5. Un model de generacions encavalcades de caire malthusià

5.1. Elements del model[1]

• **Capacitat productiva**. El temps es mesura en períodes discrets. Hi ha un únic bé, Y. El bé pot ser produït fent servir dos factors de producció: terra D i treball L. La quantitat de terra és fixa i constant cada període. La funció de producció agregada en el període t és

$$Y(t) = (A \cdot D)^{\alpha} \cdot L(t)^{1-\alpha}$$

on:

- $Y(t)$ és la quantitat de bé produïda en el període t;
- A representa l'estat de la tecnologia (el "nivell" tecnològic);
- D és la quantitat fixa de terra;
- α és un número entre 0 i 1; i
- $L(t)$ és la quantitat de treball emprada en la producció del bé en el període t.

El terme $A \cdot D$ captura els recursos que efectivament s'empren en la producció. Grosso modo, l'estat de la tecnologia sintesitza tots els factors que incideixen sobre la productivitat de la terra: la qualitat del sòl, el clima, els mètodes de conreu, l'aprenentatge de tècniques per a obtenir producte de la terra, etc. La combinació $A \cdot D$ defineix la terra efectivament feta servir en la producció. Per exemple, tenir $A = 2$ vol dir que una unitat de terra fa, en la pràctica, el mateix efecte que disposar-ne de dues (de dues quan $A = 1$, que podria representar el nivell productiu bàsic o mínim de la terra).

• **Agents**. Els agents que aporten treball, i duen a terme la producció, s'anomenen pagesos. La producció $y(t)$ per pagès en el període t és

$$y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)} = \left(\frac{A \cdot D}{L(t)}\right)^{\alpha}.$$

Tots els pagesos són idèntics i viuen dos períodes consecutius. En el segon període de vida

- cada pagès decideix quants fills tenir (les famílies són monoparentals);
- tot pagès esdevé econòmicament actiu i empra tota la seva dotació de treball, amb independència de la renda que n'obtingui;
- la renda d'un pagès en el període t és igual a la producció $y(t)$ per pagès en el període t;
- la renda de cada pagès es destina a consum i a criar fills.

En el seu primer període de vida el pagès és econòmicament inactiu i ha de ser sostingut pel seu progenitor. Es pot considerar que, en el primer període, un pagès és un infant que no pren per si

[1] El model es pren de l'article de Quamrul Ashraf i Oded Galor "Dynamics and stagnation in the Malthusian epoch", *American Economic Review* 101(5), 2011, 2003-2041. El model es descriu i analitza a les pàgines 2005-2009.

mateix cap decisió. Cada pagès està caracteritzat en el seu segon període t de vida per la funció d'utilitat

$$u(t) = c(t)^{\beta} \cdot n(t)^{1-\beta}$$

on $c(t)$ és la quantitat de bé que consumeix el pagès en el període t, $n(t)$ és el nombre de fills que el pagès ha triat tenir i β és un número entre 0 i 1 que captura la preferència relativa del pagès entre consumir i tenir fills. El cost associat amb la tinença i criança de fills és un cost fix de $\gamma > 0$ unitats de bé per fill.

5.2. Anàlisi del model: relació entre producte per càpita i població

Cada pagès del període t tria $c(t)$ i $n(t)$ amb l'objectiu de maximitzar $u(t)$ en presència de la restricció pressupostària

$$c(t) + \gamma \cdot n(t) = y(t).$$

El lagrangià corresponent al problema de

$$\begin{aligned} maximitzar_{c(t),n(t)} \quad & u(t) = c(t)^{\beta} \cdot n(t)^{1-\beta} \\ sotmès\ a \quad & c(t) + \gamma \cdot n(t) = y(t) \end{aligned}$$

és

$$\mathcal{L}(t) = c(t)^{\beta} \cdot n(t)^{1-\beta} + \lambda \cdot \big(y(t) - c(t) - \gamma \cdot n(t)\big)\,.$$

Aleshores:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(t)}{\partial c(t)} = \beta \cdot c(t)^{\beta-1} \cdot n(t)^{1-\beta} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(t)}{\partial n(t)} = (1-\beta) \cdot n(t)^{-\beta} \cdot c(t)^{\beta} - \lambda \cdot \gamma = 0\,.$$

