4. Un model de generacions encavalcades amb producció endògena

4.1. Elements del model

• **Nous elements.** El model conté els elements del model de recol·lecció amb els següents canvis.

(i) Per a tot període t, la quantitat de bé disponible en t pot ser acumulada sense pèrdua un període i ser emprada en el període $t + 1$. Els consumidors són els únics que poden acumular el bé.

(ii) La dotació dels consumidors no consisteix en quantitats del bé sinó en quantitats d'un factor de producció que s'anomenarà "factor treball" o, simplement, "treball".

(iii) La quantitat de bé acumulada en el període t esdevé un factor de producció en el període $t + 1$, que s'anomenarà "factor capital" o, abreujant, "capital".

(iv) No hi ha dotació del bé: tota quantitat existent del bé és fruit d'un procés de producció.

(v) Un nou agent, anomenat "empresa", organitza la producció del bé a partir dels dos factors de producció, capital i treball.

(vi) La producció total del bé es representa mitjançant una funció de producció, que estableix la quantitat màxima que es pot obtenir del bé a partir de quantitats donades dels factors de producció capital i treball.

(vii) Les empreses obtenen cada factor de producció en un mercat competitiu del factor. Els consumidors lloguen el seu treball a les empreses a canvi d'un salari (el preu del treball) en el mercat de treball i venen el seu capital a les empreses a canvi d'un preu (el preu del capital).

• **Dotació de treball.** Els consumidors tenen com a dotació treball, no bé. La dotació vital de treball d'un membre i de la generació t és $L_t^i = \left(L_t^i(t), L_t^i(t+1)\right)$, on $L_t^i(t)$ és la quantitat de treball de què i disposa de jove en el període t i $L_t^i(t+1)$ la que disposa de gran en $t + 1$.

• **Mercat de treball.** Cada període t hi ha un mercat de treball competitiu on els consumidors lloguen el seu treball a canvi d'un salari $\omega(t)$ expressat en unitats del bé per unitat de treball. Els consumidors només es preocupen del seu consum, no del seu lleure. Per això ofereixen inelàsticament tota la seva dotació de treball en els dos períodes de vida. La quantitat total de treball $L(t)$ disponible en el període t és la suma del treball ofert pels joves i pels grans:

$$L(t) = \sum_{i \in N(t)} L_t^i(t) + \sum_{i \in N(t-1)} L_{t-1}^i(t)\ .$$

• **Creació del capital.** Per a tot període t, el bé existent en t pot ser acumulat del període t al $t + 1$. El bé acumulat en el període t s'anomena capital en el període $t + 1$. En el període inicial, $t = 1$, hi ha una dotació inicial $K(1)$.

• **Capital com a forma d'estalvi.** Tot consumidor jove i en t pot estalviar una part $K^i(t+1)$ del seu salari $\omega(t)$. $K^i(t+1)$ és el capital que un consumidor gran nascut en el període t posseeix en el període $t+1$. El capital acumulat en t es designa amb $t+1$ per conveniència, atès que se'n fa ús en $t+1$ del capital acumulat en t.

• **Mercat de capital.** Cada període t hi ha un mercat de capital competitiu on els consumidors venen el seu capital a canvi d'un preu $\sigma(t)$ expressat en unitats del bé per unitat de capital.

• **Depreciació de l'estoc de capital.** L'estalvi agregat $\sum_{i \in N(t)} K^i(t+1)$ en t esdevé l'estoc de capital $K(t+1)$ de l'economia en el període $t+1$. Per a tot període t, tot el capital disponible en t es deprecia (s'empra completament) durant el període t. Això fa que el capital no es pugui tornar a acumular.

• **Funció de producció agregada.** Per a tot període t, les possibilitats de producció de bé en tota l'economia en t es representa mitjançant una funció de producció agregada. Segons aquesta funció, es pot produir bé en el període t fent servir treball del període t i capital del període t (que és bé del període anterior $t-1$). Una funció de producció agregada pren la forma

$$Y(t) = G\big(A(t), K(t), L(t)\big),$$

on $A(t)$ representa l'estat de la tecnologia en t, $L(t)$ és la quantitat total de treball en t i $K(t)$ és l'estoc de capital en t. Per a simplificar s'assumirà que $Y(t) = A(t) \cdot F\big(K(t), L(t)\big)$, per a tot període t. En particular, la funció de producció agregada típica serà del tipus Cobb-Douglas, això és, amb $0 < \alpha, \beta < 1$,

$$Y(t) = A(t) \cdot K(t)^{\alpha} \cdot L(t)^{\beta}.$$

• **Rendiments d'escala constants.** Una funció de producció agregada F presenta rendiments d'escala constants si, per a tot $\delta > 0$,

$$F\big(\delta \cdot K(t),\ \delta \cdot L(t)\big) = \delta \cdot F\big(K(t), L(t)\big).$$

• **Hipòtesis sobre les productivitats marginals.** La productivitat marginal $\frac{\partial F}{\partial L}$ del factor treball s'assumeix en general positiva però decreixent: $\frac{\partial F}{\partial L} > 0$ i $\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$. Aquestes propietats signifiquen que unitats addicionals de només treball fan augmentar la producció però cada cop menys. La productivitat marginal $\frac{\partial F}{\partial K}$ del factor capital també s'assumeix en general positiva i decreixent: $\frac{\partial F}{\partial K} > 0$ i $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0$. A més, s'assumeix que $\frac{\partial F}{\partial K} \to \infty$ si $K \to 0$, $\frac{\partial F}{\partial K} \to 0$ si $K \to \infty$ i el mateix per a L.

• **Objectiu de les empreses.** Totes les empreses són competitives, disposen de la mateixa tecnologia productiva i tenen com a objectiu la maximització de beneficis. Les hipòtesis de rendiments constants i empreses idèntiques impliquen que les empreses empraran factor capital K i factor treball L en la mateixa proporció. Això significa que totes les empreses poden ser considerades <u>còpies més grans o més petites d'una empresa donada</u> i que una funció de producció agregada amb rendiments d'escala constants pot representar la producció de tota l'economia com si només hi hagués una empresa.

• **Ús de la producció.** Donat l'estat de la tecnologia, la producció total $Y(t)$ en t s'obté del capital total $K(t)$ i del treball total $L(t)$ en t. Una part de la producció es consumeix en t i la resta s'acumula per al període següent en forma de capital. Formalment,

$$\sum_{i\in N(t)} c_t^i(t) + \sum_{i\in N(t-1)} c_{t-1}^i(t) + \sum_{i\in N(t)} K^i(t+1) = A(t) \cdot F\big(K(t), L(t)\big)$$

o

$$C(t) + K(t+1) = A(t) \cdot F\big(K(t), L(t)\big)\,.$$

• **Preu d'un factor i productivitat del factor.** Atès que el mercat de treball és competitiu, es pot assumir que el salari és igual a la productivitat marginal del treball:

$$\omega(t) = \partial F/\partial L(t).$$

Anàlogament, com que el mercat de capital és competitiu, pot assumir-se que el preu del capital coincideix amb la productivitat marginal del capital:

$$\sigma(t) = \partial F/\partial K(t).$$

Quan hi ha rendiments d'escala constants ω i σ depenen de la quantitat relativa de K i L, no de la seva quantitat absoluta.

• **Un exemple.** Sigui $Y(t) = A(t) \cdot K(t)^{\alpha} \cdot L(t)^{1-\alpha}$. Aleshores:

$$\omega(t) = \frac{\partial Y(t)}{\partial L(t)} = (1-\alpha) \cdot A(t) \cdot \left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)^{\alpha} \text{ i } \sigma(t) = \frac{\partial Y(t)}{\partial K(t)} = \alpha \cdot A(t) \cdot \left(\frac{L(t)}{K(t)}\right)^{1-\alpha}.$$

Per la unicitat del preu dels factors de producció, totes les firmes empren K i L en la mateixa proporció: emprar més K comporta llogar més L. Atès que tot el treball disponible es lloga (no hi ha atur), la remuneració total d'assalariats és $\omega(t) \cdot L(t) = (1-\alpha) \cdot A(t) \cdot \left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)^{\alpha} \cdot L(t) = (1-\alpha) \cdot Y(t)$. De manera similar, $\sigma(t) \cdot K(t) = \alpha \cdot Y(t)$. Tot plegat vol dir que el pagament total al factor treball és la fracció $1-\alpha$ de la producció, en tant que el pagament total que rep el factor capital és la fracció α. Com a resultat,

$$\omega(t) \cdot L(t) + \sigma(t) \cdot K(t) = Y(t).$$

Per consegüent, <u>la producció generada en l'economia es distribueix per complet entre el factor treball i el factor treball seguint una proporció fixa</u>. Aquest resultat és vàlid per a tota funció de producció agregada amb rendiments d'escala constant. Una implicació d'aquesta regla de distribució del producte és que <u>les empreses no obetenen cap benefici</u>: només cobreixen costs.

