4. Un model de generacions encavalcades amb producció endògena

4.1. Elements del model

• **Nous elements.** El model conté els elements del model descrit en el punt 1.1 amb els següents canvis.

(i) Per a tot període t, la quantitat de bé disponible en t pot ser acumulada sense pèrdua un període i ser emprat en el període $t+1$. Els consumidors són els únics que poden acumular el bé.

(ii) La dotació dels consumidors no consisteix en quantitats del bé sinó en quantitats d'un factor de producció que s'anomenarà "factor treball" o, simplement, "treball".

(iii) La quantitat de bé acumulada en el període t esdevé un factor de producció en el període $t+1$, que se s'anomenarà "factor capital" o, abreujant, "capital".

(iv) No hi ha dotació del bé: tota quantitat existent del bé és fruit d'un procés de producció.

(v) Un nou agent, anomenat "empresa", organitza la producció del bé a partir dels dos factors de producció, capital i treball.

(vi) La producció total del bé es representa mitjançant una funció de producció, que estableix la quantitat màxima que es pot obtenir del bé a partir de quantitats donades dels factors de producció capital i treball.

(vii) Les empreses obtenen cada factor de producció en un mercat competitiu del factor. Els consumidors lloguen el seu treball a les empreses a canvi d'un salari (el preu del treball) en el mercat de treball i venen el seu capital a les empreses a canvi d'un preu (el preu del capital).

• **Dotació de treball.** Els consumidors tenen com a dotació treball, no bé. La dotació vital de treball d'un membre i de la generació t és $L_t^i = \left(L_t^i(t), L_t^i(t+1)\right)$, on $L_t^i(t)$ és la quantitat de treball de què i disposa de jove i $L_t^i(t+1)$ la que disposa de gran.

• **Mercat de treball.** Cada període t hi ha un mercat de treball competitiu on els consumidors lloguen el seu treball a canvi d'un salari $\omega(t)$ expressat en unitats del bé per unitat de treball. Els consumidors només es preocupen del seu consum, no del seu lleure. Per això ofereixen inelàsticament tota la seva dotació de treball en els dos períodes de vida. La quantitat total de treball $L(t)$ disponible en el període t és la suma del treball ofert pels joves i pels grans:

$$L(t) = \sum_{i \in N(t)} L_t^i(t) + \sum_{i \in N(t-1)} L_{t-1}^i(t)\,.$$

• **Creació del capital.** Per a tot període t, el bé existent en t pot ser acumulat del període t al $t+1$. El bé acumulat en el període t s'anomena capital en el període $t+1$. En el període inicial, $t=1$, hi ha una dotació inicial $K(1)$.

• **Capital com a forma d'estalvi.** Tot consumidor jove i en t pot estalviar una part $K^i(t+1)$ del seu salari $\omega(t)$. $K^i(t+1)$ és el capital que un consumidor gran nascut en el període t posseeix en el període $t+1$. El capital acumulat en t es designa amb $t+1$ per conveniència, atès que se'n fa ús en $t+1$ del capital acumulat en t.

• **Mercat de capital.** Cada període t hi ha un mercat de capital competitiu on els consumidors venen el seu capital a canvi d'un preu $\sigma(t)$ expressat en unitats del bé per unitat de capital.

• **Depreciació de l'estoc de capital.** L'estalvi agregat $\sum_{i\in N(t)} K^i(t+1)$ en t esdevé l'estoc de capital $K(t+1)$ de l'economia en el període $t+1$. Per a tot període t, tot el capital disponible en t es deprecia (s'empra completament) durant el període t. Això fa que el capital no es pugui tornar a acumular.

