del cas sense bons: l'equació (1).

• **Equilibri general competitiu.** Donats imposts $\{\tau_t^i\}_{t\geq 0, i\in N(t)}$, un equilibri general competitiu és una seqüència $\{\hat{R}(t)\}_{t\geq 1}$ de taxes d'interès brutes i una assignació de consum $\{\hat{c}_t^i\}_{t\geq 0, i\in N(t)}$ que satisfan les condicions **E1** i **E2**.

E1. Per a tot període $t \geq 1$ i consumidor $i \in N(t)$, $\hat{c}_t^i$ maximitza u_t^i donat $\hat{R}(t)$ i les dotacions netes $w_t^i - \tau_t^i$ d'i (per a $t = 0$, $\hat{c}_t^i$ és la dotació neta d'imposts del consumidor gran i).

E2. Per a tot període $t \geq 1$, $\hat{R}(t)$ equilibra el mercat de préstecs.

• **Remarques sobre el mercat de bons.** Per la llei de Walras, no cal exigir equilibri del mercat de bons: amb dos mercats, si un està en equilibri, l'altre també. D'altra banda, assumint arbitratge entre els mercats de préstecs i bons, $p(t) = \frac{1}{R(t)}$.

• **Càlcul de la taxa d'interès d'equilibri.** Sigui $S_t = \sum_{i\in N(t)} s^i(t)$ la funció d'estalvi agregat, amb $s^i(t)$ definit segons (2). Cada estalvi individual $s^i(t)$ en general dependrà de les dotacions, els imposts i la taxa d'interès. Per tant, S_t també serà funció de dotacions, imposts i taxa d'interès. Atès que les dotacions i els imposts són variables exògenes (paràmetres), s'emfasitzarà només la dependència d'S_t de la variable endògena $R(t)$ escrivint $S_t(R(t))$. Seguint aquesta convenció, l'expressió (4) determina la taxa d'interès d'equilibri i fa que tots els mercats estiguin en equilibri.

$$S_t(R(t)) = p(t)B(t) \tag{4}$$

• **Justificació de** (4)**.** En l'economia hi ha ara dos mercats: el mercat de deute privat (de préstecs) i el mercat de deute públic (de bons). En un equilibri general competitiu tots dos mercats estan en equilibri. Per la llei de Walras, l'equilibri d'un mercat implica l'equilibri de l'altre. Si se sumen les restriccions pressupostàries de tots els joves del període t, s'obté

$$\sum_{i\in N(t)} c_t^i(t) + \sum_{i\in N(t)} l^i(t) + \sum_{i\in N(t)} \tau_t^i(t) + p(t)\sum_{i\in N(t)} b^i(t) = \sum_{i\in N(t)} w_t^i(t) .$$

L'equilibri en el mercat de préstecs demanda $\sum_{i\in N(t)} l^i(t) = 0$. Reordenant,

$$\sum_{i\in N(t)}\left[w_t^i(t) - c_t^i(t) - \tau_t^i(t)\right] = p(t)\sum_{i\in N(t)} b^i(t).$$

Segons (2), $w_t^i(t) - c_t^i(t) - \tau_t^i(t) = s^i(t)$. Així doncs, $\sum_{i\in N(t)} s^i(t) = p(t)\sum_{i\in N(t)} b^i(t)$. En paral·lel, hi ha equilibri en el mercat de bons si $\sum_{i\in N(t)} b^i(t) = B(t)$; en paraules, si la demanda $\sum_{i\in N(t)} b^i(t)$ de bons és igual a l'oferta $B(t)$ de bons del govern. En suma, $S_t = \sum_{i\in N(t)} s^i(t) = p(t)B(t)$.

• **Interpretació de** (4)**.** La condició (4) diu que l'estalvi total dels joves en t ha de finançar el valor total del deute del govern en t, deute que coincideix amb l'emissió de bons del període anterior $t-1$. Donat que $R(t) = 1/p(t)$, (4) equival a

$$S_t(R(t)) = \frac{B(t)}{R(t)},$$

de manera que l'estalvi agregat en t és igual al valor present del deute $B(t)$ en $t+1$.

2.4. Exemple

• **Descripció de l'economia i de l'objectiu del govern**. Per a tot t i i, $u_t^i = c_t^i(t) \cdot c_t^i(t+1)$, $N(t) = 100$, els consumidors de cada generació estan numerats d'1 a 100, $w_t^i = (2,0)$ si i és senar, i $w_t^i = (1,1)$ si i és parell. El govern vol aconseguir 25 unitats del bé en $t = 1$ venent bons, transferir les 25 unitats als grans de $t = 1$ i pagar el deute generat per l'emissió de bons fent pagar cada jove en $t = 2$ l'impost τ. A continuació es calculen $R(1)$, $B(1)$, $R(2)$, $R(3)$ i τ.