4.2. Anàlisi del model

• **Anàlisi dels consumidors.** Cada consumidor jove i pretén maximitzar la seva funció d'utilitat sotmès a les seves restriccions pressupostàries. De jove, la restricció pressupostària d'i és

$$c_t^i(t) + l^i(t) + K^i(t+1) = \omega(t) \cdot L_t^i(t)$$

i de gran és

$$c_t^i(t+1) = R(t) \cdot l^i(t) + \sigma(t+1) \cdot K^i(t+1) + \omega(t+1) \cdot L_t^i(t+1).$$

Combinant les dues restriccions s'obté

$$c_t^i(t) + \frac{c_t^i(t+1)}{R(t)} = \omega(t) \cdot L_t^i(t) + \frac{\omega(t+1) \cdot L_t^i(t+1)}{R(t)} + K^i(t+1) \cdot \left(\frac{\sigma(t+1)}{R(t)} - 1 \right).$$

• **Hipòtesi d'arbitratge.** Assumint arbitratge entre els mercats de capital i de préstecs, en equilibri, s'ha de tenir $R(t) = \sigma(t+1)$: la taxa d'interès bruta a pagar en $t+1$ per un préstec obtingut en t és igual al preu que s'obté en $t+1$ per la venda del capital acumulat en t. Una possible justificació és que si $\sigma(t+1) > R(t)$, llavors tothom voldria manllevar tant bé com sigui possible per a acumular-lo en forma de capital; això no pot succeir en equilibri perquè ningú no voldria prestar el bé. D'altra banda, si $\sigma(t+1) < R(t)$, aleshores ningú no voldria tenir capital, de manera que $K(t+1) = 0$. Això faria arbitràriament gran la productivitat marginal del capital, fent $\sigma(t+1)$ també arbitràriment gran, la qual cosa contradiria la premissa $\sigma(t+1) < R(t)$.

• **Reducció del problema de decisió dels consumidors al cas de producció exògena.** La igualtat de la rendibilitat d'invertir en un préstec i d'invertir en capital implica que $K^i(t+1)\left(\frac{\sigma(t+1)}{R(t)} - 1\right) = 0$. Com a conseqüència, el problema de decisió de cada consumidor jove és essencialment igual al problema de decisió amb producció exògena, atès que les restriccions pressupostàries vitals són anàlogues en tots dos casos. En concret, les dotacions $w_t^i(s)$ del cas exogen són ara els ingressos per salari $\omega(s) \cdot L_t^i(s)$. L'única qualificació és que el salari $\omega(t+1)$ corresponent al període $t+1$ és desconegut en el període t (el preu $\sigma(t+1)$ és igualment desconegut en t). Per aquest motiu, per a què els dos problemes siguin essencialment iguals, cal postular previsió perfecta: els consumidors anticipen sense error en cada període t els preus dels factors de producció del període $t+1$.

• **Equilibri general.** Un equilibri general competitiu (amb dotació inicial de capital $K(1)$, funció de producció agregada F, dotacions de treball i previsió perfecta) és una seqüència $\{\hat{R}(t),\ \hat{\sigma}(t),\ \hat{\omega}(t),\ \hat{K}(t)\}_{t\geq 1}$ (on $\{\hat{K}(t)\}_{t\geq 1}$ descriu la trajectòria d'acumulació de capital) tal que, per a tot $t \geq 1$:

(i) $S_t\left(\hat{R}(t)\right) = \hat{K}(t+1)$, on S_t és la funció d'estalvi agregada obtinguda de la maximització de la funció d'utilitat de cada jove;

(ii) $\hat{\sigma}(t+1) = \hat{R}(t)$; (iii) $\hat{\sigma}(t) = \partial F/\partial K(t)$; i (iv) $\hat{\omega}(t) = \partial F/\partial L(t)$.

• **Estacionarietat.** Un estat estacionari de l'economia és caracteritzat per la condició $K(t+1) = K(t)$.

4.3. Exemple

• **L'economia**. Sigui $u_t^i = c_t^i(t) \cdot c_t^i(t+1)$ i $Y(t) = A(t) \cdot K(t)^\alpha \cdot L(t)^{1-\alpha}$. Llavors, definint $L_t(s) = \sum_{i \in N(s)} L_t^i(s)$ i $L(t) = L_t(t) + L_{t-1}(t)$,

$$S_t = \frac{\omega(t) \cdot L_t(t)}{2} - \frac{\omega(t+1) \cdot L_t(t+1)}{2 \cdot R(t)}, \quad \omega(t) = (1-\alpha) \cdot A(t) \cdot \left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)^\alpha, \sigma(t) = \alpha \cdot A(t) \cdot \left(\frac{L(t)}{K(t)}\right)^{1-\alpha}.$$

Introduint les tres equacions en la condició d'equilibri $S_t = K(t+1)$ i aïllant $K(t+1)$, s'obté la trajectòria d'acumulació de capital de l'economia.

$$K(t+1) = \left(\frac{\frac{(1-\alpha) \cdot A(t)}{2} \cdot \frac{L_t(t)}{L(t)^\alpha}}{1 + \frac{1-\alpha}{2\alpha} \cdot \frac{L_t(t+1)}{L(t+1)}} \right) \cdot K(t)^\alpha . \tag{1}$$

• **Cas 1: població i tecnologia constants.** Si A, L i L_t es mantenen constants, llavors el terme entre parèntesis a (1) és una constant positiva. Designant aquesta constant per a, l'equació que descriu la dinàmica d'acumulació de capital en equilibriu esdevé

$$K(t+1) = a \cdot K(t)^\alpha.$$

L'estoc de capital $\bar{K}$ d'estat estacionari s'obté fent $K(t+1) = K(t) = \bar{K}$. Així, $\bar{K} = a \cdot \bar{K}^\alpha$ i

$$\bar{K} = a^{1/(1-\alpha)} .$$

La Figura 1 avall representa $\bar{K}$ i l'equació $K(t+1) = a \cdot K(t)^\alpha$. La figura mostra que, amb independència de l'estoc inicial de capital $K(1) > 0$, l'estoc de capital de l'economia convergeix a $\bar{K}$. Un cop determinat el valor d'estat estacionari $\bar{K}$, assumint L i A constant, es pot obtenir la producció $\bar{Y}$ d'estat estacionari: $\bar{Y} = A \cdot \bar{K}^\alpha \cdot L^{1-\alpha}$. Sabent això, tant $\bar{\omega}$ com $\bar{\sigma}$ es poden calcular a continuació. De la condició d'equilibri $S_t = K(t+1)$, se segueix que $\bar{S} = \bar{K}$. Donada aquesta condició, i atès que S_t és en general funció d'$R(t)$, $\bar{R}$ també pot ser esbrinada (en equilibri, $\bar{R} = \bar{\sigma}$).

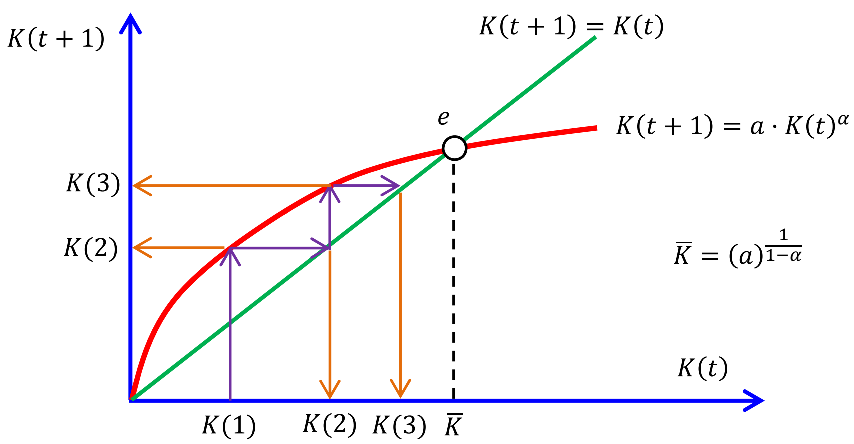

Figura 1. Dinàmica de l'estoc de capital i convergència a l'estat estacionari amb tecnologia i població constants

• **Cas 2: població creixent i tecnologia constant.** Amb la resta de coses com al cas 1, suposem: (i) creixement constant de la població: $N(t+1) = N \cdot N(t)$, per alguna constant $N > 1$; i (ii) totes les generacions tenen la mateixa dotació de treball. Sigui $L_0(0)$ la dotació de treball d'un jove en $t = 0$ i $L_0(1)$ la dotació de treball d'un vell en $t = 1$. Definint $L(0) = L_0(0) + L_0(1)/N$, la dotació total de treball dels joves en t és

$$L_t(t) = N^t \cdot L_0(0)$$

i dels vells en t és

$$L_{t-1}(t) = N^{t-1} \cdot L_0(1).$$

En conclusió, l'oferta agregada de treball en t és

$$L(t) = L_t(t) + L_{t-1}(t) = N^t \cdot L_0(0) + N^{t-1} \cdot L_0(1) = N^t \left(L_0(0) + \frac{L_0(1)}{N}\right) = N^t \cdot L(0).$$

La funció d'estalvi de cada jove i en t és

$$s^i(t) = \frac{1}{2}\left(\omega(t) \cdot L_t^i(t) - \frac{\omega(t+1) \cdot L_t^i(t+1)}{R(t)}\right).$$

L'estalvi agregat en t és

$$S_t = N(t) \cdot s^i(t) = N^t \cdot N(0) \cdot s^i(t) = \frac{1}{2}\left(\omega(t) \cdot N^t \cdot L_0(0) - \frac{\omega(t+1) \cdot N^t \cdot L_0(1)}{R(t)}\right).$$