• **Funció de producció agregada.** Per a tot període t, les possibilitats de producció de bé en tota l'economia en t es representa mitjançant una funció de producció agregada. Segons aquesta funció, es pot produir bé en el període t fent servir treball del període t i capital del període t (que és bé del període anterior $t-1$). Una funció de producció agregada pren la forma

$$Y(t) = G\big(A(t), K(t), L(t)\big),$$

on $A(t)$ representa l'estat de la tecnologia en t, $L(t)$ és la quantitat total de treball en t i $K(t)$ és l'estoc de capital en t. Per a simplificar s'assumirà que, per a tot període t, $Y(t) = A(t)\cdot F\big(K(t), L(t)\big)$. En particular, la funció de producció agregada típica serà del tipus Cobb-Douglas, això és, amb $0 < \alpha, \beta < 1$,

$$Y(t) = A(t)\cdot K(t)^{\alpha}\cdot L(t)^{\beta}.$$

• **Rendiments d'escala constants.** Una funció de producció agregada F presenta rendiments d'escala constants si, per a tot $\delta > 0$,

$$F\big(\delta\cdot K(t),\ \delta\cdot L(t)\big) = \delta\cdot F\big(K(t), L(t)\big).$$

• **Hipòtesis sobre les productivitats marginals.** La productivitat marginal $\frac{\partial F}{\partial L}$ del factor treball s'assumeix en general positiva però decreixent: $\frac{\partial F}{\partial L} > 0$ i $\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$. Aquestes propietats signifiquen que unitats addicionals de només treball fan augmentar la producció però cada cop menys. La productivitat marginal $\frac{\partial F}{\partial K}$ del factor capital també s'assumeix en general positiva i decreixent: $\frac{\partial F}{\partial K} > 0$ i $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0$. A més, s'assumeix que $\frac{\partial F}{\partial K} \to \infty$ si $K \to 0$, $\frac{\partial F}{\partial K} \to 0$ si $K \to \infty$ i el mateix per a L.

• **Objectiu de les empreses.** Totes les empreses són competitives, disposen de la mateixa tecnologia productiva i tenen com a objectiu la maximització de beneficis. Les hipòtesis de rendiments constants i empreses idèntiques impliquen que les empreses empraran factor capital K i factor treball L en la mateixa proporció. Això significa que totes les empreses poden ser considerades còpies més grans o més petites d'una empresa donada i que una funció de producció agregada amb rendiments d'escala constants pot representar la producció de tota l'economia com si només hi hagués una empresa.

• **Ús de la producció.** Donat l'estat de la tecnologia, la producció total $Y(t)$ en t s'obté del capital total $K(t)$ i del treball total $L(t)$ en t. Una part de la producció es consumeix en t i la resta s'acumula per al període següent en forma de capital. Formalment,

$$\sum_{i\in N(t)} c_t^i(t) + \sum_{i\in N(t-1)} c_{t-1}^i(t) + \sum_{i\in N(t)} K^i(t+1) = A(t)\cdot F\big(K(t),L(t)\big)$$

o

$$C(t) + K(t+1) = A(t)\cdot F\big(K(t),L(t)\big)\,.$$

• **Preu d'un factor i productivitat del factor.** Atès que el mercat de treball és competitiu, es pot assumir que el salari és igual a la productivitat marginal del treball:

$$\omega(t) = \partial F/\partial L(t).$$

Anàlogament, com que el mercat de capital és competitiu, pot assumir-se que el preu del capital coincideix amb la productivitat marginal del capital:

$$\sigma(t) = \partial F/\partial K(t).$$

Quan hi ha rendiments d'escala constants ω i σ depenen de la quantitat relativa de K i L, no de la seva quantitat absoluta.

• **Un exemple.** Sigui $Y(t) = A(t)\cdot K(t)^{\alpha}\cdot L(t)^{1-\alpha}$. Aleshores:

$$\omega(t) = \frac{\partial Y(t)}{\partial L(t)} = (1-\alpha)\cdot A(t)\cdot\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)^{\alpha} \ \text{ i } \ \sigma(t) = \frac{\partial Y(t)}{\partial K(t)} = \alpha\cdot A(t)\cdot\left(\frac{L(t)}{K(t)}\right)^{1-\alpha}.$$

