2. Un model de generacions encavalcades de recol·lecció (producció exògena)

2.1. Elements del model

El model representa una economia on: (i) els seus membres són recol·lectors-consumidors; (ii) únicament hi ha un bé; i (iii) el bé només es pot consumir o intercanviar.

• **Temps.** El temps es representa mitjançant períodes i es designa per t. L'economia s'inicia en el període $t = 1$ i continua sense fi passant pels períodes $t = 2$, $t = 3$, $t = 4$… La variable temps només serveix per a ordenar els estats en què successivament es troba l'economia.

• **Temps de vida dels consumidors.** Cada consumidor viu dos períodes consecutius. En el seu primer període el consumidor es considera jove; en el segon període, gran. En cada període t coexisteixen dues generacions de consumidors: els consumidors que neixen en t (que són joves en t i grans en $t + 1$) i els que moren en t (que van néixer en el període $t - 1$; els consumidors grans en $t = 1$ pot suposar-se que neixen grans). La Figura 1 mostra l'estructura demogràfica de l'economia. $N(t)$ designa la generació t: el conjunt de consumidors que neixen en el període t. El conjunt de consumidors en el període t és $N(t) + N(t - 1)$.

	període							
generació	1	2	3	…	t	$t+1$	$t+2$	…
0	***gran***							
1	***jove*** →	***gran***						
2		***jove*** →	***gran***					
…			…	…				
t				…	***gran***			
$t+1$					***jove*** →	***gran***		
$t+2$						***jove*** →	***gran***	
…							…	…

Figura 1. Estructura demogràfica de l'economia

• **Bé de consum.** Només hi ha un bé de consum (el mateix bé) cada període. El bé no es pot produir: apareix espontàniament cada període. El bé no es pot acumular d'un període al següent: tota quantitat de bé no consumida en un període desapareix al final del període. Per tant, cada unitat del bé només existeix un període. La quantitat total de bé disponible en el període t és $Y(t)$.

• **Distribució inicial del bé de consum.** Cada membre i de la generació t té $w_t^i(t)$ unitats del bé en el període t (la seva dotació —el que recol·lecta— quan és jove) i $w_t^i(t+1)$ unitats del bé de consum en el període $t + 1$ (la seva dotació de gran). La dotació total $Y(t)$ del bé es distribueix entre els consumidors vius en t, de manera que $\sum_{i\in N(t)} w_t^i(t) + \sum_{i\in N(t-1)} w_{t-1}^i(t) = Y(t)$.

• **Decisions dels consumidors.** Per a tot període t, cada consumidor jove en t decideix quantes unitats $c_t^i(t)$ del bé consumir de jove en t i quantes unitats $c_t^i(t+1)$ consumir de gran en $t + 1$. El parell $c_t^i = \left(c_t^i(t),\, c_t^i(t+1)\right)$ és el lot de consum del membre i de la generació $t > 0$. Per a tot membre i de la generació $t = 0$, c_0^i és el número $c_0^i(1)$. Una assignació de consum és una seqüència $\{c_t^i\}_{t\geq 0, i\in N(t)}$ de lots de consum dels membres de totes les generacions. Una assignació de consum $\{c_t^i\}$ és factible si, per a tot període t, $\sum_{i\in N(t)} c_t^i(t) + \sum_{i\in N(t-1)} c_{t-1}^i(t) \leq Y(t)$.

• **Preferències dels consumidors joves.** Tot consumidor jove i en t té definida una preferència sobre el conjunt de possibles lots de consum. Aquesta preferència és representable numèricament mitjançant una funció d'utilitat u_t^i definida sobre el conjunt de possibles lots de consum d'i. El valor $u_t^i\left(c_t^i(t), c_t^i(t+1)\right)$ és la utilitat del consumidor jove i en t quan i consumeix $c_t^i(t)$ unitats del bé en el període t (quan és jove) i consumeix $c_t^i(t+1)$ unitats en el període $t+1$ (quan és gran).

• **Preferències dels consumidors grans.** Quan és jove un consumidor decideix tant el seu consum de jove com de gran. Per tant, quan el consumidor es fa gran no té res a decidir: es limita a executar el pla de consum establert de jove. Per aquest motiu no cal especificar cap funció d'utilitat per als consumidors grans: si de cas, n'hi ha prou amb assumir que tot consumidor gran prefereix consumir més del bé que consumir-ne menys.