El salari en t és

$$\omega(t) = \frac{\partial F}{\partial L(t)} = (1-\alpha) \cdot A(t) \cdot \left(\frac{K(t)}{N^t \cdot L(0)}\right)^{\alpha}.$$

El preu del capital en $t+1$ (que equival a $R(t)$ en equilibri) és

$$\sigma(t+1) = \frac{\partial F}{\partial K(t+1)} = \alpha \cdot A(t) \cdot \left(\frac{K(t+1)}{N^{t+1} \cdot L(0)}\right)^{\alpha-1}.$$

Fent servir les equacions anteriors i la condició d'equilibri $S_t = K(t+1)$, s'arriba a

$$K(t+1) = \left(\frac{\frac{(1-\alpha) \cdot A(0)}{2} \cdot \frac{L_0(0)}{L(0)^{\alpha}}}{1 + \frac{1-\alpha}{2\alpha} \cdot \frac{L_0(1)}{N \cdot L(0)}}\right) \cdot N^{t(1-\alpha)} \cdot K(t)^{\alpha}$$

que és (1) adaptada al cas. Anomenant B el terme entre parèntesis, la conclusió final és

$$K(t+1) = B \cdot N^{t(1-\alpha)} \cdot K(t)^{\alpha}.$$

Donada la fórmula anterior, la taxa bruta de creixement del capital resulta ser

$$G_K(t+1) = \frac{K(t+1)}{K(t)} = \frac{B \cdot N^{t(1-\alpha)} \cdot K(t)^{\alpha}}{B \cdot N^{(t-1)(1-\alpha)} \cdot K(t-1)^{\alpha}} = \frac{1}{N^{\alpha-1}} \cdot G_K(t)^{\alpha} = N^{1-\alpha} \cdot G_K(t)^{\alpha}.$$

Essent G_K el valor límit de la taxa bruta de creixement del capital,

$$G_K = N^{1-\alpha} \cdot {G_K}^{\alpha} .$$

Aïllant G_K, es dedueix que ${G_K}^{1-\alpha} = N^{1-\alpha}$. En resum,

$$G_K = N .$$

Recapitulant: amb població creixent a una taxa constant, en l'estat estacionari que s'assoleix en equilibri, el capital s'acumula a la mateixa taxa que la població: $K(t+1) = N \cdot K(t)$. Així, la taxa de creixement de l'estoc de capital K i la taxa de creixement de la producció Y eventualment coincideixen amb la taxa de creixement de la població. Un corol·lari del fet que producció i població creixen a la mateixa taxa és que la producció per càpita (un indicador del nivell de vida) es manté constant.

• **Cas 3: població constant amb progrés tecnològic**. Suposem que la tecnologia s'acumula a la taxa bruta $G > 1$, de manera que $A(t+1) = G \cdot A(t)$. Atès que $Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}$, el progrés tecnològic es diu neutral, degut al fet que els canvis en A afecten la productivitat de tant el capital com el treball. Donat $A(t) = G^t \cdot A(0)$ i població constant, la trajectòria d'equilibri (1) del capital esdevé

$$K(t+1) = \left(\frac{\frac{(1-\alpha) \cdot A(0)}{2} \cdot \frac{L_0(0)}{L(0)^{\alpha}}}{1 + \frac{1-\alpha}{2\alpha} \cdot \frac{L_0(1)}{N \cdot L(0)}} \right) \cdot G^t \cdot K(t)^{\alpha}.$$

Dient B el terme entre parèntesis,

$$K(t+1) = B \cdot G^t \cdot K(t)^{\alpha}.$$

La taxa bruta de creixement del capital és

$$G_K(t+1) = \frac{K(t+1)}{K(t)} = \frac{B \cdot G^t \cdot K(t)^{\alpha}}{B \cdot G^{t-1} \cdot K(t-1)^{\alpha}} = G \cdot G_K(t)^{\alpha}.$$

Si G_K és el límit de $G_K(t)$, $G_K = G \cdot {G_K}^{\alpha}$ i

$$G_K = G^{\frac{1}{1-\alpha}} .$$

Tenint-se $\frac{1}{1-\alpha} > 1$, es conclou que $G_K > G$: la taxa de creixement de l'estoc de capital (que és igual a la taxa de creixement de la producció) és superior a la taxa a què progressa la tecnologia.

4.4. Un altre exemple

• **Descripció de l'economia**. Cada període hi ha dos grups d'individus, G1 i G2. La funció d'utilitat de cada membre de G1 és $u_1 = c_1 \cdot {c_1}'$; la de cada membre de G2 és $u_2 = {c_2}^{\beta} \cdot {c_2}'$. La dotació de treball de cada consumidor de G1 és $(2, 1)$; la de cada consumidor de G2 és $(1, 0)$. En el període inicial, $t = 1$, G2 conté n (parell) membres, mentre G1 no en té cap. A partir d'aleshores, cada període G2 un nou membre jove menys respecte del període anterior i G1 té un membre jove més. Aquesta dinàmica continua fins que els dos grups tenen el mateix nombre de membres, període a partir del qual tots dos grups mantenen constant el nombre de membres. No hi ha mercat de préstecs. La funció de producció agregada és $Y = 2 \cdot K^{1/2} \cdot L^{1/2}$. Per últim, $K(1) = 1$.

• **Preu dels factors**. El salari ω és la productivitat marginal del treball $\frac{\partial Y}{\partial L} = \left(\frac{K}{L}\right)^{1/2}$. El preu del capital σ és la productivitat marginal del capital $\frac{\partial Y}{\partial K} = \left(\frac{L}{K}\right)^{1/2} = \frac{1}{\omega}$. Per tant, $\sigma = \frac{1}{\omega}$. Sigui n_1 el nombre de membres de G1 i n_2 el de G2. Així, $L = n$ quan $t = 1$ i $L = n_2 + 2 \cdot n_1 + n_1 - 1 = 3 \cdot n_1 + n_2 - 1$ quan $t > 1$. A més, per $t \geq \frac{n}{2} + 1$, $n_1 = n_2$; per a tot $1 \leq t < \frac{n}{2} + 1$, $n_1 = t - 1$ i $n_2 = n - n_1$.

• **Decisions dels membres de G2**. La restricció pressupostària de cada jove és $c_2 + k_2{}' = 1 \cdot \omega$, on c_2 és el consum de jove, $k_2{}'$ el capital acumulat per al següent període i ω és el salari. De gran la restricció és $c_2{}' = \sigma' \cdot k_2{}'$, on $c_2{}'$ és el consum de jove i σ' és el preu del capital. Combinant-les s'obté la restricció pressupostària vital $c_2 + \frac{c_2{}'}{\sigma'} = \omega$. El lagrangià és $\mathcal{L}_2 = c_2{}^{\beta} \cdot c_2{}' + \lambda \cdot \left(\omega - c_2 - \frac{c_2{}'}{\sigma'}\right)$. El lot maximitzador $(c_2, c_2{}')$ satisfà $\frac{c_2{}'}{\sigma'} = \frac{c_2}{\beta}$. La funció de consum és $c_2 = \frac{\omega \cdot \beta}{1+\beta}$. La funció d'estalvi és $s_2 = \omega - c_2 = \frac{\omega}{1+\beta} = \left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1+\beta}$.

• **Decisions dels membres de G1**. Les restriccions són $c_1 + k_1{}' = 2 \cdot \omega$ i $c_1{}' = \sigma' \cdot k_1{}' + 1 \cdot \omega'$. La vital, $c_1 + \frac{c_1{}'}{\sigma'} = 2 \cdot \omega + \frac{\omega'}{\sigma'}$. El lagrangià és $\mathcal{L}_1 = c_1 \cdot c_1{}' + \lambda \cdot \left(2 \cdot \omega + \frac{\omega'}{\sigma'} - c_1 - \frac{c_1{}'}{\sigma'}\right)$. El lot maximitzador satisfà $c_1 = \frac{c_1{}'}{\sigma'}$. La funció de consum és $c_1 = \omega + \frac{\omega'}{2 \cdot \sigma'}$. La funció d'estalvi és $s_1 = 2 \cdot \omega - c_1 = \omega - \frac{\omega'}{2 \cdot \sigma'} = \omega - \frac{\omega'^2}{2} = \left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{K'}{L'}$.