Per la unicitat del preu dels factors de producció, totes les firmes empren K i L en la mateixa proporció: emprar més K comporta llogar més L. Atès que tot el treball disponible es lloga (no hi ha atur), la remuneració total d'assalariats és $\omega(t)\cdot L(t) = (1-\alpha)\cdot A(t)\cdot\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)^{\alpha}\cdot L(t) = (1-\alpha)\cdot Y(t)$. De manera similar, $\sigma(t)\cdot K(t) = \alpha\cdot Y(t)$. Tot plegat vol dir que el pagament total al factor treball és la fracció $1-\alpha$ de la producció, en tant que el pagament total que rep el factor capital és la fracció α. Com a resultat,

$$\omega(t)\cdot L(t) + \sigma(t)\cdot K(t) = Y(t).$$

Per consegüent, la producció generada en l'economia es distribueix per complet entre el factor treball i el factor treball seguint una proporció fixa. Aquest resultat és vàlid per a tota funció de producció agregada amb rendiments d'escala constant. Una implicació d'aquesta regla de distribució del producte és que les empreses no obetenen cap benefici.

4.2. Anàlisi del model

• **Anàlisi dels consumidors.** Cada consumidor jove i pretén maximitzar la seva funció d'utilitat sotmès a les seves restriccions pressupostàries. De jove, la restricció pressupostària d'i és

$$c_t^i(t) + l^i(t) + K^i(t+1) = \omega(t) \cdot L_t^i(t)$$

i de gran és

$$c_t^i(t+1) = R(t) \cdot l^i(t) + \sigma(t+1) \cdot K^i(t+1) + \omega(t+1) \cdot L_t^i(t+1).$$

Combinant les dues restriccions s'obté

$$c_t^i(t) + \frac{c_t^i(t+1)}{R(t)} = \omega(t) \cdot L_t^i(t) + \frac{\omega(t+1) \cdot L_t^i(t+1)}{R(t)} + K^i(t+1) \cdot \left(\frac{\sigma(t+1)}{R(t)} - 1\right).$$

• **Hipòtesi d'arbitratge.** Assumint arbitratge entre els mercats de capital i de préstecs, en equilibri, s'ha de tenir $R(t) = \sigma(t+1)$: la taxa d'interès bruta a pagar en $t+1$ per un préstec obtingut en t és igual al preu que s'obté en $t+1$ per la venda del capital acumulat en t. Una possible justificació és que si $\sigma(t+1) > R(t)$, llavors tothom voldria manllevar tant bé com sigui possible per a acumular-lo en forma de capital; això no pot succeir en equilibri perquè ningú no voldria prestar el bé. D'altra banda, si $\sigma(t+1) < R(t)$, aleshores ningú no voldria tenir capital, de manera que $K(t+1) = 0$. Això faria arbitràriament gran la productivitat marginal del capital, fent $\sigma(t+1)$ també arbitràriment gran, la qual cosa contradiria la premissa $\sigma(t+1) < R(t)$.

• **Reducció del problema de decisió dels consumidors al cas de producció exògena.** La igualtat de la rendibilitat d'invertir en un préstec i d'invertir en capital implica que $K^i(t+1)\left(\frac{\sigma(t+1)}{R(t)} - 1\right) = 0$. Com a conseqüència, el problema de decisió de cada consumidor jove és essencialment igual al problema de decisió amb producció exògena, atès que les restriccions pressupostàries vitals són anàlogues en tots dos casos. En concret, les dotacions $w_t^i(s)$ del cas exogen són ara els ingressos per salari $\omega(s) \cdot L_t^i(s)$. L'única qualificació és que el salari $\omega(t+1)$ corresponent al període $t+1$ és desconegut en el període t (el preu $\sigma(t+1)$ és igualment desconegut en t). Per aquest motiu, per a els dos problemes siguin essencialment iguals, cal postular previsió perfecta: els consumidors anticipen sense error en cada període t els preus dels factors de producció del període $t+1$.

• **Equilibri general.** Un equilibri general competitiu (amb dotació inicial de capital $K(1)$, funció de producció agregada F, dotacions de treball i previsió perfecta) és una seqüència $\{\hat{R}(t),\ \hat{\sigma}(t),\ \hat{\omega}(t),\ \hat{K}(t)\}_{t\geq 1}$ (on $\{\hat{K}(t)\}_{t\geq 1}$ descriu la trajectòria d'acumulació de capital) tal que, per a tot $t \geq 1$:

(i) $S_t\left(\hat{R}(t)\right) = \hat{K}(t+1)$, on S_t és la funció d'estalvi agregada obtinguda de la maximització de la funció d'utilitat de cada jove;

(ii) $\hat{\sigma}(t+1) = \hat{R}(t)$; (iii) $\hat{\sigma}(t) = \partial F / \partial K(t)$; i (iv) $\hat{\omega}(t) = \partial F / \partial L(t)$.

