8. Un model d'agents representatius: el model neoclàssic de creixement

8.1. Descripció

El temps és discret. Hi ha un únic bé cada període, que pot acumular-se en forma de capital. Definint les variables en termes per càpita, en cada període t, la producció en t és igual al consum en t més la inversió en t, tal com expressa (1).

$$y_t = c_t + i_t \tag{1}$$

La producció només es pot consumir o estalviar: $y_t = c_t + s_t$. Aquesta condició i (1) impliquen $i_t = s_t$.

En cada període una fracció $0 < \delta < 1$ del capital es deprecia. Segons estableix (2), el capital en $t+1$ és la inversió en t més el capital romanent del període anterior t.

$$k_{t+1} = i_t + (1-\delta) \cdot k_t \tag{2}$$

La funció de producció f en (3) assumeix que la producció per càpita depèn del capital per càpita.

$$y_t = f(k_t) \tag{3}$$

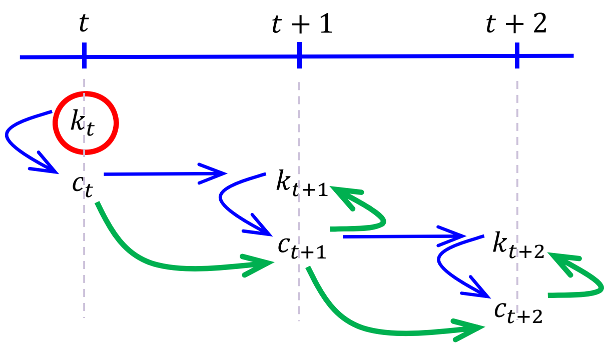
La funció de producció f satisfà les propietats habituals: $f \geq 0$, $f' > 0$, $f'' < 0$, $\lim_{k_t \to 0} f'(k_t) = \infty$, i $\lim_{k_t \to \infty} f'(k_t) = 0$. Combinant (1), (2) i (3),

$$f(k_t) = c_t + k_{t+1} - (1-\delta) \cdot k_t \tag{4}$$

o, definint $\Delta k_{t+1} = k_{t+1} - k_t$,

$$f(k_t) = c_t + \Delta k_{t+1} + \delta \cdot k_t. \tag{5}$$

L'equació (5) estableix la restricció dinàmica a què s'enfronta l'economia. La restricció es pot interpretar de dues maneres, representades en la gràfica a continuació. Segons la interpretació 1, donat k_t, es determinen c_t i k_{t+1}; donat k_{t+1}, es determinen c_{t+1} i k_{t+2}… Segons la interpretació 2, donat k_t, es decideix sobre c_t, c_{t+1}, c_{t+2}…



Hi ha un agent representatiu. Assumint que la i la població és constant, les variables es poden considerar variables per càpita. L'agent representatiu s'entén que decideix les variables per càpita que l'afecten: consum per càpita i capital per càpita. També s'entén que l'agent rep com a renda la producció per càpita que s'obté amb (3) i el capital per càpita de què disposa l'agent.

8.2. Anàlisi

Si l'objectiu de l'agent fos maximitzar el consum cada període (sense descompte), la solució es podria obtenir analitzant primer l'estat estacionari (el llarg ter mini de l'economia). Siguin c and k els valors estacionaris. Se segueix de (5) que $f(k) = c + \delta \cdot k$; això és,

$$c = f(k) - \delta \cdot k.$$

Aquesta condició es correspon amb la idea que el consum d'estat estacionari és la producció que roman un cop s'ha separat la producció necessària per a reemplaçar el capital depreciat i de manera que el capital es mantingui constant.

La condició de primer ordre per a maximitzar c és $\frac{\partial c}{\partial k} = 0$; per tant, $f'(k) = \delta$. Atès que $f'' < 0$, la condició de segon ordre $\left(\frac{\partial^2 c}{\partial k^2} < 0\right)$ se satisfà.

L'equació $f'(k) = \delta$ diu que el producte marginal del capital coincideix amb la taxa de depreciació. Aquesta solució es coneix amb el nom de "regla d'or" (*golden rule*). Si $f'(k) < \delta$, aleshores es pot incrementar c augmentant k. Si $f'(k) > \delta$, c pot incrementar-se reduint k.

