Respostes a la pregunta 19 del parcial de 28 de novembre de 2016

Enunciat

• **Despesa pública i producció.** Només hi ha un bé, que es pot acumular. Cada generació està formada per n membres. Cada individu viu dos períodes consecutius i té, com a dotació, una unitat de **treball** de jove i cap de gran. La funció d'utilitat de cada individu jove en el període t és $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^{\beta}$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove, c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran i $\beta > 0$ és una constant. La funció de producció és $Y_t = (\tau \cdot n) \cdot {K_t}^{\alpha} \cdot {L_t}^{1-\alpha}$, on K_t és l'estoc total de capital que acumulen els joves del període $t-1$, L_t és la quantitat total de treball de l'economia en t, τ és un impost que paga cada jove de cada període i α és una constant entre 0 i 1. El salari és la productivitat marginal del treball segons la funció de producció. El preu del capital és la productivitat marginal del treball segons la funció de producció.

(i) Determina quant capital acumula cada individu de jove, la trajectòria d'acumulació de l'estoc total de capital i els valors positius de l'estoc total de capital en tots els estats estacionaris.

(ii) Respon a (i) si $\tau = 0$ (no es paguen imposts **i $\boldsymbol{Y_t = {K_t}^{\alpha} \cdot {L_t}^{1-\alpha}}$**).

(iii) Respon a (i) si $\tau \cdot n$, en comptes de ser la recaptació d'un impost, s'obté amb una emissió de bons **d**el govern cada període (i venciment al període següent) i el pagament dels bons al venciment es fa mitjançant el refinançament del deute amb més bons.

(iv) Respon a (i) si $\tau = 0$ (no es paguen imposts) i la funció de producció és una d'elasticitat de substitució constant (CES): $Y_t = (\alpha \cdot {K_t}^{\gamma} + (1-\alpha) \cdot {L_t}^{\gamma})^{1/\gamma}$.

Resposta a (i)

En el seu primer període de vida, cada individu s'enfronta a la restricció pressupostària

$$c + k' + \tau = 1 \cdot \omega$$

on k' és el capital que l'individu acumula per al període següent, τ és l'impost i ω és el salari del primer període. Aïllant c,

$$c = \omega - k' - \tau. \tag{1}$$

En el segon període, la restricció és

$$c' = \sigma' \cdot k' \tag{2}$$

on σ' és el preu del capital del segon període. L'objectiu és maximitzar $u = c \cdot (c')^{\beta}$ sotmès a (1) i (2). Introduint (1) i (2) dins la funció d'utilitat resulta

$$u = (\omega - k' - \tau) \cdot (\sigma' \cdot k')^{\beta}.$$

El problema es redueix a maximitzar u respecte de k'. La condició necessària és $\partial u / \partial k' = 0$; això és,

$$\frac{\partial u}{\partial k'} = (-1) \cdot (\sigma' \cdot k')^{\beta} + (\omega - k' - \tau) \cdot (\sigma')^{\beta} \cdot \beta \cdot (k')^{\beta-1} = 0.$$

Així,

$$(\sigma' \cdot k')^{\beta} = (\omega - k' - \tau) \cdot \beta \cdot (\sigma' \cdot k')^{\beta} \cdot (k')^{-1}$$

o

$$k' = (\omega - k' - \tau) \cdot \beta.$$

Aïllant k' s'obté

$$\boxed{k' = \frac{\beta}{1+\beta} \cdot (\omega - \tau)} \tag{3}$$

que indica <u>quant capital acumula cada individu de jove</u>.