• **Estacionarietat.** Un estat estacionari de l'economia és caracteritzat per la condició $K(t+1) = K(t)$.

4.3. Exemple

• **L'economia**. Sigui $u_t^i = c_t^i(t) \cdot c_t^i(t+1)$ i $Y(t) = A(t) \cdot K(t)^\alpha \cdot L(t)^{1-\alpha}$. Llavors, definint $L_t(s) = \sum_{i \in N(s)} L_t^i(s)$ i $L(t) = L_t(t) + L_{t-1}(t)$,

$$S_t = \frac{\omega(t) \cdot L_t(t)}{2} - \frac{\omega(t+1) \cdot L_t(t+1)}{2 \cdot R(t)}, \quad \omega(t) = (1-\alpha) \cdot A(t) \cdot \left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)^\alpha, \sigma(t) = \alpha \cdot A(t) \cdot \left(\frac{L(t)}{K(t)}\right)^{1-\alpha}.$$

Insertant les tres equacions en la condició d'equilibri $S_t = K(t+1)$ i aïllant $K(t+1)$, s'obté la trajectòria d'acumulació de capital de l'economia.

$$K(t+1) = \left(\frac{\frac{(1-\alpha) \cdot A(t)}{2} \cdot \frac{L_t(t)}{L(t)^\alpha}}{1 + \frac{1-\alpha}{2\alpha} \cdot \frac{L_t(t+1)}{L(t+1)}} \right) \cdot K(t)^\alpha . \tag{1}$$

• **Cas 1: població i tecnologia constants.** Si A, L i L_t es mantenen constants, llavors el terme entre parèntesis a (1) és una constant positiva. Designat aquesta constant per a, l'equació que descriu la dinàmica d'acumulació de capital en equilibriu esdevé

$$K(t+1) = a \cdot K(t)^\alpha.$$

L'estoc de capital $\bar{K}$ d'estat estacionari s'obté fent $K(t+1) = K(t) = \bar{K}$. Així, $\bar{K} = a \cdot \bar{K}^\alpha$ i

$$\bar{K} = a^{1/(1-\alpha)} .$$

La Figura 1 avall representa $\bar{K}$ i l'equació $K(t+1) = a \cdot K(t)^\alpha$. La figura mostra que, amb independència de l'estoc inicial de capital $K(1) > 0$, l'estoc de capital de l'economia convergeix a $\bar{K}$. Un cop determinat el valor d'estat estacionari $\bar{K}$, assumint L i A constant, es pot obtenir la producció $\bar{Y}$ d'estat estacionari: $\bar{Y} = A \cdot \bar{K}^\alpha \cdot L^{1-\alpha}$. Sabent això, tant $\bar{\omega}$ com $\bar{\sigma}$ es poden calcular a continuació. De la condició d'equilibri $S_t = K(t+1)$, se segueix que $\bar{S} = \bar{K}$. Donada aquesta condició, i atès que S_t és en general funció d'$R(t)$, $\bar{R}$ també pot ser esbrinada (en equilibri, $\bar{R} = \bar{\sigma}$).

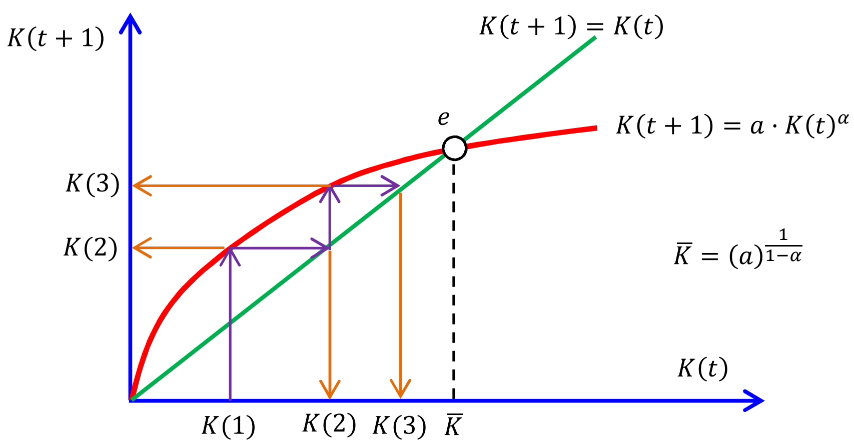

Figura 1. Dinàmica de l'estoc de capital i convergència a l'estat estacionari amb tecnologia i població constants