Pertorbacions i la regla d'or

Sigui (c_G, k_G) la solució de la regla d'or. Imaginem que el capital es reduís exògenament a $k < k_G$ però que l'agent tractés de mantenir el consum c_G.

En aquest cas, $c_G = f(k_G) - \delta \cdot k_G$ i $c = f(k) - \delta \cdot k - \Delta k$. Si $c_G = c$, llavors $f(k_G) - \delta \cdot k_G = f(k) - \delta \cdot k - \Delta k$. Aïllant Δk,

$$\Delta k = (f(k) - \delta \cdot k) - (f(k_G) - \delta \cdot k_G).$$

Com que (c_G, k_G) és la solució de la regla d'or, $f(k_G) - \delta \cdot k_G > f(k) - \delta \cdot k$. En resum, $\Delta k < 0$.

Aquesta anàlisi vol dir que, amb menys capital que el capital k_G de la regla d'or, la producció futura serà inferior a la de la regla d'or. L'intent de mantenir c_G contribueix a reduir més l'estoc de capital, la qual cosa fa que assolir el nivell de consum c_G sigui eventualment insostenible. La lliçó és que un consum "excessiu" tard o d'hora exhaureix l'estoc de capital, provocant que l'economia sigui incapaç de sostenir aquell consum.

La resposta a una pertorbació negativa sobre k consisteix a renunciar temporalment a part del consum per a refer el nivell perdut d'estoc de capital. Un cop recuperat el nivell k_G, el consum c podrà ser incrementar per a tornar a assolir el nivell c_G de la regla d'or.

Si el consum en diferents períodes es valora de manera diferent, l'agent pot triar maximitzar el valor present de la seqüència infinita de consum $(c_0, c_1, c_2, \dots)$ o, donada una funció u d'utilitat comuna per a tot període t, maximitzar el valor present de la seqüència $(u(c_0), u(c_1), u(c_2), \dots)$. Aquesta darrera consistiria a

$$maximitzar_{\{c_t,\, k_{t+1}\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$
$$sotmès\ a \quad c_t + k_{t+1} = f(k_t) + (1-\delta) \cdot k_t$$

Les hipòtesis familiars sobre u s'assumeixen: $u \geq 0$, $u' > 0$ i $u'' < 0$. El paràmetre $\beta \in (0,1)$ representa el factor de descompte de l'agent. Emprant el mètode dels multiplicadors de Lagrange multipliers, el lagrangià és

$$\mathcal{L}_t = \sum_{t=0}^{\infty} [\beta^t \cdot u(c_t) + \lambda_t (f(k_t) + (1-\delta) \cdot k_t - c_t - k_{t+1})]$$

que es maximitza respecte de c_t, k_{t+1} i λ_t ($\mathcal{L}_t$ no es maximitza respecte de k_t perquè k_t es coneix en el període t).

Condicions de primer ordre (CPO)

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial c_t} = \beta^t \cdot u'(c_t) - \lambda_t$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial k_{t+1}} = \lambda_{t+1}(f'(k_{t+1}) + 1 - \delta) - \lambda_t$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial \lambda_t} = f(k_t) + (1-\delta) \cdot k_t - c_t - k_{t+1}$$

Condició de transversalitat (CT)

$$lim_{t \to \infty}\ \beta^t \cdot u'(c_t) \cdot k_{t+1} = 0$$

Interpretació de la condició de transversalitat

Suposem que t fos el darrer període. Si $k_{t+1} > 0$ (s'acumula capital en el darrer període), llavors $u'(c_t) = 0$: consumir aquest capital no hauria d'afectar la utilitat. Si $u'(c_t) > 0$, aleshores no es podria acumular capital per a un hipòtetic següent període, atès que la utilitat augmentaria consumint aquest capital ara; per aquest motiu, cal que $k_{t+1} = 0$ quan $u'(c_t) > 0$.