• **Estalvi agregat quan no es paguen imposts.** Si no es paguen imposts en t, la funció d'estalvi del consumidor i és $s^i(t) = 1$ si i és senar i $s^i(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2R(t)}$ si i és parell. La corresponent funció d'estalvi agregat és $S_t = 50(1) + 50\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2R(t)}\right) = 75 - \frac{25}{R(t)}$.

• **Equilibri general competitiu en $t = 1$.** L'equilibri en $t = 1$ requereix $S_1 = p(1)B(1)$. Atès que el govern pretén 25 unitats del bé amb l'emissió de la quantitat $B(1)$ de bons, $p(1)B(1) = 25$. Així, en l'equilibrium en $t = 1$, $S_1 = 25$. Sabent que $S_1 = 75 - \frac{25}{R(1)}$, se segueix que $75 - \frac{25}{R(t)} = 25$ i, en conseqüència, $R(1) = \frac{1}{2}$. L'estalvi individual és $s^i(1) = 1$ si i és senar i $s^i(1) = -\frac{1}{2}$ si i és parell. Interpretació: en el període 1, els consumidors senars presten 50 unitats del bé en total, en tant que els consumidors parells manlleven 25 en total. La diferència (25 unitats de bé) és el que manlleva el govern mitjançant la venda dels bons. Emprant $S_1 = B(1)/R(1)$, amb $S_1 = 25$ i $R(1) = 1/2$, s'arriba a $B(1) = 12{,}5$. El valor $B(1)$ és, a un temps, el nombre de <u>bons emesos en $t = 1$</u> i el volum d'imposts que els joves en $t = 2$ hauran de pagar en $t = 2$. De tot plegat es conclou que $\tau = \frac{1}{8}$.

• **Equilibri general competitiu en $t = 2$.** Per la hipòtesi que els joves paguen l'impost, la restricció pressupostària vital d'un consumidor jove i és $c_2^i(2) + \frac{c_2^i(3)}{R(2)} = 2 - \tau$ si i és senar i $c_2^i(2) + \frac{c_2^i(3)}{R(2)} = 1 - \tau + \frac{1}{R(2)}$ si i és parell.

Un i senar té, de jove, la funció de demanda de consum $c_2^i(2) = 1 - \frac{\tau}{2}$. D'aquí resulta una funció d'estalvi igual a $s^i(2) = 2 - \tau - c_2^i(2) = 1 - \frac{\tau}{2}$. Se segueix que i paga l'impost τ reduint consum i estalvi en la mateixa quantia: $\frac{\tau}{2}$. Pot interpretar-se que la meitat de l'impost es finança reduint el consum i l'altra meitat reduint l'estalvi.

Un i parell té, de jove, la funció de demanda de consum $c_2^i(2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2R(2)} - \frac{\tau}{2}$. La funció d'estalvi associada és $s^i(2) = 1 - \tau - c_2^i(2) = \frac{1}{2} - \frac{\tau}{2} - \frac{1}{2R(2)}$. Tal com passa amb un i senar, un i parell paga l'impost τ disminuint consum i estalvi en el mateix import: $\frac{\tau}{2}$.

La funció d'estalvi agregat és $S_2 = 50\left(1 - \frac{\tau}{2}\right) + 50\left(\frac{1}{2} - \frac{\tau}{2} - \frac{1}{2R(2)}\right) = 75 - 50\tau - \frac{25}{R(2)}$. Donat $\tau = \frac{1}{8}$, $50\tau = \frac{25}{4}$. En resum, $S_2 = \frac{275}{4} - \frac{25}{R(2)}$. Intepretant que $B(2) = 0$ (que vol dir que el govern no desitja ni necessita manllevar bé en el període 2), la condició d'equilibri en $t = 2$ passa a ser $S_2 = 0$. En conseqüència, $R(2) = \frac{100}{275} = \frac{1}{2{,}75} \approx 0{,}3636$.

• **Equilibri general competitiu en $t = 3$.** En $t = 3$ és com si el govern desaparagués: no hi ha imposts ni mercat de bons. La funció d'estalvi agregat és com la del període 1: $S_3 = 75 - \frac{25}{R(3)}$. Essent ara $S_3 = 0$ la condició d'equilibri, s'obté $R(3) = \frac{1}{3}$. El mateix resultat valdrà per a la resta de períodes, mentre el govern no creï imposts ni emeti bons. Si el període $t = 0$ se suposa igual a $t = 3$, $R(0) = \frac{1}{3}$, $R(1) = \frac{1}{2}$, $R(2) = \frac{1}{2{,}75}$, $R(3) = \frac{1}{3}$. Aquest exemple suggereix que la taxa d'interès pot augmentar per causa d'un increment en el deute públic o una pujada dels imposts.