• **Cas 2: població creixent i tecnologia constant.** Amb la resta de coses com al cas 1, suposem: (i) creixement constant de la població: $N(t+1) = N \cdot N(t)$, per alguna constant $N > 1$; i (ii) totes les generacions tenen la mateixa dotació de treball. Sigui $L_0(0)$ la dotació de treball d'un jove en $t = 0$ i $L_0(1)$ la dotació de treball d'un vell en $t = 1$. Definint $L(0) = L_0(0) + L_0(1)/N$, la dotació total de treball dels joves en t és

$$L_t(t) = N^t \cdot L_0(0)$$

i dels vells en t és

$$L_{t-1}(t) = N^{t-1} \cdot L_0(1).$$

En conclusió, l'oferta agregada de treball en t és

$$L(t) = L_t(t) + L_{t-1}(t) = N^t \cdot L_0(0) + N^{t-1} \cdot L_0(1) = N^t \left(L_0(0) + \tfrac{L_0(1)}{N}\right) = N^t \cdot L(0).$$

La funció d'estalvi de cada jove i en t és

$$s^i(t) = \frac{1}{2}\left(\omega(t) \cdot L_t^i(t) - \frac{\omega(t+1) \cdot L_t^i(t+1)}{R(t)}\right).$$

L'estalvi agregat en t és

$$S_t = N(t) \cdot s^i(t) = N^t \cdot N(0) \cdot s^i(t) = \frac{1}{2}\left(\omega(t) \cdot N^t \cdot L_0(0) - \frac{\omega(t+1) \cdot N^t \cdot L_0(1)}{R(t)}\right).$$

El salari en t és

$$\omega(t) = \frac{\partial F}{\partial L(t)} = (1-\alpha) \cdot A(t) \cdot \left(\frac{K(t)}{N^t \cdot L(0)}\right)^{\alpha}.$$

El preu del capital en $t+1$ (que equival a $R(t)$ en equilibri) és

$$\sigma(t+1) = \frac{\partial F}{\partial K(t+1)} = \alpha \cdot A(t) \cdot \left(\frac{K(t+1)}{N^{t+1} \cdot L(0)}\right)^{\alpha-1}.$$

Fent servir les equacions anteriors i la condició d'equilibri $S_t = K(t+1)$, s'arriba a

$$K(t+1) = \left(\frac{\dfrac{(1-\alpha) \cdot A(0)}{2} \cdot \dfrac{L_0(0)}{L(0)^{\alpha}}}{1 + \dfrac{1-\alpha}{2\alpha} \cdot \dfrac{L_0(1)}{N \cdot L(0)}}\right) \cdot N^{t(1-\alpha)} \cdot K(t)^{\alpha}$$

que és (1) adaptada al cas. Anomenant B el terme entre parèntesis, la conclusió final és

$$K(t+1) = B \cdot N^{t(1-\alpha)} \cdot K(t)^{\alpha}.$$

Donada la fórmula anterior, la taxa bruta de creixement del capital resulta ser

$$G_K(t+1) = \frac{K(t+1)}{K(t)} = \frac{B \cdot N^{t(1-\alpha)} \cdot K(t)^{\alpha}}{B \cdot N^{(t-1)(1-\alpha)} \cdot K(t-1)^{\alpha}} = \frac{1}{N^{\alpha-1}} \cdot G_K(t)^{\alpha} = N^{1-\alpha} \cdot G_K(t)^{\alpha}.$$