• **Mecanismes d'interacció.** Una manera de representar el funcionament de l'economia consisteix a especificar com interaccionen els consumidors i com aquesta interacció determina els resultats de l'economia. En particular, s'assumeix que el bé pot ser intercanviat en un mercat competitiu.

• **Mercat de préstecs.** Atès que en aquesta economia no hi ha res que explícitament faci de diner, l'intercanvi del bé es fa a canvi d'una promesa: qui rep bé en el període present es compromet a lliurar bé en el període següent. Per aquesta raó es pot interpretar que el mercat del bé és un mercat de préstecs (de crèdit, de dèbit o d'estalvi): la compra del bé es fa pagant amb un actiu financer, això és, amb la promesa de lliurar bé en el futur. La taxa d'interès real en t, designada per $r(t)$, representa tant el preu del bé com del préstec: prestar 1 unitat del bé en t implica rebre'n $1 + r(t)$ unitats del bé en $t + 1$. Equivalentment, qui rep 1 unitat del bé en t n'ha de pagar $1 + r(t)$ unitats del bé en $t + 1$. Per a simplificar la notació, en general es farà servir la taxa d'interès bruta $R(t) = 1 + r(t)$. Atès que s'assumeix que el mercat és competitiu, hom prendrà $R(t)$ com a donat.

La següent llista recapitula les variables principals del model i la notació.

• Període de temps i generació	t
• Nombre de membres de la generació t	$N(t)$
• Quantitat de bé disponible en el període t	$Y(t)$
• Consum en t del consumidor i de la generació t (i jove)	$c_t^i(t)$
• Consum en $t+1$ del consumidor i de la generació t (i gran)	$c_t^i(t+1)$
• Dotació en t del consumidor i de la generació t (i jove)	$w_t^i(t)$
• Dotació en $t+1$ del consumidor i de la generació t (i gran)	$w_t^i(t+1)$
• Funció d'utilitat en t del membre i de la generació t (i jove)	u_t^i

2.2. Anàlisi del model

• **No hi ha préstecs intergeneracionals.** En particular, els grans no participen en el mercat de préstecs. Aquesta conclusió se segueix de l'objectiu (tant de joves com de grans) de maximització de la utilitat derivada del consum. D'una banda, cap consumidor no té incentiu a prestar a un consumidor gran, atès que un consumidor gran no serà viu en el següent període per a retornar el deute. Així, els grans no formen part de la demanda de préstecs: ningú no està disposat a prestar-los-hi el bé. D'altra banda, un consumidor gran tampoc no té incentiu a prestar perquè la renúncia a consumir bé en el període present no es compensa amb la possibilitat de consumir-ne més bé en el període següent. En suma, els grans no formen part de l'oferta de préstecs. La conclusió final és que, per a tot t, en el mercat de préstecs del període t només hi participen els que són joves en t.

• **Oferta i demanda de préstecs.** Sigui $l^i(t)$ la quantitat de bé que un consumidor jove i presta o manlleva en el període t. Tenir $l^i(t) > 0$ vol dir que i fa de prestador del bé en t. Els prestadors en t estalvien el bé en t per a poder consumir en $t + 1$ més del que tindran. El cas $l^i(t) < 0$ significa que i és prestatari del bé en t. Els prestataris en t volen consumir en t més bé del que tenen en t. Les restriccions pressupostàries determinen quant es pot prestar o manllevar.

• **Restricció pressupostària de jove.** La restricció pressupostària d'un consumidor jove i de la generació t estableix que la quantitat de bé consumida $c_t^i(t)$ més la prestada $l_t^i(t)$ no pot superar la dotació del consumidor. Formalment,

$$c_t^i(t) + l^i(t) \leq w_t^i(t).$$

Donat que i maximitza la seva utilitat la restricció pressupostària pot ser assumida amb igualtat: $c_t^i(t) + l^i(t) = w_t^i(t)$. Per consegüent, $l^i(t) = w_t^i(t) - c_t^i(t)$. Això suggereix que $l^i(t)$ representa l'estalvi d'i: la part de la seva dotació que no i consumeix. Si $l^i(t) > 0$, llavors $w_t^i(t) > c_t^i(t)$ i l'estalvi és positiu; en aquest cas, i acumula poder de compra del bé per al següent període adquirint un actiu financer (la promesa de rebre bé en el següent període). Si $l^i(t) < 0$, llavors $w_t^i(t) < c_t^i(t)$ i l'estalvi és negatiu; en aquest cas, i empra poder de compra del futur en el present, endeutant-se i podent així consumir més que la seva dotació.