• **Política de refinançament del deute públic.** Un deute es refinança quan es paga amb més deute. Com a il·lustració d'aquesta política, suposem que el govern decideix no carregar amb imposts als joves de $t = 2$ i paga el deute públic $B(1) = 12{,}5$ generat per l'emissió de bons en $t = 1$ mitjançant l'emissió de més bons en $t = 2$.

• **Equilibri general competitiu en $t = 2$ amb deute refinançat.** En aquest cas, en equilibri, $S_2 = B(2)/R(2)$ i $S_2 = B(1)$. D'aquí, $R(2) = 0{,}4$ i $B(2) = 5$

• **Equilibri general competitiu en $t = 3$ amb deute refinançat.** Si el refinançament s'estén a $t = 3$, $S_3 = B(3)/R(3)$ i $S_3 = B(2)$. Així, $R(3) = 0{,}35$ i $B(3) = 1{,}78$.

• **Dinàmica d'acumulació de bons amb refinançament perpetu.** Si el govern decideix de refinançar sempre el deute, $S_t = B(t)/R(t)$ i $S_t = B(t-1)$, on $S_t = 75 - \frac{25}{R(t)}$ coincideix amb la funció d'estalvi agregat quan no hi ha imposts. D'$S_t = B(t-1)$ se'n deriva $75 - \frac{25}{R(t)} = B(t-1)$. Aïllant $R(t)$, s'arriba a (5).

$$R(t) = \frac{25}{75 - B(t-1)} \tag{5}$$

Combinant $S_t = B(t)/R(t)$ i $S_t = B(t-1)$, s'obté $B(t-1) = B(t)/R(t)$ o $B(t) = B(t-1)R(t)$. Fent servir (5), resulta la condició (6) que descriu la trajectòria d'acumulació del deute públic que es refinança període rere període.

$$B(t) = \frac{25B(t-1)}{75 - B(t-1)} \tag{6}$$

• **Estat estacionari.** Un estat estacionari d'un sistema dinàmic descrit per una equació en diferències (com ara l'equació (6)) és un estat del sistema on la variable representa en l'equació en diferències pren el mateix valor en cada període.

• **Estat estacionari de** (6)**.** Tot estat estacionari de (6) satisfà $B(t-1) = B(t)$. Aquesta condició es compleix en dos casos: (i) $B = 50$ i $R = 1$; i (ii) $B = 0$ i $R = 1/3$ (la taxa d'equilibri sense govern).

• **Dinàmica del deute.** Les fórmules (5) i (6) són vàlides quan el govern manlleva inicialment a tot estirar 50, de manera que $S(1) \leq 50$. Si $S(1) < 50$, $B(t)$ converges a zero i $R(t)$ tendeix a 1/3, tal com mostren la Taula 1 i la Figura 2. Si $S(1) > 50$, manllevar es tornaria eventualment impossible: es generaria una bombolla que faria el preu dels bons seguir una trajectòria insostenible. La Taula 3 i la Figura 4 il·lustren aquesta situació.

t	$S(t)$	$R(t)$	$B(t)$	*canvi % en* $B(t)$
1	49,99	0,9996	49,97001	–
2	49,97001	0,998802	49,91014	–0,11981
3	49,91014	0,996419	49,7314	–0,35814
4	49,7314	0,98937	49,20276	–1,06299
5	49,20276	0,969096	47,68218	–3,09042
6	47,68218	0,915154	43,63652	–8,48464
7	43,63652	0,797105	34,78291	–20,2895
8	34,78291	0,621626	21,62197	–37,8374
9	21,62197	0,468358	10,12681	–53,1642
10	10,12681	0,385367	3,902542	–61,4633
11	3,902542	0,35163	1,372251	–64,837
12	1,372251	0,339546	0,465942	–66,0454
13	0,465942	0,335417	0,156285	–66,4583
14	0,156285	0,334029	0,052204	–66,5971
15	0,052204	0,333566	0,017413	–66,6434