De la primera CPO, $\lambda_t = \beta^t \cdot u'(c_t)$ i $\lambda_{t+1} = \beta^{t+1} \cdot u'(c_{t+1})$. Substituint λ_t i λ_{t-1} a la segona CPO,

$$\beta^{t+1} \cdot u'(c_{t+1}) \cdot [f'(k_{t+1}) + 1 - \delta] = \beta^t \cdot u'(c_t)$$

D'aquí resulta (6), que s'anomena equació d'Euler.

$$\beta \cdot u'(c_{t+1}) \cdot [f'(k_{t+1}) + 1 - \delta] = u'(c_t) \tag{6}$$

Interpretació de l'equació d'Euler

Quant consum c_{t+1} addicional pot obtenir-se reduint c_t quan la utilitat (i tot més enllà del període $t+1$) és manté constant? Donat que els períodes posteriors al $t+1$ no es veuen afectats, es pot restringir l'anàlisi a $u(c_t)+\beta\cdot u(c_{t+1})$, que ha de romandre constant. Prenent la diferencial total,

$$0 = du(c_t) + d[\beta\cdot u(c_{t+1})] = du(c_t) + \beta\cdot du(c_{t+1}) = u'(c_t)\cdot dc_t + \beta\cdot u'(c_{t+1})\cdot dc_{t+1}$$

o

$$-\frac{dc_{t+1}}{dc_t} = \frac{u'(c_t)}{\beta\cdot u'(c_{t+1})}\,. \tag{7}$$

L'equació (7) és la relació marginal de substitució: a quant consum d'un període cal renunciar per a incrementar el consum de l'altre període però mantenint la utilitat constant. Com que les restriccions de factibilitat en t i $t+1$ s'han de respectar,

$$dc_t + dk_{t+1} = df(k_t) + (1-\delta)\cdot dk_t$$
$$dc_{t+1} + dk_{t+2} = df(k_{t+1}) + (1-\delta)\cdot dk_{t+1}.$$

Equivalentment,

$$dc_t + dk_{t+1} = f'(k_t)\cdot dk_t + (1-\delta)\cdot dk_t \tag{8}$$
$$dc_{t+1} + dk_{t+2} = f'(k_{t+1})\cdot dk_{t+1} + (1-\delta)\cdot dk_{t+1} \tag{9}$$

Atès que k_t està donat en t, $dk_t = 0$. Així (8) esdevé $dk_{t+1} = -dc_t$: el capital addicional en $t+1$ prové de la retallada de consum en t. Per hipòtesi, $dk_{t+2} = 0$. Com que $dk_{t+1} = -dc_t$, (9) equival a

$$dc_{t+1} = -f'(k_{t+1})\cdot dc_t - (1-\delta)\cdot dc_t$$

o

$$-\frac{dc_{t+1}}{dc_t} = f'(k_{t+1}) + (1-\delta). \tag{10}$$

De (10) i (7) se segueix l'equació d'Euler. Una interpretació és la següent. La producció dc_t no consumida en t causa una pèrdua d'utilitat en t igual a $|u'(c_t)\cdot dc_t|$. Aquesta producció s'inverteix en $t+1$, en forma de dk_{t+1}, per a augmentar la producció en $t+1$. La producció extra $|f'(k_{t+1})\cdot dc_t|$ i la part no depreciada $(1-\delta)\cdot dk_{t+1} = |(1-\delta)\cdot dc_t|$ del capital addicional es consumeix en $t+1$. Com a resultat,

$$dc_{t+1} = [f'(k_{t+1}) + (1-\delta)]\cdot |dc_t|.$$

La utilitat descomptada de dc_{t+1} és

$$\beta\cdot u'(c_{t+1})\cdot dc_{t+1} = \beta\cdot u'(c_{t+1})\cdot [f'(k_{t+1}) + (1-\delta)]\cdot |dc_t|.$$

Però per tal de mantenir la utilitat constant, la utilitat $\beta\cdot u'(c_{t+1})\cdot dc_{t+1}$ guanyada en $t+1$ ha de ser igual a la utilitat $u'(c_t)\cdot |dc_t|$ perduda en t. En conseqüència,

$$u'(c_t)\cdot |dc_t| = \beta\cdot u'(c_{t+1})\cdot [f'(k_{t+1}) + (1-\delta)]\cdot |dc_t|$$

que és l'equació d'Euler un cop es cancel·la el terme comú $|dc_t|$.