Per la hipòtesi que la productivitat marginal del treball determina el salari ω

$$\omega = \frac{\partial Y}{\partial L} = (\tau \cdot n) \cdot K^{\alpha} \cdot (1-\alpha) \cdot L^{-\alpha} = (\tau \cdot n) \cdot (1-\alpha) \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} = (\tau \cdot n) \cdot (1-\alpha) \cdot \left(\frac{n \cdot k}{n \cdot 1}\right)^{\alpha}.$$

Resumint,

$$\omega = (\tau \cdot n) \cdot (1-\alpha) \cdot k^{\alpha}. \tag{4}$$

Introduint (4) en (3) dóna lloc a l'expressió que descriu la <u>trajectòria d'acumulació de capital</u> d'un individu jove:

$$k' = \frac{\beta \cdot \tau}{1+\beta} \cdot [n \cdot (1-\alpha) \cdot k^{\alpha} - 1].$$

La trajectòria d'acumulació de l'estoc total de capital seria

$$K' = n \cdot k' = n \cdot \frac{\beta \cdot \tau}{1+\beta} \cdot [n \cdot (1-\alpha) \cdot k^{\alpha} - 1] = \frac{n \cdot \beta \cdot \tau}{1+\beta} \cdot [(1-\alpha) \cdot n^{1-\alpha} \cdot n^{\alpha} \cdot k^{\alpha} - 1] =$$
$$\frac{n \cdot \beta \cdot \tau}{1+\beta} \cdot [(1-\alpha) \cdot n^{1-\alpha} \cdot (n \cdot k)^{\alpha} - 1] = \frac{n \cdot \beta \cdot \tau}{1+\beta} \cdot [(1-\alpha) \cdot n^{1-\alpha} \cdot K^{\alpha} - 1].$$

Equivalentment,

$$\boxed{K' = \frac{n^{2-\alpha} \cdot \tau \cdot (1-\alpha) \cdot \beta}{1+\beta} \cdot K^{\alpha} - \frac{n \cdot \tau \cdot \beta}{1+\beta}} \tag{5}$$

Atès que $0 < \alpha < 1$, la funció és creixent i còncava, però no arrenca de l'origen: el valor de K que fa $K' = 0$ és

$$K = \left(\frac{1}{(1-\alpha) \cdot n^{1-\alpha}}\right)^{1/\alpha} > 0.$$

Una implicació de l'anterior és que $K = 0$ no és un valor d'estat estacionari. Els valors $\overline{K}$ d'<u>estat estacionari</u> satisfan

$$\overline{K} = \frac{n^{2-\alpha} \cdot \tau \cdot (1-\alpha) \cdot \beta}{1+\beta} \cdot \overline{K}^{\alpha} - \frac{n \cdot \tau \cdot \beta}{1+\beta};$$

això és,

$$\frac{1+\beta}{n \cdot \tau \cdot \beta} \cdot \overline{K} \;\; + \;\; 1 = (1-\alpha) \cdot n^{1-\alpha} \cdot \overline{K}^{\alpha}.$$

Definint $A = \frac{n^{2-\alpha} \cdot \tau \cdot (1-\alpha) \cdot \beta}{1+\beta}$ i $B = \frac{n \cdot \tau \cdot \beta}{1+\beta}$, (5) pot reescriure's com (6).

$$\boxed{K' = A \cdot K^{\alpha} - B.} \tag{6}$$

Per tant, tot valor $\bar{K}$ d'estat estacionari satisfà $\bar{K}+B=A\cdot\bar{K}^{\alpha}$.

La Figura 1 representa (6) gràficament en els cas que hi ha estats estacionaris. La Figura 2 mostra el cas d'inexistència d'estats estacionaris.