• **Restricció pressupostària de gran.** La restricció pressupostària d'un consumidor gran i membre de la generació t estableix que la quantitat de bé consumida en $t + 1$ no pot superar la dotació del consumidor gran en $t + 1$ més el rendiment del seu préstec en t. Això és,

$$c_t^i(t+1) \leq w_t^i(t+1) + R(t)l^i(t).$$

Se segueix de la presumpció que un consumidor gran prefereix consumir més a menys que la restricció serà, en la pràctica, una igualtat: $c_t^i(t+1) = w_t^i(t+1) + R(t)l^i(t)$. Si $l^i(t) > 0$, aleshores i va prestar de jove i rep $R(t)l^i(t)$ unitats del bé de gran. Si $l^i(t) < 0$, aleshores i va manllevar de jove i ha de pagar $R(t)l^i(t)$ quan és gran.

• **Restricció pressupostària vital.** Les dues restriccions pressupostàries, de jove i de gran, tenen un element comú: $l^i(t)$. Aïllant el terme en una restricció i susbtituint-lo en l'altra s'obté la restricció pressupostària vital (1) del consumidor i de la generació t, on $\frac{1}{R(t)}$ fa de factor de descompte que homogeneïtza les unitats del bé de diferents períodes. L'equació (1) diu que el valor descomptat del consum vital coincideix amb el valor descomptat de la dotació vital: en termes de valor, un consumidor només pot consumir el que té.

$$\underbrace{c_t^i(t) \quad + \quad \frac{c_t^i(t+1)}{R(t)}}_{\textbf{Valor present del consum de tota la vida}} \quad = \quad \underbrace{w_t^i(t) \quad + \quad \frac{w_t^i(t+1)}{R(t)}}_{\textbf{Valor present de la dotació de tota la vida}} \tag{1}$$

• **Un o dos béns?** Des del punt de vista d'un consumidor la diferent disponibilitat temporal del bé provoca que, en la pràctica, hi hagin dos béns: el bé en un període i el mateix bé en el període següent. Segons aquesta interpretació, és com si i triés la quantitat de dos béns: consum present $c_t^i(t)$ i consum futur $c_t^i(t+1)$. També és com si el preu del consum present s'hagués normalitzat a 1 i el preu del consum futur fos $\frac{1}{R(t)}$. Finalment, l'equivalent a la renda del consumidor seria el valor de la seva dotació $w_t^i = \left(w_t^i(t), w_t^i(t+1)\right)$ valorada segons els preus $\left(1, \frac{1}{R(t)}\right)$.

• **Problema de decisió d'un consumidor jove.** L'equació (1) determina el conjunt de lots de consum $\left(c_t^i(t), c_t^i(t+1)\right)$ que són factibles per al consumidor i de la generació t, donada la dotació $w_t^i = \left(w_t^i(t), w_t^i(t+1)\right)$ i la taxa d'interès bruta $R(t)$, i assumint que la dotació del bé només pot ser incrementada mitjançant el mercat de préstecs del bé. Establerta la restricció vital (1), el problema de decisió (2) de tot consumidor jove i de la generació t consisteix a

$$\begin{aligned} &maximitzar_{\{c_t^i(t),\, c_t^i(t+1)\}} \;\; u_t^i\left(c_t^i(t), c_t^i(t+1)\right) \\ &sotmès\ a \;\; c_t^i(t) + \frac{c_t^i(t+1)}{R(t)} = w_t^i(t) + \frac{w_t^i(t+1)}{R(t)}. \end{aligned} \tag{2}$$

• **Solució del problema de decisió d'un consumidor jove.** Emprant la tècnica dels multiplicadors de Lagrange, la solució del problema (2) pot obtenir-se resolent el problema (3). A més, s'assumeix que u_t^i satisfà propietats que garanteixen que les condicions necessàries (de primer ordre) per a resoldre (3) són també condicions suficients (per exemple, que les corbes d'indiferència d'u_t^i són estrictament convexes, contínues i decreixents).