• **Equilibri i acumulació**. Sigui n_1 el nombre de membres de G1 i n_2 el de G2. La funció d'estalvi agregat serà $S = n_1 \cdot s_1 + n_2 \cdot s_2 = n_1 \cdot \left(\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{K'}{L'}\right) + n_2 \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1+\beta} = \left(n_1 + \frac{n_2}{1+\beta}\right)\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{n_1}{2} \cdot \frac{K'}{L'}$. En equilibri, $S = K'$. Tot plegat porta a la següent dinàmica d'acumulació de capital:

$$K' = \left(\frac{n_1 \cdot (1+\beta) + n_2}{L^{1/2} \cdot (1+\beta)}\right) \cdot \frac{2 \cdot L'}{n_1 + 2 \cdot L'} \cdot K^{1/2}.$$

La fórmula anterior depèn de t. Quan $t = 1$, $n_1 = 0$, $n_2 = n$, $L = n$, $L' = n + 1$ i $K = 1$; per tant, $K' = n^{1/2}/(1+\beta)$. Quan $t \geq \frac{n}{2} + 1$, $n_1 = n_2 = n/2$, $L = 2n - 1 = L'$ i, en conseqüència,

$$K' = \frac{n \cdot (2+\beta)}{(2 \cdot n - 1)^{1/2} \cdot (1+\beta)} \cdot \frac{4 \cdot n - 2}{5 \cdot n - 4} \cdot K^{1/2}$$

descriu l'eventual trajectòria d'acumulació de capital (això és, per a t suficientment gran). L'estat estacionari (amb estoc de capital positiu) d'aquesta trajectòria correspon a l'estoc de capital

$$\overline{K} = \frac{n^2 \cdot (2+\beta)^2}{(2 \cdot n - 1) \cdot (1+\beta)^2} \cdot \left(\frac{4 \cdot n - 2}{5 \cdot n - 4}\right)^2.$$

Exercicis

Exercici 1. Finançament col·lectiu de tecnologia d'emmagatzematge. La funció d'utilitat de cada consumidor i és $u_t^i\left(c_t^i(t), c_t^i(t+1)\right) = c_t^i(t) \cdot c_t^i(t+1)$. Cada generació está formada per dos grups, G1 i G2, cadascun format per n individus. Cada membre de G1 té dotació $(0, w)$ i cada membre de G2 compta amb dotació $(0, v)$, on $w > v > 0$. Tot i que el bé no es pot conservar, es pot emprar una tecnologia d'emmagatzematge d'un període: per cada unitat del bé acumulada en el període t per un individu i, en el període $t+1$ i tindrà la quantitat $\lambda(t)$ del bé, on $0 < \lambda(t) < 1$.

L'efectivitat de la tecnologia depèn de les contribucions dels individus al seu desenvolupament. Si, en t, cada membre de G1 aporta τ_1 unitats del bé per a finançar/desenvolupar la tecnologia i cada membre de G2 aporta τ_2 unitats, aleshores $\lambda(t) = \frac{\tau_1+\tau_2}{w+v}$. Determina, en l'equilibri general, quina part de la seva dotació estalvia (i quina aporta al finançament de la tecnologia) cada individu.

Exercici 2. Tecnologia de transferència. Considera una economia on tots els individus són iguals, viuen durant dos períodes consecutius i el bé només pot existir durant un període. Imagina que es descobreix una tecnologia que, sense cost, permet de transferir una unitat del bé dos períodes cap al futur. Així, si un individu acumula una unitat del bé en el període t, fent servir la tecnologia, aquesta unitat estarà disponible per a ser consumida (o novament acumulada) en el període $t+2$. Tindria aquesta tecnologia utilitat pràctica? En particular, acumularien bé els individus?

Exercici 3. Equilibri amb tecnologia d'emmagatzematge imperfecta. La funció d'utilitat de cada consumidor i és $u_t^i\left(c_t^i(t), c_t^i(t+1)\right) = c_t^i(t) \cdot c_t^i(t+1)$. Cada generació está formada per dos grups, G1 i G2, cadascun format per n individus. Cada membre de G1 té dotació (v, w) i cada membre de G2 compta amb dotació (w, v), on $w > v > 0$. Tot i que la naturalesa del bé no permet de transferir-lo d'un període a cap altre de posterior, existeix una tecnologia que possibilita l'acumulació del bé: per cada unitat del bé que un individu jove acumuli en el període t, l'individu disposarà de λ unitats del bé en el període $t+1$, on $0 < \lambda < 1$. Assumint que hi ha un mercat de préstecs del bé, calcula l'equilibri general.

Exercici 4. Equilibri amb producció endògena. La funció d'utilitat de cada individu jove i és $u_t^i = \ln c_t^i(t) + \beta \cdot \ln c_t^i(t+1)$, on $0 < \beta < 1$. Cada generació està formada per 50 individus amb dotació $(0, 1)$ i 50 amb dotació $(2, 0)$. La funció de producció és $Y(t) = K(t)^\alpha L(t)^{1-\alpha}$ i $K(1) > 0$.

(i) Determina l'equació en diferències que estableix la trajectòria de l'estoc de capital.

(ii) Calcula un estat estacionari amb estoc de capital positiu i l'equilibri general.

(iii) Respon a (i) i (ii) si, per a tot t, la generació $t+1$ té un 50% més de membres que la t.

(iv) Respon a (i) i (ii) si, per a tot t, si en el període 2 mor la meitat dels joves de cada tipus.

(v) Respon a (i) i (ii) si, per a tot t, si en el període 2 es destrueix la meitat de l'estoc de capital.

Exercici 5. Un amb evasió fiscal sense capital. Cada generació té 100 membres: 50 ("els pobres") amb dotació de treball $(1, 0)$ i els altres 50 ("els rics") amb dotació de treball $(4, 0)$. Tots els joves de totes les generacions tenen la mateixa funció d'utilitat $u_t^i = c_t^i(t) \cdot c_t^i(t+1)$. No hi ha capital: la producció només depèn del treball: $Y(t) = L(t)^{1/2}$. El salari és $\omega(t) = L(t)^{-1/2}$.

Hi ha un goven que estableix un impost τ a pagar pels rics joves. Per a cada t, la recaptació tributària en t es distribueix igualitàriament entre tots els que són grans en t (sistema de pensions de repartiment). Cada individu gran rebrà $\tilde{\tau}$. Els rics joves poden dedicar una part x de la seva dotació de treball tractant d'evadir el pagament de l'impost. Quan un ric esmerça x per a defraudar el pagament, acaba pagant $\tau \cdot g(x)$ en comptes de τ, on $g(x) = \left(1 - \frac{x}{4}\right)^2$.

En cada període t, el pressupost del govern està equilibrat: els ingressos tributaris obtinguts dels rics són iguals a les transferències fetes als grans $(100 \ \cdot \tilde{\tau})$. Els ingressos provinents dels rics no són necessàriament $50 \cdot \tau$ perquè cal determinar el nivell d'evasió fiscal que decideixen els rics. Troba l'equació que determina $\tilde{\tau}$ en funció de τ i calcula $\tilde{\tau}$ quan $\tau = 1$.

Exercici 6. Sostenibilitat. Només hi ha un bé, que pot acumular-se d'un període cap a un altre en forma de capital i que pot produir-se combinant els factors treball i capital. Si en el moment t un individu acumula l'estoc k_t de capital, aleshores en el moment $t+1$ estarà disponible només l'estoc $(1-\delta) \cdot k_t$, on $0 < \delta < 1$. Cada generació està formada per n individus idèntics, amb la funció d'utilitat de jove $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$. La funció d'utilitat de cada individu gran coincideix amb el seu consum. Els individus prenen decisions per a maximitzar la seva funció d'utilitat.

Cada individu disposa d'una unitat de treball de jove i cap unitat de gran. Es necessita capital per a què el treball pugui contribuir a la producció del bé. Els individus joves empren tot el seu treball en la producció del bé. En emprar tot el seu treball per a produir el bé, cada individu que és jove en t aconsegueix produir $a \cdot (1-\delta) \cdot k_t$, on $a > 0$ és una constant i k_t és l'estoc de capital mitjà acumulat en el moment $t-1$ i disponible en el moment t (atès que hi ha el mateix nombre d'individus en cada generació, k_t és el capital que cadascun dels individus va acumular en $t-1$). Cada individu jove decideix quina part de la producció que realitza la consumeix i quina part l'acumula en forma de capital. El consum de cada individu gran en el període t coincideix amb la part no depreciada del capital que el mateix individu va acumular en el període $t-1$.

(i) Determina l'equació que expressa la trajectòria d'acumulació del capital i representa-la gràficament.

(ii) Considera la següent modificació de l'economia. Hi ha un recurs lliure i gratuït X que és necessari per a produir el bé. Sigui x_t la quantitat de recurs existent en el moment t. Cada unitat de capital emprada en la producció comporta la pèrdua d'α unitats d'X. El recurs X té la capacitat de regeneració: si y_t representa la quantitat d'X disponible un cop descomptada la pèrdua causada pel procés de producció, aleshores hi ha $y_t \cdot (1+\beta)$ unitats del recurs en $t+1$, on $\beta > 0$. Assumint que $\alpha = \delta$ i que $\beta = \alpha/2$, determina el valor màxim $\bar{a}$ que pot assolir a per a què el procés productiu no esgoti X. Com es veu afectat $\bar{a}$ per canvis en α?

Exercici 7. Independència. Hi ha únicament un bé, que pot acumular-se només un període en forma de capital (sense depreciació) i que pot produir-se combinant els factors treball i capital. Cada generació està integrada per dos grups, G1 i G2. G1 està format per $2 \cdot n$ individus idèntics, cadascú amb una unitat de treball de jove i dues unitats de treball de grans. La funció d'utilitat de cada jove de G1 en el període t és $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^{\beta}$, on $0 < \beta < 1$. La funció d'utilitat de cada individu gran coincideix amb el seu consum. G2 està constituït per n individus idèntics, cadascú amb quatre unitats de treball de jove i dues unitats de treball de grans. La funció d'utilitat de cada jove de G2 en t és $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$. La funció d'utilitat de cada individu gran coincideix amb el seu consum.