Per la primera equació,

$$\lambda = \beta \cdot c(t)^{\beta-1} \cdot n(t)^{1-\beta}.$$

Per la segona,

$$\lambda = \frac{1-\beta}{\gamma} \cdot c(t)^{\beta} \cdot n(t)^{-\beta}.$$

Com a resultat,

$$\beta \cdot c(t)^{\beta} \cdot \frac{1}{c(t)} \cdot n(t)^{-\beta} \cdot n(t) = \frac{1-\beta}{\gamma} \cdot c(t)^{\beta} \cdot n(t)^{-\beta}$$

i, en definitiva,

$$n(t) = \frac{1-\beta}{\beta \cdot \gamma} \cdot c(t)\,.$$

Insertant l'anterior en la restricció pressupostària $c(t) + \gamma \cdot n(t) = y(t)$ fa que

$$\boxed{c(t) = \beta \cdot y(t)\,.}$$

Per tant,

$$\boxed{n(t) = \frac{1-\beta}{\gamma} \cdot y(t)\,.}$$

Atès que $1-\beta > 0$, un increment de la producció per pagès causa un augment del nombre de fills: $\frac{dn(t)}{dy(t)} = \frac{1-\beta}{\gamma} > 0$. El model reprodueix la característica relació positiva entre producció per càpita i creixement de la població que postula la visió malthusiana.

5.3. Anàlisi del model: dinàmica demogràfica i estat estacionari

Per a tot període t, $L(t)$ designa el nombre de pagesos en t en el seu segon període de vida (la força laboral). D'acord amb això,

$$L(t+1) = n(t) \cdot L(t)$$

que expressa el fet que el nombre de pagesos actius en $t+1$ correspon al nombre de fills que els pagesos actius en t van decidir tenir. Combining les equacions $L(t+1) = n(t) \cdot L(t)$, $n(t) = \frac{1-\beta}{\gamma} \cdot y(t)$ i $y(t) = \left(\frac{A \cdot D}{L(t)}\right)^{\alpha}$, s'obté

$$L(t+1) = \frac{1-\beta}{\gamma} \cdot \left(\frac{A \cdot D}{L(t)}\right)^{\alpha} \cdot L(t)$$

Això és,

$$L(t+1) = \frac{1-\beta}{\gamma} \cdot (A \cdot D)^{\alpha} \cdot L(t)^{1-\alpha}$$

o, definint $a = \frac{1-\beta}{\gamma} \cdot (A \cdot D)^{\alpha}$,

$$\boxed{L(t+1) = a \cdot L(t)^{1-\alpha}\,.} \qquad (1)$$

Atès que $a > 0$ i $0 < 1-\alpha < 1$,

$$\frac{dL(t+1)}{dL(t)} = a \cdot (1-\alpha) \cdot L(t)^{-\alpha} = \frac{a \cdot (1-\alpha)}{L(t)^{\alpha}} > 0$$

i

$$\frac{d^2L(t+1)}{dL(t)^2} = -a \cdot (1-\alpha) \cdot \alpha \cdot L(t)^{-\alpha-1} < 0\,.$$

Aquestes derivades indiquen que la funció (1) que traça la dinàmica de la població de pagesos actius és: (i) creixent; (ii) estrictament còncava; (iii) arrenca de l'origen, ja que $L(t) = 0$ implica $L(t+1) = 0$); i (iv) té una derivada $\frac{dL(t+1)}{dL(t)}$ decreixent, que s'aproxima a zero a mesura que $L(t)$ creix i que se'n va cap a l'infinit quan $L(t)$ s'apropa a zero.

La Figura 1 representa gràficament (1). Un tret destacable és que, obviant l'origen, la corba que representa (1) intersecta la diagonal principal (és a dir, els parells $\big(L(t+1), L(t)\big)$ tals que $L(t+1) = L(t)$) només un cop: al punt e. En aquest punt, que es correspon amb el valor L^*, s'assoleix un estat estacionari, donat que $L(t) = L^*$ implica $L(t+1) = L^* = L(t)$.