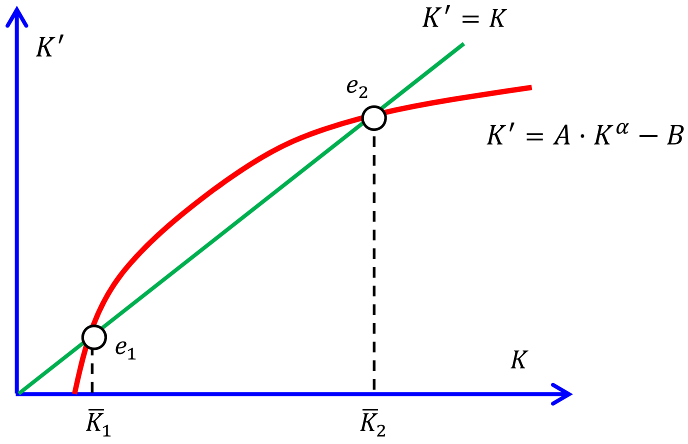

Fig. 1. Representació de (6) amb estats estacionaris

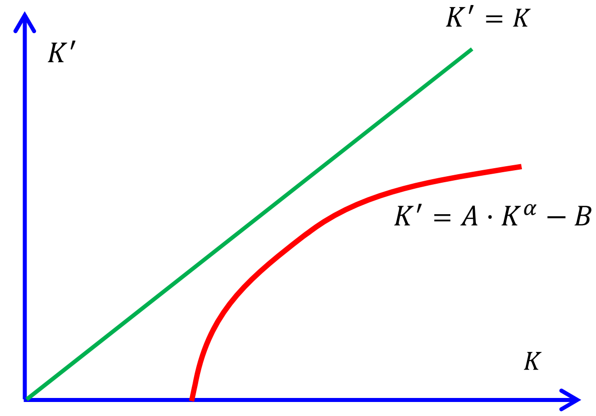

Fig. 2. Representació de (6) sense estats estacionaris

• **Qüestió**: És possible el cas en què la corba $K'=A\cdot K^{\alpha}-B$ intersecta la diagonal principal $K'=K$ només un cop?

Resposta a (ii)

Com que l'expressió (3) és vàlida si $\tau=0$, el capital que acumula cada individu de jove és (7).

$$\boxed{k'=\frac{\beta}{1+\beta}\cdot\omega} \tag{7}$$

Tenint ara $Y=K^{\alpha}\cdot L^{1-\alpha}$ i no pas $Y=\tau\cdot n\cdot K^{\alpha}\cdot L^{1-\alpha}$

$$\omega=\frac{\partial Y}{\partial L}=K^{\alpha}\cdot(1-\alpha)\cdot L^{-\alpha}=(1-\alpha)\cdot\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}=(1-\alpha)\cdot\left(\frac{n\cdot k}{n\cdot 1}\right)^{\alpha}=(1-\alpha)\cdot k^{\alpha}.$$

Com a resultat, la trajectòria d'acumulació individual de capital esdevé (8).

$$\boxed{k'=\frac{\beta\cdot(1-\alpha)}{1+\beta}\cdot k^{\alpha}} \tag{8}$$

La corresponent trajectòria d'acumulació agregada és

$$K'=n\cdot k'=n\cdot\frac{\beta\cdot(1-\alpha)}{1+\beta}\cdot k^{\alpha}=\frac{\beta\cdot(1-\alpha)}{1+\beta}\cdot n^{1-\alpha}\cdot(n\cdot k)^{\alpha}=\frac{\beta\cdot(1-\alpha)\cdot n^{1-\alpha}}{1+\beta}\cdot K^{\alpha}.$$

Definint $C=\frac{\beta\cdot(1-\alpha)\cdot n^{1-\alpha}}{1+\beta}$, la funció que descriu, de manera abreujada, la trajectòria d'acumulació de capital total és (9).

$$\boxed{K'=C\cdot K^{\alpha}} \tag{9}$$

Deixant de banda el valor $\bar{K} = 0$ l'estat estacionari, l'altre valor d'estat estacionari satisfà

$$\bar{K} = C^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Resposta a (iv)

La solució (7) de la resposta a (ii) continua sent vàlida. Ara, però, amb funció de producció del tipus $Y = (\alpha \cdot K^\gamma + (1-\alpha) \cdot L^\gamma)^{1/\gamma}$, aplicant la regla de la cadena,

$$\omega = \frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{1}{\gamma} \cdot [\alpha \cdot K^\gamma + (1-\alpha) \cdot L^\gamma]^{\frac{1}{\gamma}-1} \cdot (1-\alpha) \cdot \gamma \cdot L^{\gamma-1} = (1-\alpha) \cdot [\alpha \cdot K^\gamma + (1-\alpha) \cdot L^\gamma]^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \cdot L^{\frac{\gamma\cdot(\gamma-1)}{\gamma}} =$$

$$= (1-\alpha) \cdot \left(\frac{\alpha \cdot K^\gamma + (1-\alpha) \cdot L^\gamma}{L^\gamma}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = (1-\alpha) \cdot \left(\alpha \cdot \frac{K^\gamma}{L^\gamma} + (1-\alpha) \cdot \frac{L^\gamma}{L^\gamma}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

$$= (1-\alpha) \cdot \left(\alpha \cdot \left(\frac{n \cdot k}{n \cdot 1}\right)^\gamma + 1 - \alpha\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = (1-\alpha) \cdot (\alpha \cdot k^\gamma + 1 - \alpha)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}.$$