La funció de producció de l'economia en cada període t és $Y_t = K_t \cdot L_t$, on K_t és el capital total en el moment t i L_t és el volum total de treball ofert en t. Tots els individus d'ambdós grups ofereixen el seu treball, tant de joves com de grans. La remuneració del capital és la meitat de la productivitat marginal del capital. La remuneració del treball és la meitat de la productivitat marginal del treball. S'assumeix que, per arbitratge, la taxa d'interès d'un préstec en el moment t coincideix amb la remuneració del capital en el moment $t + 1$.

(i) Determina l'equació que descriu la trajectòria d'acumulació del capital i representa-la gràficament.

(ii) Imagina que els membres de G2 s'independitzen i constitueixen una economia pròpia, separada de l'economia que formarien els membres de G1. En cada economia es mantenen les dotacions dels membres dels grups respectius, la funció de producció de l'economia original i les regles que determinen les remuneracions dels factors. Determina l'equació que representa la trajectòria d'acumulació del capital de cada economia i compara-la amb l'obtinguda en l'apartat (i) per a jutjar si a algun dels grups li convé la secessió.

(iii) Respon a (i) i (ii) si la funció de producció és $Y_t = {K_t}^{1/2} \cdot {L_t}^{1/2}$ (però ara la remuneració de cada factor coincideix amb la seva productivitat marginal).

Exercici 8. Cicles. Hi ha un únic bé que es pot acumular un període. Cada període hi ha n individus idèntics que viuen dos períodes consecutius i que de joves tenen la funció d'utilitat $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove i c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran. Els individus que neixen en un període senar tenen la dotació de factor treball $(1, 1)$: una unitat de treball de joves i una unitat de grans. Els individus que neixen en un període parell tenen la dotació de factor treball $(2, 2)$: dues unitats de treball de joves i dues unitats de grans. La funció de producció agregada en el període t és $Y_t = K_t \cdot L_t$, on K_t és l'estoc total de capital en t i L_t és la quantitat total de treball disponible en t. Cada factor de producció rep com a remuneració la meitat de la seva productivitat marginal segons la funció de producció agregada. Determina l'equació que descriu la trajectòria d'acumulació de l'estoc de capital i troba els estats estacionaris.

Exercici 9. Globalització. Hi ha dues economies, E1 i E2. En cada economia: (i) hi ha n individus idèntics i el mateix bé, que es pot acumular un període i es pot produir; i (ii) cada factor de producció es remunera segons la seva productivitat marginal en la funció de producció agregada.

La dotació de treball dels membres d'E1 és $(2, 1)$: dues unitats de treball de jove i una de gran. Cada jove d'E1 té funció d'utilitat $u_t = c_t^\beta \cdot c_{t+1}$, on $0 < \beta < 1$ és una constant, c_t és el consum que l'individu fa de jove i c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran. La funció de producció agregada en el període t és $Y_t = 2K_t + L_t$, on K_t és l'estoc total de capital en t i L_t és la quantitat total de treball disponible en t..

La dotació de treball dels membres d'E2 és $(1, 0)$: una unitat de treball de jove i cap de gran. Cada jove d'E2 té funció d'utilitat $u_t = c_t \cdot c_{t+1}^\beta$, on $0 < \beta < 1$ és la mateixa constant d'E1, c_t és el consum que l'individu fa de jove i c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran. La funció de producció agregada en el període t és $Y_t = 2K_t + L_t$, on K_t és l'estoc total de capital en t i L_t és la quantitat total de treball disponible en t.

(i) Per a cada economia, determina l'equació que descriu la trajectòria d'acumulació de l'estoc de capital i l'estoc de capital a tot estat estacionari.

(ii) Suposa que els membres de les dues economies s'emparellen, de manera que cada membre d'E1 ha de transferir 1/8 unitats de capital a la seva parella d'E2. Torna a calcular, només per a l'economia E2, l'equació que descriu la trajectòria d'acumulació de l'estoc de capital i l'estoc de capital a tot estat estacionari. Sobre la base dels resultats, fes una anàlisi crítica de la transferència com a mesura de política econòmica per a contribuir a la prosperitat d'E2.

(iii) Determina l'equació que descriu la trajectòria d'acumulació de l'estoc de capital i l'estoc de capital a tot estat estacionari si les dues economies s'integressin i formessin una de sola.

Exercici 10. Igualtat. En l'economia només hi ha un bé, que no pot acumular-se d'un període cap a un altre ni produir-se. Cada generació està formada per dos grups: G1 (integrat per n individus idèntics) i G2 (constituït per m individus idèntics). La funció d'utilitat de cada jove de G1 és $u_t = (c_t)^\beta \cdot c_{t+1}$ i la de cada jove de G2 és $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^\beta$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove, c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran i $\beta > 0$. Cada individu de G2 té, com a dotació, zero unitats del bé de jove i una unitat del bé de gran. Cada individu de G1 té, com a dotació, una unitat del bé de jove i zero unitats del bé de gran.

(i) Determina l'equilibri general i l'efecte sobre la utilitat d'un membre de G1 d'un augment d'n.

(ii) Calcula la quantitat τ del bé que cada jove de G1 ha de rebre o pagar de manera que, quan l'import $n \cdot \tau$ es distribueix igualitàriament entre els joves de G2, la utilitat de tots els joves de tots dos grups és la mateixa en l'equilibri general.

Exercici 11. Capital per sempre. En l'economia només hi ha un bé, que pot acumular-se indefinidament. Cada generació està formada per individus idèntics. La funció d'utilitat de cada jove és $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove i c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran. La funció d'utilitat de cada individu gran coincideix amb el seu consum.

Cada individu té, com a dotació, una unitat de treball de jove i cap de gran. Amb cada unitat de treball es produeixen α unitats del bé. Cada unitat de capital que un individu acumula de jove es transforma en β unitats del bé en el període següent. A més, del total de capital acumulat en el període t es preserva la proporció δ per al període $t+1$. Aquest capital romanent és indistingible del bé que es produeix en $t+1$ i es distribueix a parts iguals entre els joves del període $t+1$.

Redacta tu mateix/a les preguntes a respondre i respon-les. En un cas, suposa que la població és sempre constant (amb n membres) i en un altre que creix a la taxa $n > 0$.

Exercici 12. Capital humà. En l'economia només hi ha un bé, que no pot acumular-se d'un període cap a un altre però que es pot produir-se combinant els factors treball i capital humà. La funció de producció de l'economia en cada període t és $Y_t = (H_t)^\alpha \cdot (L_t)^{1-\alpha}$, on $0 < \alpha < 1$, H_t és el capital humà total en el període t i L_t és el volum total de factor treball en t.

Cada generació està formada per n individus idèntics, amb $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$ com a funció d'utilitat de jove, on c_t és el consum que l'individu fa de jove i c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran. Cada individu jove disposa d'una unitat de treball de jove i cap unitat de gran. Cada individu jove en t decideix quina part l_t del seu treball dedica a la producció del bé i quina part $1 - l_t$ destina a la formació de capital humà. La funció de formació de capital humà h_t a partir del treball $1 - l_t$ destinat a formar-lo és $h_t = \theta \cdot (1 - l_t)$, on $\theta > 1$ és una constant. Formar capital humà té un cost: el cost, en unitats del bé, de crear una unitat de capital humà és una constant $\gamma > 0$. El capital humà acumulat de jove es pot fer servir de gran per a produir el bé. La remuneració de cada unitat de capital humà és la productivitat marginal del capital humà. La retribució de cada unitat de treball és la productivitat marginal del treball.

Redacta tu mateix/a les preguntes a respondre i respon-les.

Exercici 13. Capital i gent. En l'economia només hi ha un bé, que pot acumular-se d'un període cap al següent combinant els factors treball i capital. La funció de producció de l'economia en cada període t és $Y_t = K_t \cdot L_t$, on K_t és l'estoc total de capital en el període t i L_t és el volum total de factor treball en t.

Cada generació està formada per individus idèntics, amb la funció d'utilitat $u_t = c_t \cdot c_{t+1} \cdot n_{t+1}$ de jove, on c_t és el consum que l'individu fa de jove, c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran i n_{t+1} és el nombre de fills que cada individu decideix tenir de jove. Cada individu jove disposa d'una unitat de treball de jove i cap unitat de gran. La unitat de treball de cada període t es ven a canvi d'un salari ω_t.

Cada jove decideix quants fills tenir i quina part del salari acumular en forma de capital. El cost de tenir cada fill és $\gamma > 0$ unitats del bé. El capital acumulat de jove en t es ven de gran en $t+1$ a canvi d'un preu σ_{t+1}. Cada període la proporció de la producció total destinada a pagar salaris és la mateixa que la proporció destinada a remunerar el capital.

Determina l'equilibri general de cada període, les trajectòries d'acumulació de capital i de creixement de la població, i determina els estats estacionaris de l'economia.

Exercici 14. Comerç internacional. Hi ha dues economies, E1 i E2. Hi ha dos béns, C i D. En cada economia i cada període hi ha el mateix nombre n d'individus idèntics, que viuen un període. Cada individu disposa d'una unitat de treball, que pot destinar a produir qualssevol dels dos béns. En E1: (i) la quantitat l de treball pot produir $\alpha \cdot l$ unitats del bé C, on $\alpha > 1$; i (ii) la quantitat l de treball pot produir l unitats del bé D. En E2: (i) la quantitat l de treball pot produir $\alpha \cdot l$ unitats del bé D (el paràmetre α és el mateix que el d'E1); i (ii) la quantitat l de treball pot produir l unitats del bé C.