$$\begin{aligned} maximitzar_{\{c_t^i(t),\, c_t^i(t+1)\}} \; L\left(c_t^i(t), c_t^i(t+1), \lambda\right) \; = \; u_t^i\left(c_t^i(t), c_t^i(t+1)\right) + \\ \lambda\left(w_t^i(t) + \frac{w_t^i(t+1)}{R(t)} - c_t^i(t) - \frac{c_t^i(t+1)}{R(t)}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

Les condicions de primer ordre per a resoldre (3) són (4), (5) i (6).

$$0 = \frac{\partial L}{\partial c_t^i(t)} = \frac{\partial u_t^i}{\partial c_t^i(t)} - \lambda \tag{4}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial c_t^i(t+1)} = \frac{\partial u_t^i}{\partial c_t^i(t+1)} - \frac{\lambda}{R(t)} \tag{5}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = w_t^i(t) + \frac{w_t^i(t+1)}{R(t)} - c_t^i(t) - \frac{c_t^i(t+1)}{R(t)} \tag{6}$$

La condició (6) és la restricció pressupostària (1). Aïllant λ en (4), $\lambda = \frac{\partial u_t^i}{\partial c_t^i(t)}$. Aïllant λ en (5), $\lambda = \frac{\partial u_t^i}{\partial c_t^i(t+1)} R(t)$. Com a resultat, $\frac{\partial u_t^i}{\partial c_t^i(t)} = \frac{\partial u_t^i}{\partial c_t^i(t+1)} R(t)$. Equivalentment,

$$R(t) = \frac{\partial u_t^i / \partial c_t^i(t)}{\partial u_t^i / \partial c_t^i(t+1)}\,. \tag{7}$$

El terme $\frac{\partial u_t^i}{\partial c_t^i(t)}$ és la utilitat marginal que el consumidor jove i obté del consum present $c_t^i(t)$. El terme $\frac{\partial u_t^i}{\partial c_t^i(t+1)}$ és la utilitat marginal que el consumidor jove i obté del consum futur $c_t^i(t+1)$. El seu quocient és la relació marginal de substitució $RMS_t^i = \frac{\partial u_t^i / \partial c_t^i(t)}{\partial u_t^i / \partial c_t^i(t+1)}$ del consumidor i. Geomètricament, RMS_t^i avaluada en el lot $c_t^i = \left(c_t^i(t), c_t^i(t+1)\right)$ és el pendent en valor absolut de la corba d'indiferència que conté el lot c_t^i. La interpretació estàndard és que RMS_t^i representa l'increment en $c_t^i(t+1)$ necessari per a mantenir la utilitat constant davant d'una reducció de $c_t^i(t)$.

• **Mètode alternatiu de solució.** El problema (2) també es pot resoldre inserint (1) en la funció d'utilitat. Aïllant $c_t^i(t+1)$ en (1), $c_t^i(t+1) = R(t)[w_t^i(t) - c_t^i(t)] + w_t^i(t+1)$. Un cop introduïda aquesta condició en u_t^i, (2) esdevé

$$max_{\{c_t^i(t)\}} \; u_t^i\left(c_t^i(t), R(t)[w_t^i(t) - c_t^i(t)] + w_t^i(t+1)\right).$$

Atès que $c_t^i(t+1) = R(t)[w_t^i(t) - c_t^i(t)] + w_t^i(t+1)$, el càlcul del diferencial total de la funció d'utilitat u_t^i seria

$$du_t^i = \frac{\partial u_t^i}{\partial c_t^i(t)} dc_t^i + \frac{\partial u_t^i}{\partial c_t^i(t+1)} \frac{\partial c_t^i(t+1)}{\partial c_t^i(t)} dc_t^i\,;$$

això és,

$$\frac{du_t^i}{dc_t^i(t)} = \frac{\partial u_t^i}{\partial c_t^i(t)} - \frac{\partial u_t^i}{\partial c_t^i(t+1)} R(t).$$