Inserint l'expressió que defineix ω en (7), s'arriba a la trajectòria d'acumulació individual de capital (10).

$$\boxed{k' = \frac{\beta \cdot (1-\alpha)}{1+\beta} \cdot (\alpha \cdot k^\gamma + 1 - \alpha)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}} \tag{10}$$

La trajectòria d'acumulacio de capital total és (11).

$$\boxed{K' = \frac{\beta \cdot (1-\alpha)}{1+\beta} \cdot \left(\alpha \cdot n^{\gamma-1} \cdot K^\gamma + (1-\alpha) \cdot n^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}} \tag{11}$$

Una versió compacta d'(11) seria

$$K' = A \cdot (B \cdot K^\gamma + C)^\delta \tag{12}$$

on $A = \frac{\beta\cdot(1-\alpha)}{1+\beta}$, $B = \alpha \cdot n^{\gamma-1}$, $C = (1-\alpha) \cdot n^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$ i $\delta = \frac{1-\gamma}{\gamma}$.

La primera i la segona derivades de (12) permeten d'identificar propietats bàsiques de la funció que descriu la trajectòria d'acumulació de capital.

$$\frac{\partial K'}{\partial K} = A \cdot \frac{1-\gamma}{\gamma} \cdot (B \cdot K^\gamma + C)^{\frac{1-2\gamma}{\gamma}} \cdot B \cdot \gamma \cdot K^{\gamma-1} = A \cdot B \cdot (1-\gamma) \cdot (B \cdot K^\gamma + C)^{\frac{1-2\gamma}{\gamma}} \cdot K^{\gamma-1} > 0$$

$$\frac{\partial^2 K'}{\partial K^2} = A \cdot B \cdot (1-\gamma) \cdot \left((1-2\gamma) \cdot B \cdot (B \cdot K^\gamma + C)^{\frac{1-3\gamma}{\gamma}} \cdot K^{2\cdot(\gamma-1)} + (\gamma-1) \cdot (B \cdot K^\gamma + C)^{\frac{1-2\gamma}{\gamma}} \cdot K^{\gamma-2}\right)$$

Si $\gamma \geq 1/2$, $\frac{\partial^2 K'}{\partial K^2} < 0$: la funció que expressa K' en termes de K és creixent i còncava. Determina tu mateix si, amb $\gamma < 1/2$, $\frac{\partial^2 K'}{\partial K^2}$ pot assolir un valor positiu (funció convexa).

Resposta a (iii)

S'assumeix que els bons tenen un valor nominal d'una unitat del bé: a canvi de comprar-los en un període pel preu p (unitats del bé per bo), s'obté una unitat del bé en el següent període.

En el seu primer període de vida, cada individu s'enfronta a la restricció pressupostària

$$c + k' + p \cdot b = 1 \cdot \omega$$

on k' és el capital que l'individu acumula per al període següent, p és el preu dels bons, b és el nombre de bons comprats i ω és el salari del primer període. En el segon període, la restricció és

$$c' = \sigma' \cdot k' + b$$

on σ' és el preu del capital del segon període. Les dues restriccions es poden reunir en una de sola dividint la segona per σ' i sumant-les. El resultat és

$$c + \frac{c'}{\sigma'} = \omega + b \cdot \left(\frac{1}{\sigma'} - p\right). \tag{13}$$

La rendibilitat bruta d'acumular capital és σ': per cada unitat de bé acumulada en forma de capital s'obtenen, en el períde següent, σ' unitats de bé. La rendibilitat bruta de la compra de bons és $1/p$: pagant p unitats de bé s'aconsegueix una unitat de bé en el període següent.