L'economia E1 pot exportar bé C a l'economia E2 a canvi de bé D (per tant, E2 pot exportar D a canvi de C). La relació d'intercanvi és d'u a u: una unitat de C s'intercanvia sempre per una unitat de D. La funció d'utilitat de cada membre d'E1 és $u_{1t} = c_{1t} \cdot \left(d_{1t} + \tilde{d}_t\right)^2$, on c_{1t} és el consum que l'individu fa del bé C (per força, produït a E1), d_{1t} és el consum que ell mateix fa del bé D produït a E1 i $\tilde{d}_t$ és el consum que l'individu fa del bé D importat d'E2. La funció d'utilitat de cada membre d'E2 és $u_{2t} = (c_{2t} + \tilde{c}_t)^2 \cdot d_{2t}$, on d_{2t} és el consum que l'individu fa del bé D (per força, produït a E2), c_{2t} és el consum que ell mateix fa del bé C produït en E2 i $\tilde{c}_t$ és el consum que l'individu fa del bé C importat d'E1.

(i) Determina l'equilibri general de cada economia si les economies són autàrquiques.

(ii) Determina l'equilibri general de cada economia si hi ha comerç internacional i avalua en quina economia els individus guanyen proporcionalment més en el trànsit d'una economia tancada a una d'oberta.

(iii) Suggereix alguna altra pregunta a respondre.

Exercici 15. Convergència i divergència. Hi ha un únic bé que es pot produir i acumular un període. Cada període neixen n individus idèntics, que viuen dos períodes consecutius. La funció d'utilitat en t d'un individu nascut en t és $u_t = (c_t)^\beta \cdot c_{t+1}$, on $\beta > 1$. La funció d'utilitat en $t+1$ d'un individu nascut en t és $u_{t+1} = c_{t+1}$. Quan neix, tot individu disposa d'una unitat de treball; no en té cap en el següent període. En el seu primer període de vida els individus lloguen el seu treball a canvi d'un salari. El salari rebut és la productivitat marginal del treball segons la funció de producció agregada $Y_t = {K_t}^{1/2} \cdot {L_t}^{1/2}$. La remuneració dels propietaris de capital és la productivitat marginal del capital.

(i) Determina l'equació d'acumulació de capital i troba els estats estacionaris.

(ii) Hi ha una segona economia idèntica a l'anterior, excepte pel fet que $Y_t = {K_t}^{2/3} \cdot {L_t}^{1/3}$. Els individus vells de la primera economia tenen la possibilitat de dur part del seu capital a l'altra economia sense cap cost. Calcula quina part de l'estoc de capital de la primera economia es transfereix a la segona en els estats estacionaris.

Exercici 16. Cicle demogràfic. Hi ha un únic bé que es pot produir i acumular d'un període al següent. En cada període senar neixen n individus idèntics. En cada període parell neixen $2 \cdot n$ individus idèntics. Cada individu viu dos períodes consecutius, neix amb una unitat de treball i no té cap dotació en el seu segon període de vida. Per a tot període t, la funció d'utilitat de tot individu nascut en t és $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$. L'objectiu de tot individu en el seu segon període de vida és maximitzar el seu consum.

En el seu primer període t de vida cada individu lloga el seu treball a canvi d'una remuneració. Aquesta remuneració es pot emprar en consumir i en acumular capital. El capital que un individu va acumular en el període anterior no es pot consumir en el període present sinó que només serveix per a produir. Els individus vius en $t+1$ nascuts en t apleguen tot el seu capital i contracten treballadors per a produir el bé segons la funció de producció agregada $Y_{t+1} = K_{t+1} \cdot L_{t+1}$, on K_{t+1} és el capital total acumulat pels individus en el període anterior i L_{t+1} és la quantitat de treball oferta pels nascuts en $t+1$. La producció del bé feta en cada període es distribueix igualitàriament entre tots els individus vius en el període.

Determina l'equació d'acumulació de capital i identifica els estats estacionaris.

Exercici 17. Govern. Hi ha un únic bé que no es pot produir però sí acumular un període. Cada període neixen n individus idèntics que viuen dos períodes consecutius. Els individus només tenen dotació del bé en el seu primer període de vida: una unitat del bé. Les funcions d'utilitat d'un individu nascut en t són: en t, $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$; en $t+1$, $u_{t+1} = c_{t+1}$. La quantitat de bé que acumulen els individus té una taxa de depreciació del 25%: si un individu acumula k unitats del bé en t només disposarà en $t+1$ de $3 \cdot k/4$ unitats en $t+1$. Hi ha un govern que estableix un impost cada període de τ unitats del bé.

(i) El govern pot acumular l'impost sense patir cap depreciació. L'impost en t el paguen els que neixen en t. La recaptació del l'impost en t es distribueix igualitàriament en $t+1$ entre els individus que van néixer en t. Obté el volum de capital que acumula cada individu.

(ii) Obté el volum de capital que acumula cada individu si el govern distribueix la recaptació de l'impost feta en t de manera igualitària entre els individus vius en t nascuts en $t-1$. Quina de les dues polítiques maximitza el benestar dels individus?

(iii) En la situació descrita en (i), troba el valor de τ que maximitza la utilitat dels individus en el seu primer període de vida i el valor que maximitza la utilitat dels individus en el seu segon període.

Exercici 18. Famílies. Hi ha un únic bé, que es pot produir i acumular d'un període al següent. Els individus que neixen en el període t són tots idèntics i viuen dos períodes consecutius. La funció d'utilitat de tot individu que neix en el període t és $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^{\beta}$, on $\beta > 0$. Aquest mateix individu disposa d'una unitat de treball, que ofereix a canvi d'un salari ω_t. Aquest salari es pot emprar en consumir, en acumular capital i en tenir fills. El cost (en termes del bé) per fill és $\gamma > 0$.

En el segon període de vida els individus maximitzen el seu consum. El capital que un individu va acumular en el període anterior no es pot consumir en el període present sinó que només serveix per a produir. Cada individu nascut en t té accés, en el període $t+1$, a la funció de producció $y_{t+1} = (k_{t+1})^{\alpha} \cdot (n_{t+1})^{\beta}$, on k_{t+1} és el capital que l'individu va acumular en el període t i n_{t+1} és el nombre de fills que l'individu va tenir en el període t. Una interpretació és que els treballadors que un individu contracta són els seus fills. Per a tot període t, el pagament en salaris que fa cada individu i (nascut en el període anterior) és una proporció fixa ϕ de la producció que fa i mitjançant la funció de producció. Determina l'equació d'acumulació de capital i l'equació que estableix l'evolució del nombre de fills.

Exercici 19. Canvi de tecnologia. Hi ha un únic bé que es pot produir i acumular d'un període al següent. Cada període neixen n individus idèntics, que viuen dos períodes consecutius. La funció d'utilitat de tot individu que neix en el període t és $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^{\beta}$, on $\beta > 0$. Aquest mateix individu disposa d'una unitat de treball, que ofereix a canvi del salari competitiu. De gran, l'individu no té dotació de treball. En tot període senar t la funció de producció agregada és $Y_t = {K_t}^{1/3} \cdot {L_t}^{2/3}$, on K_t és el capital total acumulat pels individus en el període anterior i L_t és la quantitat de treball oferta pels nascuts en $t+1$. En tot període parell t la funció de producció agregada és $Y_t = {K_t}^{2/3} \cdot {L_t}^{1/3}$. Troba la trajectòria d'acumulació del capital i els estats estacionaris.

Exercici 20. Canvi de preferències. Hi ha un únic bé que es pot acumular d'un període al següent. La taxa de depreciació del bé que s'acumula és $0 < \delta < 1$. No hi ha producció. En un període senar neixen n individus idèntics que viuen dos períodes consecutius. En un període parell neixen $2 \cdot n$ individus idèntics que viuen dos períodes consecutius. La dotació de cada individu nascut en un període senar són dues unitats del bé. La dotació de cada individu nascut en un període parell és una unitat del bé. Cap individu gran no té dotació de treball. La funció d'utilitat de cada individu jove nascut en un període senar és $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$. La funció d'utilitat de cada individu jove nascut en un període parell és $u_t = ln\, c_t + \beta \cdot c_{t+1}$, on $\beta \neq 1$. Troba l'equilibri general de l'economia i la trajectòria d'acumulació de capital.

Exercici 21. Tema lliure. Construeix una economia que contingui algun element no considerat en els apunts o en els exercicis, proposa preguntes rellevants a respondre i troba les seves respostes.

Exercici 22. Dotació variable. Només hi ha un bé, que pot acumular-se un únic període en forma de capital. De cada unitat de bé acumulada com a capital en un període només la fracció $a < 1$ està disponible en el període següent. Tota generació està formada per n individus idèntics que viuen dos períodes consecutius. La funció d'utilitat de cada individu que és jove en el període t és $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^{\beta}$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove, c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran i $\beta > 0$ és una constant. En el període inicial, cada individu gran té una unitat de bé com a dotació (interpreta aquesta unitat de bé com el capital que hauria acumulat aquest individu si hagués estat jove). En la resta de períodes els grans no tenen dotació del bé.