Essent G_K el valor límit de la taxa bruta de creixement del capital,

$$G_K = N^{1-\alpha} \cdot {G_K}^{\alpha}\,.$$

Aïllant G_K, es dedueix que ${G_K}^{1-\alpha} = N^{1-\alpha}$. En resum,

$$G_K = N\,.$$

Recapitulant: amb població creixent a una taxa constant, en l'estat estacionari que s'assoleix en equilibri, el capital s'acumula a la mateixa taxa que la població: $K(t+1) = N \cdot K(t)$. Així, la taxa de creixement de l'estoc de capital K i la taxa de creixement de la producció Y eventualment coincideixen amb la taxa de creixement de la població. Un corol·lari del fet que producció i població creixen a la mateixa taxa és que la producció per càpita (un indicador del nivell de vida) es manté constant.

• **Cas 3: població constant amb progrés tecnològic**. Suposem que la tecnologia s'acumula a la taxa bruta $G > 1$, de manera que $A(t+1) = G \cdot A(t)$. Atès que $Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}$, el progrés tecnològic es diu neutral, degut al fet que els canvis en A afecten la productivitat de tant el capital com el treball. Donat $A(t) = G^t \cdot A(0)$ i població constant, la trajectòria d'equilibri (1) del capital esdevé

$$K(t+1) = \left(\frac{\frac{(1-\alpha)\cdot A(0)}{2} \cdot \frac{L_0(0)}{L(0)^{\alpha}}}{1 + \frac{1-\alpha}{2\alpha} \cdot \frac{L_0(1)}{N \cdot L(0)}} \right) \cdot G^t \cdot K(t)^{\alpha}.$$

Dient B el terme entre parèntesis,

$$K(t+1) = B \cdot G^t \cdot K(t)^{\alpha}.$$

La taxa bruta de creixement del capital és

$$G_K(t+1) = \frac{K(t+1)}{K(t)} = \frac{B \cdot G^t \cdot K(t)^{\alpha}}{B \cdot G^{t-1} \cdot K(t-1)^{\alpha}} = G \cdot G_K(t)^{\alpha}.$$

Si G_K és el límit de $G_K(t)$, $G_K = G \cdot {G_K}^{\alpha}$ i

$$G_K = G^{\frac{1}{1-\alpha}}\,.$$

Tenint-se $\frac{1}{1-\alpha} > 1$, es conclou que $G_K > G$: la taxa de creixement de l'estoc de capital (que és igual a la taxa de creixement de la producció) és superior a la taxa a què progressa la tecnologia.

4.4. Un altre exemple

• **Descripció de l'economia**. Cada període hi ha dos grups d'individus, G1 i G2. La funció d'utilitat de cada membre de G1 és $u_1 = c_1 \cdot c_1'$; la de cada membre de G2 és $u_2 = {c_2}^{\beta} \cdot c_2'$. La dotació de treball de cada consumidor de G1 és $(2, 1)$; la de cada consumidor de G2 és $(1, 0)$. En el període inicial, $t = 1$, G2 conté n (parell) membres, mentre G1 no en té cap. A partir d'aleshores, cada període G2 un nou membre jove menys respecte del període anterior i G1 té un membre jove més. Aquesta dinàmica continua fins que els dos grups tenen el mateix nombre de membres, període a partir del qual tots dos grups mantenen constant el nombre de membres. No hi ha mercat de préstecs. La funció de producció agregada és $Y = 2 \cdot K^{1/2} \cdot L^{1/2}$. Per últim, $K(1) = 1$.

• **Preu dels factors**. El salari ω és la productivitat marginal del treball $\frac{\partial Y}{\partial L} = \left(\frac{K}{L}\right)^{1/2}$. El preu del capital σ és la productivitat marginal del capital $\frac{\partial Y}{\partial K} = \left(\frac{L}{K}\right)^{1/2} = \frac{1}{\omega}$. Per tant, $\sigma = \frac{1}{\omega}$. Sigui n_1 el nombre de membres de G1 i n_2 el de G2. Així, $L = n$ quan $t = 1$ i $L = n_2 + 2 \cdot n_1 + n_1 - 1 = 3 \cdot n_1 + n_2 - 1$ quan $t > 1$. A més, per $t \geq \frac{n}{2} + 1$, $n_1 = n_2$; per a tot $1 \leq t < \frac{n}{2} + 1$, $n_1 = t - 1$ i $n_2 = n - n_1$.