• **Cas 1**: $\sigma' > 1/p$. En aquest cas, ningú no compraria bons i la política del govern no podria dur-se a terme.

• **Cas 2**: $\sigma' < 1/p$. Llavors ningú no acumularia capital i la funció de producció esdevendria $Y = \tau \cdot n \cdot L^{1-\alpha}$. Aleshores,

$$\omega = \frac{\partial Y}{\partial L} = \tau \cdot n \cdot (1-\alpha) \cdot L^{-\alpha} = \tau \cdot n \cdot (1-\alpha) \cdot n^{-\alpha} = \tau \cdot (1-\alpha) \cdot n^{1-\alpha}.$$

Les restriccions pressupostàris dels individus joves se simplificarien i prendrien la forma

$$c + p \cdot b = \omega$$

$$c' = b$$

L'objectiu seria maximitzar $u = c \cdot (c')^{\beta}$ sotmès a $c = \omega - p \cdot b$ i $c' = b$. Així, es maximitzaria respecte de b (la demanda de bons) la funció

$$u = (\omega - p \cdot b) \cdot b^{\beta}.$$

La condició necessària de maximització és $\partial u / \partial b = 0$; això és,

$$\frac{\partial u}{\partial b} = (-p) \cdot b^{\beta} + (\omega - p \cdot b) \cdot \beta \cdot b^{\beta - 1} = 0.$$

Així,

$$b^{\beta} \cdot p = b^{\beta} \cdot (\omega - p \cdot b) \cdot \beta \cdot b^{-1}$$

i, en conseqüència,

$$b = \frac{1}{1+\beta} \cdot \frac{\omega}{p}$$

o

$$b \cdot p = \frac{\omega}{1+\beta}\,. \tag{14}$$

L'equació (14) estableix la inversió en bons que desitja realitzar cada individu jove. La inversió total seria $n \cdot b \cdot p$. Aquesta inversió ha de finançar dos imports. Un, l'import $\tau \cdot n$; anomenem-lo, per a simplificar, G. L'altre, el valor nominal dels bons que es van emetre el període anterior. Designant per b_{-1} el nombre de bons que cada individu jove va comprar en el període anterior, el deute a pagar en el període present pel govern és $n \cdot b_{-1}$. En suma, cal que

$$n \cdot b \cdot p = G + n \cdot b_{-1} \tag{15}$$

o, fent servir (14),

$$\frac{\omega \cdot n}{1+\beta} = G + n \cdot b_{-1}$$

Tal com s'ha calculat anteriorment,

$$\omega = \tau \cdot n \cdot (1-\alpha) \cdot n^{-\alpha} = G \cdot (1-\alpha) \cdot n^{-\alpha}.$$

Així doncs,

$$\frac{G \cdot (1-\alpha) \cdot n^{-\alpha} \cdot n}{1+\beta} = G + n \cdot b_{-1}$$

o, de manera equivalent,

$$b_{-1} = G \cdot \left(\frac{1-\alpha}{(1+\beta) \cdot\ n^{\alpha}} - \frac{1}{n}\right).$$

Com a la part dreta de l'equació només hi ha paràmetres, la mateixa fórmula és vàlida per a tot període: $b = b_{-1}$. Retornant a la condició (15), $b = b_{-1}$ implica

$$p = 1 + \frac{G}{n \cdot b} = 1 + \frac{1}{n \cdot \left(\frac{1-\alpha}{(1+\beta) \cdot\ n^{\alpha}} - \frac{1}{n}\right)} = 1 + \frac{1}{\frac{(1-\alpha) \cdot n^{1-\alpha}}{(1+\beta)} - 1} = 1 + \frac{(1+\beta)}{(1-\alpha) \cdot n^{1-\alpha} - (1+\beta)}$$
$$= \frac{(1-\alpha) \cdot n^{1-\alpha}}{(1-\alpha) \cdot n^{1-\alpha} - (1+\beta)}.$$