Taula 1. Govern manlleva menys de 50 en $t = 1$

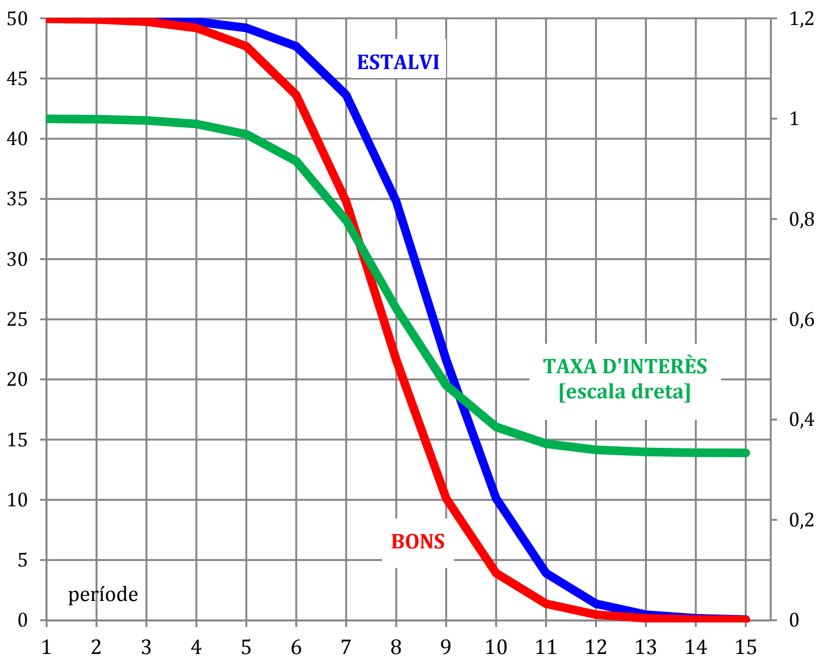

Figura 2. Representació de les dades de la Taula 1

t	$S(t)$	$R(t)$	$B(t)$	*canvi % en* $B(t)$
1	50,00001	1	50,00003	–
2	50,00003	1,000001	50,00009	0,00012
3	50,00009	1,000004	50,00027	0,00036
4	50,00027	1,000011	50,00081	0,00108
5	50,00081	1,000032	50,00243	0,00324
6	50,00243	1,000097	50,00729	0,009721
7	50,00729	1,000292	50,02188	0,029173
8	50,02188	1,000876	50,0657	0,087595
9	50,0657	1,002635	50,19761	0,263477
10	50,19761	1,007967	50,59755	0,796729
11	50,59755	1,024487	51,83654	2,448716
12	51,83654	1,079286	55,94645	7,928594
13	55,94645	1,312091	73,40684	31,20912
14	73,40684	15,69205	1151,904	1469,205
15	1151,904	–0,02321	–26,7411	–102,321