• **Decisions dels membres de G2**. La restricció pressupostària de cada jove és $c_2 + k_2{}' = 1 \cdot \omega$, on c_2 és el consum de jove, $k_2{}'$ el capital acumulat per al següent període i ω és el salari. De gran la restricció és $c_2{}' = \sigma' \cdot k_2{}'$, on $c_2{}'$ és el consum de jove i σ' és el preu del capital. Combinant-les s'obté la restricció pressupostària vital $c_2 + \frac{c_2{}'}{\sigma'} = \omega$. El lagrangià és $\mathcal{L}_2 = c_2{}^{\beta} \cdot c_2{}' + \lambda \cdot \left(\omega - c_2 - \frac{c_2{}'}{\sigma'}\right)$. El lot maximitzador $(c_2, c_2{}')$ satisfà $\frac{c_2{}'}{\sigma'} = \frac{c_2}{\beta}$. La funció de consum és $c_2 = \frac{\omega \cdot \beta}{1+\beta}$. La funció d'estalvi és $s_2 = \omega - c_2 = \frac{\omega}{1+\beta} = \left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1+\beta}$.

• **Decisions dels membres de G1**. Les restriccions són $c_1 + k_1{}' = 2 \cdot \omega$ i $c_1{}' = \sigma' \cdot k_1{}' + 1 \cdot \omega'$. La vital, $c_1 + \frac{c_1{}'}{\sigma'} = 2 \cdot \omega + \frac{\omega'}{\sigma'}$. El lagrangià és $\mathcal{L}_1 = c_1 \cdot c_1{}' + \lambda \cdot \left(2 \cdot \omega + \frac{\omega'}{\sigma'} - c_1 - \frac{c_1{}'}{\sigma'}\right)$. El lot maximitzador satisfà $c_1 = \frac{c_1{}'}{\sigma'}$. La funció de consum és $c_1 = \omega + \frac{\omega'}{2 \cdot \sigma'}$. La funció d'estalvi és $s_1 = 2 \cdot \omega - c_1 = \omega - \frac{\omega'}{2 \cdot \sigma'} = \omega - \frac{\omega'^2}{2} = \left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{K'}{L'}$.

• **Equilibri i acumulació**. Sigui n_1 el nombre de membres de G1 i n_2 el de G2. La funció d'estalvi agregat serà $S = n_1 \cdot s_1 + n_2 \cdot s_2 = n_1 \cdot \left(\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{K'}{L'}\right) + n_2 \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1+\beta} = \left(n_1 + \frac{n_2}{1+\beta}\right)\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{n_1}{2} \cdot \frac{K'}{L'}$. En equilibri, $S = K'$. Tot plegat porta a la següent dinàmica d'acumulació de capital:

$$K' = \left(\frac{n_1 \cdot (1+\beta) + n_2}{L^{1/2} \cdot (1+\beta)}\right) \cdot \frac{2 \cdot L'}{n_1 + 2 \cdot L'} \cdot K^{1/2} .$$

La fórmula anterior depèn de t. Quan $t = 1$, $n_1 = 0$, $n_2 = n$, $L = n$, $L' = n + 1$ i $K = 1$; per tant, $K' = n^{1/2}/(1+\beta)$. Quan $t \geq \frac{n}{2} + 1$, $n_1 = n_2 = n/2$, $L = 2n - 1 = L'$ i, en conseqüència,

$$K' = \frac{n \cdot (2+\beta)}{(2 \cdot n - 1)^{1/2} \cdot (1+\beta)} \cdot \frac{4 \cdot n - 2}{5 \cdot n - 4} \cdot K^{1/2}$$

descriu l'eventual trajectòria d'acumulació de capital (això és, per a t suficientment gran). L'estat estacionari (amb estoc de capital positiu) d'aquesta trajectòria correspon a l'estoc de capital

$$\overline{K} = \frac{n^2 \cdot (2+\beta)^2}{(2 \cdot n - 1) \cdot (1+\beta)^2} \cdot \left(\frac{4 \cdot n - 2}{5 \cdot n - 4}\right)^2 .$$