La solució d'estat estacionari es pot trobar de la següent manera. Per als valors d'estat estacionari c i k, l'equació d'Euler esdevé

$$\beta \cdot u'(c) \cdot [f'(k) + 1 - \delta] = u'(c)$$

de manera que

$$f'(k) = \delta + \frac{1}{\beta} - 1\,.$$

La solució de la relga d'or és $f'(k_G) = \delta$. Donat $\frac{1}{\beta} - 1 > 0$, resulta $f'(k) > f'(k_G)$. A més, la hipòtesi $f'' < 0$ implica $k < k_G$. Hi ha menys capital que en el cas de la regla d'or perquè la utilitat futura és descompta a la taxa $\frac{1}{\beta} - 1$. D'altra banda, $k < k_G$ comporta $c < c_G$: descomptar utilitat redueix el consum.

L'anàlisi dinàmica es fonamenta en dues equacions, l'equació d'Euler (6) i la restricció de factibilitat (5).

$$\beta \cdot \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \cdot [f'(k_{t+1}) + 1 - \delta] = 1$$

$$\Delta k_{t+1} = f(k_t) - c_t - \delta \cdot k_t \tag{11}$$

Es pot obtenir una aproximació lineal de l'equació d'Euler considerant la sèrie de Taylor d'$u'(c_{t+1})$ al voltant de c_t:

$$u'(c_{t+1}) \approx u'(c_t) + \Delta c_{t+1} \cdot u''(c_t)$$

o

$$\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \approx 1 + \Delta c_{t+1} \cdot \frac{u''(c_t)}{u'(c_t)}\,.$$

Introduint les aproximacions en l'equacioó d'Euler condueix a (12), on $\frac{u''}{u'} < 0$.

$$\Delta c_{t+1} = \frac{u''(c_t)}{u'(c_t)} \left(\frac{1}{\beta \cdot [f'(k_{t+1}) + 1 - \delta]} - 1 \right) \tag{12}$$

Les equacions (11) i (12) estableixen els canvis en l'estoc de capital i en el consum.

Designem per c i k els valors estacionaris, és a dir, les solucions d'(11) i (12) quan $\Delta k_{t+1} = \Delta c_{t+1} = 0$. Si $k_{t+1} < k$, aleshores $f'(k_{t+1}) > f'(k)$. Per tant,

$$\beta \cdot [f'(k_{t+1}) + 1 - \delta] > \beta \cdot [f'(k) + 1 - \delta]\,.$$

Tal com s'ha mostrat més amunt, $f'(k) = \delta + \frac{1}{\beta} - 1$. D'aquí, $\beta \cdot [f'(k) + 1 - \delta] = 1$. Per consegüent, $\beta \cdot [f'(k_{t+1}) + 1 - \delta] > 1$ i, en (9), $\frac{1}{\beta \cdot [f'(k_{t+1}) + 1 - \delta]} < 1$. Com $\frac{u''}{u'} < 0$, la conclusió final és que

$$k_{t+1} < k \Rightarrow \Delta c_{t+1} > 0\,.$$

Un raonament similar prova que

$$k_{t+1} > k \Rightarrow \Delta c_{t+1} < 0$$

$$k_{t+1} = k \Rightarrow \Delta c_{t+1} < 0.$$

La Figura 1 representa la dinàmica del consum: quan l'estoc de capital és inferior al valor estacionari k, el consum creix; quan l'estoc és superior a k, el consum minva.