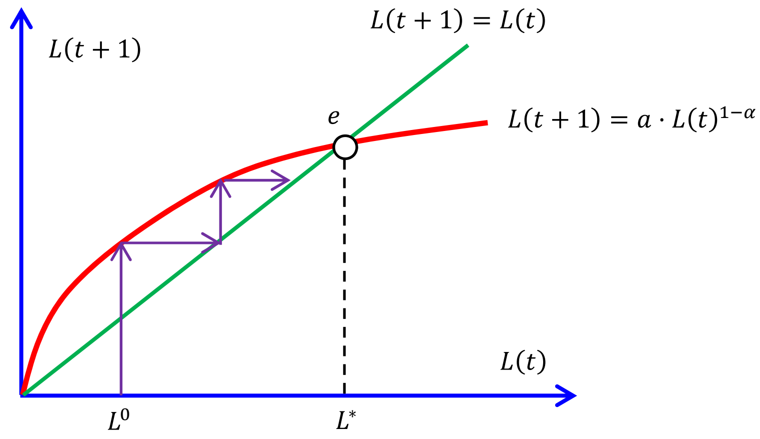

Figura 1. Població: dinàmica i estat estacionari

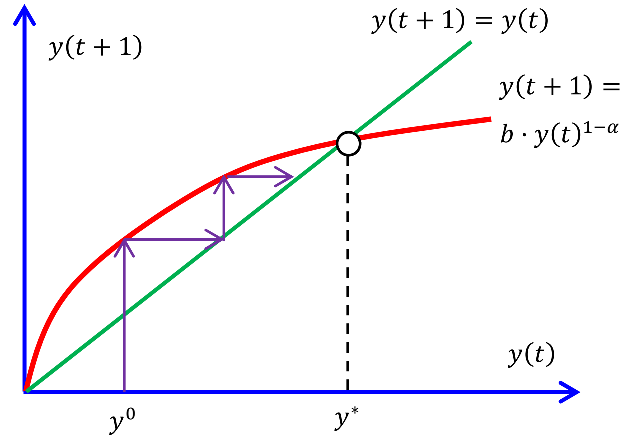

Figura 2. Producció per càpita

L'estat estacionari representat per e a la Figura 1 s'obté d'(1) i la condició $L(t+1) = L(t)$. El valor L^* que satisfà les dues equacions és $L^* = a \cdot {L^*}^{1-\alpha}$; en concret, el valor estacionari de la població és $L^* = a^{1/\alpha}$. En suma,

$$\boxed{L^* = A \cdot D \cdot \left(\frac{1-\beta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.} \tag{2}$$

L'estat estacionari del procés dinàmic (1) és estable en el sentit que, partint d'un volum de població positiu però diferent d'L^*, la dinàmica d'(1) fa convergir el volum a L^*. Aquesta idea s'il·lustra a la Figura 1 assumint que el valor inicial és $L^0 < L^*$: la seqüència de valors que genera (1) partint d'L^0 convergeix cap a L^*. El mateix resultat s'obtindria partint d'$L^0 > L^*$. Definint la densitat de població (o, més acuradament, la densitat de pagesos actius) en el període t com $F(t) = L(t)/D$, la densitat estacionària resulta ser $F^* = L^*/D$ o

$$\boxed{F^* = A \cdot \left(\frac{1-\beta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.}$$

D'altra banda, recordant que $y(t) = \left(\frac{A \cdot D}{L(t)}\right)^{\alpha}$ i $L(t+1) = n(t) \cdot L(t)$,

$$y(t+1) = \left(\frac{A \cdot D}{L(t+1)}\right)^{\alpha} = \left(\frac{A \cdot D}{n(t) \cdot L(t)}\right)^{\alpha} = \frac{1}{n(t)^{\alpha}} \cdot \left(\frac{A \cdot D}{L(t)}\right)^{\alpha} = \frac{y(t)}{n(t)^{\alpha}}.$$

Com que $n(t) = \frac{1-\beta}{\gamma} \cdot y(t)$, la dinàmica de la producció per càpita és descrita per l'equació en diferències $y(t+1) = \left(\frac{\gamma}{1-\beta}\right)^{\alpha} \cdot y(t)^{1-\alpha}$. Fent $b = \left(\frac{\gamma}{1-\beta}\right)^{\alpha} > 0$, una expressió més compacta és

$$\boxed{y(t+1) = b \cdot y(t)^{1-\alpha}.} \tag{3}$$

L'equació (3) és anàloga a l'equació (1) que descrivia la dinàmica de la població pagesa. La Figura 2 mostra una representació gràfica de (3) i el corresponent valor d'estat estacionari y^* (diferent de zero) de la producció per càpita (y^* es correspondria amb el valor L^* de la Figura 1).