Taula 3. Govern manlleva més de 50 en $t = 1$

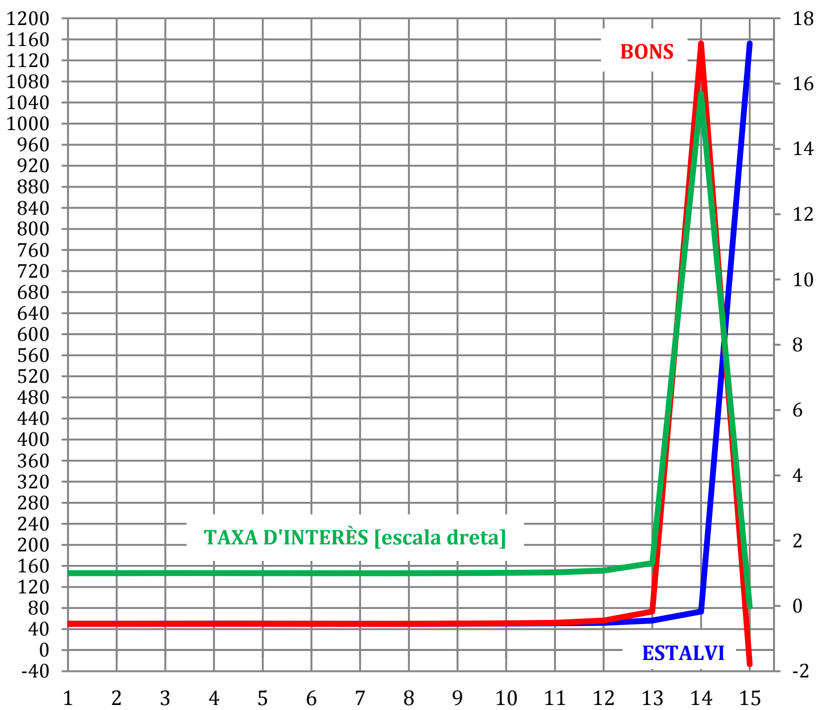

Figura 4. Representació de les dades de la Taula 3

• **Bombolles.** A la Taula 3, en el període $t = 14$ el govern demana més unitats del bé (1151) de les que hi ha disponibles en el període (200). Per a què aquesta demanda fos compatible amb un equilibri caldria que $R < 0$. Però $R < 0$ no pot succeir en equilibri perquè, després de prestar una unitat del bé en t, caldria tornar a pagar en $t + 1$. Una taxa R negativa és com un impost sobre els prestadors, fent que consumir sigui millor que prestar. De fet, si $r(t) > 0$ ($R(t) > 1$), prestant L en t, s'obté més d'L en $t + 1$. Si $-1 \leq r(t) \leq 0$ ($0 \leq R(t) \leq 1$), prestant L en t, s'obté menys d'L en $t + 1$, però s'obté bé. Si $r(t) < -1$ ($R(t) < 0$), prestant L en t, cal pagar en $t + 1$ (es com tornar a prestar). Tornant a la Taula 3, pot interpretar-se que en el període 14 <u>la bombolla del deute esclata</u>.

• **La població o les dotacions han de créixer per a fer sostenible un deute públic creixent.** Per a il·lustrar aquesta tesi, suposem que les dotacions es dupliquen cada període. Aleshores, $S_t = \left(75 - \frac{25}{R(t)}\right) 2^{t-1}$, $R(t) = \frac{25}{75 - \frac{B(t-1)}{2^{t-1}}}$ i $B(t) = \frac{25B(t-1)}{75 - \frac{B(t-1)}{2^{t-1}}}$. Les possibilitats d'endeutament públic s'han incrementat: la Taula 5 mostra que ara el govern pot manllevar inicialment 62 però no 63.

t	$S(t)$	$R(t)$	$B(t)$	$S(t)$	$R(t)$	$B(t)$
1	62	1,92	119,2	63	2,08	131,2
2	119,2	1,62	193,7	131,25	2,66	350
3	193,7	0,94	182,3	350	−2	−700
4	182,3	0,47	87,3	−700	0,15	−107,6
5	87,3	0,35	31,3	−107,6	0,3	−32,9
6	31,3	0,337	10,6	−32,9	0,32	−10,8
7	10,6	0,334	3,5	−10,8	0,33	−3,6

Taula 5. Dinàmica quan el govern manlleva 62 o 63 en $t = 1$ (en groc, una situació impossible)

2.5. Equivalència de bons i imposts

• **Un resultat d'equivalència bons–imposts.** Sigui C una assignació d'equilibri quan el govern emet bons. Llavors existeixen imposts que, sense haver d'emetre bons: (i) equilibren el pressupost del govern (recaptació igual a transferències); i (ii) fan que C continuï essent assignació d'equilibri.

• **Demostració de l'equivalència.** L'equivalència diu que les assignacions de consum d'equilibri que es poden assolir amb bons es poden obtenir fent servir imposts en lloc de bons. Amb bons (i sense imposts), les restriccions pressupostàries d'un consumidor i són (7), de jove, i (8), de gran.

$$c_t^i(t) + l^i(t) + p(t)b^i(t) = w_t^i(t) \tag{7}$$

$$c_t^i(t+1) = R(t)l^i(t) + b^i(t) + w_t^i(t+1) \tag{8}$$

Amb imposts (i sense bons), les restriccions passarien a ser (9) i (10).

$$c_t^i(t) + l^i(t) + \tau_t^i(t) = w_t^i(t) \tag{9}$$

$$c_t^i(t+1) + \tau_t^i(t+1) = R(t)l^i(t) + w_t^i(t+1) \tag{10}$$

Per a què el consumidor i triï el mateix lot de consum $\left(c_t^i(t), c_t^i(t+1)\right)$ en tots dos casos n'hi ha prou en fer equivalents les restriccions: fer (7) igual a (9) i fer (8) igual a (10). Això s'aconsegueix definint $\tau_t^i(t) = p(t)b^i(t)$ (els joves paguen com a impost el que invertirien en bons) i establint $\tau_t^i(t+1) = -b^i(t)$ (els grans reben com a transferència el que aconseguirien com a retribució per la inversió en bons). Per tant, partint de la situació on hi ha bons, la taxa d'interès d'equilibri $\hat{R}(t)$ en t resultaria de solucionar $S_t\left(\hat{R}(t)\right) = B(t)/\hat{R}(t)$. Donada $\hat{R}(t)$ i la compra de bons $b^i(t)$, la mateixa assignació de consum d'equilibri s'obtindria amb imposts (però sense bons) fent $\tau_t^i(t) = p(t)b^i(t) = b^i(t)/\hat{R}(t)$ i $\tau_t^i(t+1) = -b^i(t)$.