Maximitzar u_t^i requereix $\frac{du_t^i}{dc_t^i(t)} = 0$. D'aquí s'obté (7). Aquesta condició i $c_t^i(t+1) = R(t)[w_t^i(t) - c_t^i(t)] + w_t^i(t+1)$, que és la restricció pressupostària (1), solucionen el problema (2). Les solucions de (2) són les funcions de demanda d'i de consum present $c_t^i(t) = c(w_t^i(t), w_t^i(t+1), R(t))$ i de consum futur $c_t^i(t+1) = \tilde{c}(w_t^i(t), w_t^i(t+1), R(t))$. En general, ambdues funcions de demanda dependran de les dotacions $w_t^i(t)$ i $w_t^i(t+1)$ del consumidor, que són variables exògenes, i de la taxa d'interès bruta $R(t)$, que és una variable endògena.

• **Equilibri en el mercat de préstecs.** Sigui $O(t) = \{i \in N(t): l^i(t) > 0\}$ el total de prestadors (els oferents de préstecs) en el període t. Sigui $D(t) = \{i \in N(t): l^i(t) < 0\}$ el total de prestataris (els demandants de préstecs) en el període t. En equilibri, la suma del que ofereixen els prestadors és igual a la suma (en valor absolut) del que demanden els prestataris. Formalment, $\sum_{i \in O(t)} l^i(t) = \left| \sum_{i \in D(t)} l^i(t) \right|$. Expressant aquesta condició eliminant el valor absolut resulta $\sum_{i \in O(t)} l^i(t) + \sum_{i \in D(t)} l^i(t) = 0$. Atès que en el mercat de préstecs només hi participen els joves, $O(t) + D(t) = N(t)$. En resum, la condició d'equilibri en el mercat de préstecs estableix que

$$\sum_{i \in N(t)} l^i(t) = 0 \, . \tag{8}$$

Emprant (8) es calcula la taxa d'interès bruta $R(t)$ que equilibria el mercat de préstecs. Coneixent $R(t)$, les funcions de demanda $c(w_t^i(t), w_t^i(t+1), R(t))$ i $\tilde{c}(w_t^i(t), w_t^i(t+1), R(t))$ del consum del bé obtingudes en solucionar (2) determinen el lot de consum triat pel consumidor donades les seves dotacions i la taxa d'interès d'equilibri derivada de (8).

• **Equilibri general competitiu.** Un equilibri general competitiu és una seqüència $\{\hat{R}(t)\}_{t \geq 1}$ de taxes d'interès brutes i una assignació de consum $\{\hat{c}_t^i\}_{t \geq 0, i \in N(t)}$ que satisfan les condicions **E1** i **E2**.

E1. Per a tot període $t \geq 1$ i consumidor $i \in N(t)$, $\hat{c}_t^i$ maximitza u_t^i donat $\hat{R}(t)$ i les dotacions w_t^i d'i (per a $t = 0$, $\hat{c}_t^i$ és la dotació del consumidor gran i); equivalentment, $\hat{c}_t^i$ soluciona (2) i, en conseqüència, s'obté combinant (1) i (7).

E2. Per a tot període $t \geq 1$, $\hat{R}(t)$ equilibra el mercat de préstecs; això és, $\hat{R}(t)$ satisfà (8).

• **Funcions d'estalvi.** Estalvi és la dotació no consumida. Els únics consumidors que poden tenir interès en estalviar són els joves. De la restricció pressupostària d'un jove i en resulta $l^i(t) = w_t^i(t) - c_t^i(t)$. Per tant, l'estalvi $s^i(t)$ d'un consumidor jove i coincideix amb els seus préstecs: $s^i(t) = w_t^i(t) - c_t^i(t)$. En aquest model, l'única manera d'estalviar és fent préstecs del bé. Si $c_t^i(t) = c(w_t^i(t), w_t^i(t+1), R))$ és la funció de demanda de consum present obtinguda en solucionar (2), aleshores es pot definir una funció d'estalvi $s^i(t) = s(w_t^i(t), w_t^i(t+1), R(t))$ que depèn de les dotacions i la taxa d'interès. Atès que (8) n'expressa la condició d'equilibri del mercat de préstecs i que, per a tot jove i, $s^i(t) = l^i(t)$, se segueix que (8) pot ser reemplaçada per (9).