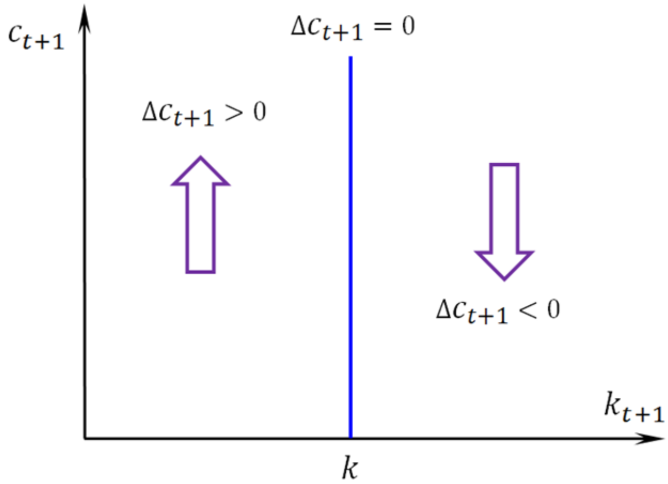


Figura 1. Dinàmica del consum

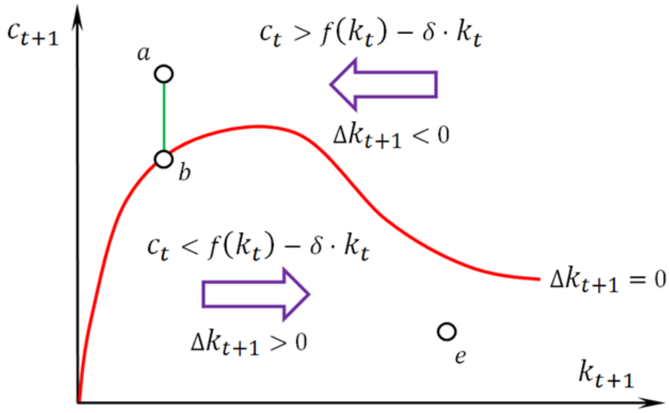


Figura 2. Dinàmica del capital

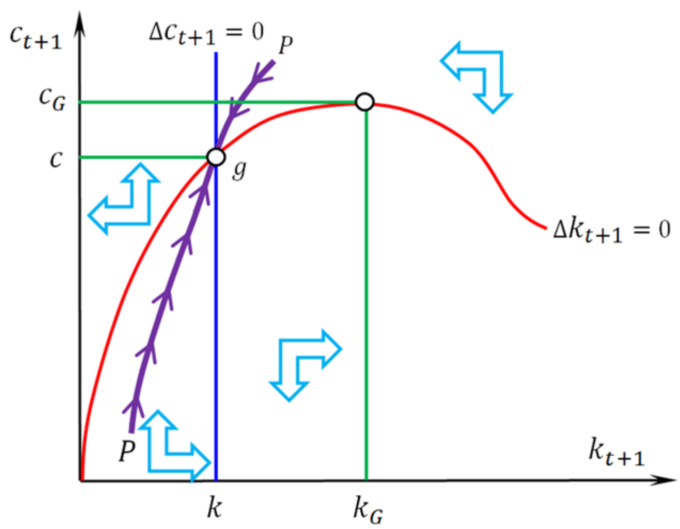
La Figura 2 mostra la dinàmica del capital dictada per (11). És clar que

$$\Delta k_{t+1} > 0 \quad \Leftrightarrow f(k_t) - \delta \cdot k_t > -c_t \, .$$

Per damunt de la corba $\Delta k_{t+1} = 0$ el consum és més gran que el consum estacionari, raó per la qual el capital s'ha desacumular. En el punt a, el consum excedeix el valor (donat per b) compatible amb l'estat estacionari (quan $\Delta k_{t+1} = 0$). El capital s'ha de reduir per a compensar l'excés de consum.

Per sota de la corba $\Delta k_{t+1} = 0$ el nivell de consum possibilita l'acumulació de capital.

La Figura 3 combina les Figures 1 i 2. La solució d'estat estacionari es correspon amb la intersecció g de les corbes $\Delta k_{t+1} = 0$ i $\Delta c_{t+1} = 0$. Les fletxes indiquen la dinàmica de k_{t+1} i c_{t+1}.



La corba PP (la trajectòria estable) identifica els únics estats que són assolibles (PP pot modificar-se quan s'altera algun dels paràmetres del model).

Si l'economia es troba for a de la trajectòria PP, les dinàmiques de consum i capital dicten que que l'estat estacionari no s'assolirà.

Figura 3. El diagrama de fase del model