(i) Suposa que cada individu jove té una unitat de bé de dotació i, a més, té com a dotació el capital que, de mitjana, van acumular els joves del període anterior. Determina quant capital acumula cada individu de jove, la trajectòria d'acumulació de l'estoc total de capital i els valors positius de l'estoc total de capital en tots els estats estacionaris.

(ii) Quina diferència provoca en els resultats d'(i) si els joves del període inicial només tenen una dotació d'una unitat del bé?

(iii) Torna a respondre les qüestions d'(i) si cada individu jove té com a dotació únicament la mitjana del capital que van acumular els joves del període anterior (per als joves del període inicial, suposa que la seva dotació coincideix amb la dotació dels grans del període inicial).

(iv) Considera novament la situació descrita en (i). Imagina que un dictador benevolent pogués escollir per compte dels individus el capital que acumulen. Torna a respondre les qüestions d'(i) si l'objectiu del dictador fos maximitzar la utilitat de cada jove en cada període.

(v) Torna a respondre a (iv) assumint la situació descrita en (iii) en comptes de la descrita en (i).

Exercici 23. Retribucions proporcionals. Només hi ha un bé, que pot acumular-se un únic període en forma de capital. Tota generació està formada per n individus idèntics que viuen dos períodes consecutius. La funció d'utilitat de cada individu que és jove en el període t és $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^{\beta}$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove, c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran i $\beta > 0$ és una constant. La funció de producció de l'economia en cada període t és $Y_t = {K_t}^{\alpha} \cdot {L_t}^{\theta}$, on K_t és l'estoc total de capital en el període t, L_t és el volum total de factor treball en t, i α i θ són constants positives. Cada jove té, com a dotació, x unitats de treball; de gran, no té cap dotació. Per a tot període t, el quocient entre la remuneració ω_t del treball i la remuneració σ_t del capital és una constant a; això és, per a tot t, $\omega_t = a \cdot \sigma_t$. A més, per a tot t, $Y_t = \sigma_t \cdot K_t + \omega_t \cdot L_t$.

(i) Determina quant capital acumula cada individu de jove, la trajectòria d'acumulació de l'estoc total de capital i els valors positius de l'estoc total de capital en tots els estats estacionaris.

(ii) Torna a respondre (i) si, en comptes de tenir $\omega_t = a \cdot \sigma_t$, es compleix, per a tot t, la condició $\sigma_t \cdot K_t = \omega_t \cdot L_t$.

(iii) Torna a respondre (i) si el capital té una taxa de depreciació δ: per cada unitat de bé acumulada en forma de capital en t per a ser emprada en $t + 1$, només està disponible per a emprar-la en la producció del bé la quantitat $1 - \delta$, on δ està entre 0 i 1.

Exercici 24. Producció afitada. Només hi ha un bé, que pot acumular-se un únic període en forma de capital. Tota generació està formada per n individus idèntics que viuen dos períodes consecutius. La funció d'utilitat de cada individu que és jove en el període t és $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^{\beta}$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove, c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran i $\beta > 0$ és una constant. La funció de producció de l'economia en cada període t és $Y_t = K_t \cdot (1 - K_t) \cdot L_t$, on K_t és l'estoc total de capital en el període t i L_t és el volum total de factor treball en t. Cada jove té, com a dotació, una unitat de treball; de gran, no té cap dotació. Per a tot període t, la remuneració ω_t del treball i la remuneració σ_t del capital satisfan les condicions $Y_t = \sigma_t \cdot K_t + \omega_t \cdot L_t$ i $\sigma_t \cdot K_t = \omega_t \cdot L_t$.

(i) Determina quant capital acumula cada individu de jove, la trajectòria d'acumulació de l'estoc total de capital i els valors positius de l'estoc total de capital en tots els estats estacionaris.

(ii) Torna a respondre (i) si, en comptes de tenir-se que $\sigma_t \cdot K_t = \omega_t \cdot L_t$ es té $\omega_t = a \cdot \sigma_t$.

Exercici 25. Tecnologies privatives. Només hi ha un bé, que es pot acumular. Cada generació està formada per dos grups, G1 i G2, cadascú format per n individus idèntics. Cada individu té, com a dotació, una unitat de treball de jove i cap de gran. Hom viu dos períodes consecutius. Per a G1, la funció d'utilitat de cada individu que és jove en el període t és $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^{\beta}$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove, c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran i $\beta > 0$ és una constant. Per a G2, la funció d'utilitat de cada individu que és jove en el període t és $u_t = (c_t)^{\beta} \cdot c_{t+1}$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove, c_{t+1} el consum que el mateix individu faria de gran i β és la mateixa constant que en les funcions dels membres de G1. Els membres de G1 tenen, col·lectivament, accés a la funció de producció $Y_{1t} = {K_{1t}}^{1/2} \cdot {L_t}^{1/2}$, on K_{1t} és l'estoc total de capital que acumulen els membres joves de G1 del període $t - 1$ i L_t és la quantitat total de treball de l'economia en t. Els membres de G2 tenen, col·lectivament, accés a la funció de producció $Y_{2t} = {K_{2t}}^{1/3} \cdot {L_t}^{2/3}$, on K_{2t} és l'estoc total de capital que acumulen els membres joves de G2 del període $t - 1$ i L_t és la quantitat total de treball de l'economia. Les remuneracions de treball i capital són iguals a les seves productivitats marginals.

(i) Troba el acumulat per cada individu jove de cada grup, la trajectòria d'acumulació de l'estoc total de capital i els valors positius de l'estoc total de capital en tots els estats estacionaris.

(ii) Torna a respondre (i) si la quantitat total de treball es distribueix entre les dues funcions de producció de manera que: (a) $Y_{1t} = {K_{1t}}^{1/2} \cdot {L_{1t}}^{1/2}$, on L_{1t} és la quantitat total de treball emprat en la funció de producció de G1 (L_{1t} pot incloure treball aportat per membres de G2); (b) $Y_{2t} = {K_{2t}}^{1/3} \cdot {L_{2t}}^{2/3}$, on L_{2t} és la quantitat total de treball emprat en la funció de producció de G2 (L_{2t} pot incloure treball aportat per membres de G1); i (c) la remuneració del treball és la mateixa segons les dues funcions de producció (condició d'arbitratge de salaris).

Exercici 26. Discriminació salarial. Només hi ha un bé, que es pot acumular. Cada generació està formada per dos grups, G1 i G2. Componen cada grup n individus idèntics. Cada individu té, com a dotació, una unitat de treball de jove i cap de gran. Hom viu dos períodes consecutius. Per a G1, la funció d'utilitat de cada individu jove en el període t és $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^\beta$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove, c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran i $\beta > 0$ és una constant. Per a G2, la funció d'utilitat de cada individu jove en el període t és $u_t = (c_t)^\beta \cdot c_{t+1}$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove, c_{t+1} el consum que el mateix individu faria de gran i β és la mateixa constant que en les funcions dels membres de G1. La funció de producció és $Y_t = {K_t}^\alpha \cdot {L_t}^{1-\alpha}$, on K_t és l'estoc total de capital que acumulen els joves del període $t-1$, L_t és la quantitat total de treball de l'economia en t i α és una constant entre 0 i 1. El treball es remunera segons la seva productivitat marginal. La resta de la producció remunera el factor treball, però de manera asimètrica: els membres de G1 reben el doble de salari que els membres de G2.

(i) Troba el acumulat per cada individu jove de cada grup, la trajectòria d'acumulació de l'estoc total de capital i els valors positius de l'estoc total de capital en tots els estats estacionaris.

(ii) Torna a respondre (i) si són els membres de G2 els que reben el doble de salari que els de G1.

Exercici 27. Fills o capital? Només hi ha un bé, que es pot acumular. Cada generació està constituïda per dos grups, G1 i G2. Cada individu té, com a dotació, dues unitats de bé de jove i cap de gran. Hom viu dos períodes consecutius. Per a G1, la funció d'utilitat de cada individu que és jove en el període t és $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^\beta$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove, c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran i $\beta > 0$ és una constant. Per a G2, la funció d'utilitat de cada individu que és jove en el període t és $u_t = (c_t)^\beta \cdot c_{t+1}$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove, c_{t+1} el consum que el mateix individu faria de gran i β és la mateixa constant que en les funcions dels membres de G1. Cada període, G1 està format per m individus idèntics. Els membres de G1 no poden tenir fills, però poden acumular el bé. Els membres de G2 no poden acumular el bé, però poden tenir fills. Acumular capital no té cost i cada unitat acumulada en un període està disponible per a ser consumida el període següent. Tenir fills té un cost de $\gamma > 0$ unitats de bé per fill. Cada fill transfereix una unitat de bé al seu progenitor quan aquest és gran (interpreta que, en el període que es tenen els fills, aquests no són agents econòmicament actius: és com si no existissin).

(i) Determina quant capital acumula cada individu de G1 de jove, la trajectòria d'acumulació de l'estoc total de capital i els valors positius de l'estoc total de capital en tots els estats estacionaris.

(ii) Determina quants fills té cada individu de G2 de jove, la trajectòria de la població de G2 i la població de G2 en tots els estats estacionaris.

Exercici 28. Vida llarga i vida curta. Només hi ha un bé, que es pot acumular. Cada generació està formada per dos grups, G1 i G2. G1 inclou n membres, els quals viuen dos períodes consecutius.

G2 està constituït per m membres, els quals viuen un període. Els membres de G1 no tenen dotació, ni de joves ni de grans. Els membres de G2 tenen com a dotació $x > 0$ unitats de treball, que ofereixen cada període a canvi d'un salari. La funció de producció és $Y_t = K_t{}^{\alpha} \cdot L_t{}^{1-\alpha}$, on K_t és l'estoc total de capital que acumulen els joves del període $t-1$, L_t és la quantitat total de treball de l'economia en t i α és una constant entre 0 i 1. El salari és la productivitat marginal del treball segons la funció de producció. La remuneració del capital es reparteix igualitàriament cada període entre tots els membres de G1. La funció d'utilitat de cada individu jove de G1 en el període t és $u_t = (c_t)^{\beta} \cdot c_{t+1}$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove, c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran i $\beta > 0$ és una constant.

Determina quant capital acumula cada individu de G1 de jove, la trajectòria d'acumulació de l'estoc total de capital i els valors positius de l'estoc total de capital en tots els estats estacionaris.

Exercici 29. Funció d'utilitat CES. Només hi ha un bé, que es pot acumular. Cada generació està formada per dos grups, G1 i G2, cadascun amb n membres, que viuen dos períodes consecutius. Els membres de G1 tenen com a dotació x unitats de treball de joves i cap de grans; els de G2, cap de joves i x de grans. La funció de producció és $Y_t = K_t{}^{\alpha} \cdot L_t{}^{1-\alpha}$, on K_t és l'estoc total de capital que acumulen els joves del període $t-1$, L_t és la quantitat total de treball de l'economia en t i α és una constant entre 0 i 1. La funció d'utilitat de tot individu jove en el període t és $u_t = \left(c_t{}^{\beta} + c_{t+1}{}^{\beta}\right)^{1/\beta}$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove, c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran i $\beta > 0$ és una constant.

Determina quant capital acumula cada individu de jove, la trajectòria d'acumulació de l'estoc total de capital i els valors positius de l'estoc total de capital en tots els estats estacionaris.

Exercici 30. Despesa pública i producció. Només hi ha un bé, que es pot acumular. Cada generació està formada per n membres. Cada individu viu dos períodes consecutius i té, com a dotació, una unitat de bé de jove i cap de gran. La funció d'utilitat de cada individu jove en el període t és $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^{\beta}$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove, c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran i $\beta > 0$ és una constant. La funció de producció és $Y_t = (\tau \cdot n) \cdot K_t{}^{\alpha} \cdot L_t{}^{1-\alpha}$, on K_t és l'estoc total de capital que acumulen els joves del període $t-1$, L_t és la quantitat total de treball de l'economia en t, τ és un impost que paga cada jove de cada període i α és una constant entre 0 i 1. El salari és la productivitat marginal del treball segons la funció de producció. El preu del capital és la productivitat marginal del treball segons la funció de producció.

(i) Calcula el capital que acumula cada individu de jove, la trajectòria d'acumulació de l'estoc total de capital i els valors positius de l'estoc total de capital en tots els estats estacionaris.

(ii) Respon a (i) si $\tau = 0$ (no es paguen imposts).

(iii) Respon a (i) si $\tau \cdot n$, en comptes de ser la recaptació d'un impost, s'obté amb una emissió de bons emesos pel govern cada període (i venciment al període següent) i el pagament dels bons al venciment es fa mitjançant el refinançament del deute amb més bons.

(iv) Respon a (i) si $\tau = 0$ (no es paguen imposts) i la funció de producció és una d'elasticitat de substitució constant (CES): $Y_t = (\alpha \cdot K_t{}^{\gamma} + (1-\alpha) \cdot L_t{}^{\gamma})^{1/\gamma}$.

Ejercicio 31. Ocio y producción. Hay n individuos idénticos. Viven dos períodos consecutivos. Cada individuo joven cuenta con una unidad de factor trabajo. Esta unidad puede emplearse en producir (a cambio de un salario) o en actividades de ocio. La función de utilidad de todo joven en t es $u_t = c_t \cdot c_{t+1} \cdot (1 - x_t)$, donde x_t representa la cantidad de factor trabajo que el individuo joven dedica a la producción. Todo individuo joven puede acumular su salario en forma de capital. Los ingresos de todos los individuos mayores provienen de la venta del capital acumulado en el período anterior. La función de producción agregada en todo t es $Y_t = K_t{}^{\alpha} \cdot L_t$, donde K_t és la cantidad total de capital disponible en t (acumulado en $t-1$), L_t es el volumen total de factor trabajo que los individuos emplean en producir y α es una constante positiva. Para todo t, $Y_t = \sigma_t \cdot K_t + \omega_t \cdot L_t$, donde σ_t es la remuneración por unidad de capital que reciben los que venden capital y ω_t es el salario que reciben los que proveen factor trabajo. Cada período el pago total $\omega_t \cdot L_t$ al factor L es el doble del pago total que recibe el factor K.

Determina qué fracción de su dotación de trabajo emplea en ocio un individuo joven, el volumen de capital que acumula cada individuo joven, la trayectoria de acumulación de la cantidad total de capital, los valores del capital total en todos los estados estacionarios y tanto la producción per cápita como la producción por unidad de trabajo en los estados estacionarios.

Ejercicio 32. Globalización. Hay dos economías, E1 y E2. En cada una hay n individuos idénticos. Cada uno de ellos vive dos períodos consecutivos. Todos los individuos cuentan con una unidad de trabajo cuando son jóvenes. Los jóvenes pueden acumular en forma de capital la remuneración por la venta de su trabajo. Este capital acumulado en un período sólo puede utilizarse (para producir) en el período siguiente. K_t es la cantidad total de capital disponible en t (acumulado en $t-1$) y L_t es el volumen total de trabajo. En E1 la función de utilidad de todo joven es $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^{\beta}$, donde $0 < \beta < 1$, y la función de producción es $Y_t = K_t{}^{1/2} \cdot L_t{}^{1/2}$. En E2 la función de utilidad de todo joven es $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$ y la función de producción es $Y_t = K_t \cdot L_t$. En E1 la retribución a los factores de producción es igual a la productividad marginal del factor. En E2 la retribución total que recibe el factor K es el doble de la retribución total que recibe L.

(i) Determina, para cada economía, el volumen de capital que acumula cada individuo joven, la trayectoria de acumulación de la cantidad total de capital, los valores del capital total en todos los estados estacionarios y la producción per cápita en los estados estacionarios.

(ii) Supón que los miembros de E1 pueden, de jóvenes, trabajar en E2, pero el capital que acumulan se empleará en E1. Calcula qué proporción de la población de E1 trabajaría en E2 en cada estado estacionario y compara los precios de los factores con los obtenidos en (i).

(iii) Supón que los miembros de E1 tienen que trabajar en E1 de jóvenes pero, de mayores, pueden vender su capital en E2. Calcula qué proporción de la población de E1 invertiría su capital en E2 en cada estado estacionario y compara los precios de los factores con los obtenidos en (i).

Ejercicio 33. Producción. Hay n individuos idénticos. Todo individuo vive dos períodos consecutivos. Existe un único bien, que puede acumularse de un período al siguiente. Cada individuo dispone de x unidades de trabajo cuando es joven, que se ofrecen a cambio de un salario. La función de utilidad de un individuo joven en t es $u_t = (c_t)^\beta \cdot c_{t+1}$, donde $\beta > 1$.

La función de producción agregada en todo t es $Y_t = A \cdot K_t{}^\alpha \cdot L_t{}^{1-\alpha}$, donde K_t es la cantidad total de capital disponible en t (acumulado en $t-1$), L_t es el número total de unidades de trabajo en t, A es una constante positiva y α es una constante entre cero y uno. K y L se remuneran según su productividad marginal.

(i) Calcula el volumen de capital que acumula cada individuo joven, la trayectoria de acumulación de la cantidad total de capital, los valores del capital total en todos los estados estacionarios y la producción per cápita en los estados estacionarios.

(ii) Explica y determina cómo afecta un cambio de A al volumen de capital que acumula cada individuo joven, a la trayectoria de acumulación de la cantidad total de capital, a los valores del capital total en todos los estados estacionarios y a la producción per cápita en los estados estacionarios.

Ejercicio 34. Brecha en la acumulación. Hay n individuos idénticos. Todo individuo vive dos períodos consecutivos. Existe un único bien. El bien puede acumularse, pero sólo puede utilizarse dos períodos después: la cantidad de bien que se acumule en el período t sólo es utilizable en $t+2$. Cada individuo joven dispone de una unidad de trabajo, que ofrece a cambio de un salario. Todo individuo joven en t tiene como función de utilidad $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$. La función de producción agregada en todo t es $Y_t = K_t{}^\alpha \cdot L_t{}^{1-\alpha}$, donde K_t es la cantidad total de capital disponible en t (acumulado en $t-2$), L_t es el número total de unidades de trabajo en t y α es una constante entre cero y uno. K y L se remuneran según su productividad marginal.

(i) Calcula el volumen de capital que acumula cada individuo joven, la trayectoria de acumulación de la cantidad total de capital, los valores del capital total en todos los estados estacionarios y la producción per cápita en los estados estacionarios.

(ii) Explica cómo un cambio de α afecta a las respuestas del apartado (i).