$$\sum_{i \in N(t)} s^i(t) = 0 \, . \tag{9}$$

• **El mercat de préstecs del bé com a mercat de consum del bé.** L'únic mercat d'aquesta economia, el mercat de préstecs, es pot reinterpretar com a "mercat del bé". El mercat de préstecs és intertemporal, perquè vincula una transferència del bé en un període (de prestador a prestatari) amb una transferència en el període següent (de prestatari a prestador). El mercat del bé és intratemporal (només involucra un període) i connecta l'oferta del bé (la dotació total de bé en l'economia en un període) amb la demanda de consum del bé (el consum total del bé en el mateix període). La condició d'equilibri d'aquest mercat seria

$$\sum_{i\in N(t)} w_t^i(t) + \sum_{i\in N(t-1)} w_{t-1}^i(t) = \sum_{i\in N(t)} c_t^i(t) + \sum_{i\in N(t-1)} c_{t-1}^i(t)\,, \tag{10}$$

on $Y(t) = \sum_{i\in N(t)} w_t^i(t) + \sum_{i\in N(t-1)} w_{t-1}^i(t)$ representa la quantitat total de bé existent en el període t (l'oferta agregada o recol·lecció total del bé en t) i $\sum_{i\in N(t)} c_t^i(t) + \sum_{i\in N(t-1)} c_{t-1}^i(t)$ representa la quantitat total que es vol consumir del bé en el període t (la demanda agregada del bé en t).

• **Les condicions** (9) **i** (10) **són equivalents.** Reordenant (10),

$$\sum_{i\in N(t)}(w_t^i(t) - c_t^i(t)) + \sum_{i\in N(t-1)} w_{t-1}^i(t) = \sum_{i\in N(t-1)} c_{t-1}^i(t).$$

Equivalentment,

$$\sum_{i\in N(t)} s^i(t) + \sum_{i\in N(t-1)} w_{t-1}^i(t) = \sum_{i\in N(t-1)} c_{t-1}^i(t).$$

La condició anterior és la mateixa que (9) si $\sum_{i\in N(t-1)} w_{t-1}^i(t) = \sum_{i\in N(t-1)} c_{t-1}^i(t)$. Aquesta igualtat diu que el que consumeixen els grans en el període t coincideix amb el que els grans, com a grup, tenen com a dotació en t. La igualtat es compleix per la hipòtesi que tots els consumidors intenten obtenir la màxima utilitat del seu consum present i futur. La demostració és per contradicció: suposar que la igualtat no se satisfà condueix a una contradicció.

Si $\sum_{i\in N(t-1)} w_{t-1}^i(t) > \sum_{i\in N(t-1)} c_{t-1}^i(t)$ fos el cas, aleshores el conjunt de grans en t n'estaria consumint menys que la seva dotació total. En particular, algú gran n'estaria consumint menys del que té. En aquest cas aquell gran augmentaria la seva utilitat consumint tot el que té. Per tant, la desigualtat $\sum_{i\in N(t-1)} w_{t-1}^i(t) > \sum_{i\in N(t-1)} c_{t-1}^i(t)$ implica que algun consumidor gran no maximitza la seva utilitat, conclusió que contradiu la hipòtesi que tots els consumidors maximitzen utilitat.

Si $\sum_{i\in N(t-1)} w_{t-1}^i(t) < \sum_{i\in N(t-1)} c_{t-1}^i(t)$ fos el cas, llavors el conjunt de grans en t n'estaria consumint més que la seva dotació total. Això requereix que algun gran rebi dotació d'algun jove. Però en fer un préstec a un gran aquest jove estaria malbaratant utilitat, atès que estaria renunciant a consumir bé en el període present a canvi de no res en el següent període (perquè en el següent període el consumidor gran no hi serà per a retornar el deute contret amb el jove). D'aquesta manera, la desigualtat $\sum_{i\in N(t-1)} w_{t-1}^i(t) < \sum_{i\in N(t-1)} c_{t-1}^i(t)$ és inconsistent amb la hipòtesi que tots els consumidors maximitzen utilitat.

• **L'assignació de consum d'un equilibri general no necessàriament és Paretoeficient.** Una assignació de consum $C = \{c_t^i\}_{t\geq 0, i\in N(t)}$ és Paretoeficient si no hi ha cap altra assignació de consum $\tilde{C} = \{\tilde{c}_t^i\}_{t\geq 0, i\in N(t)}$ tal que:

(i) per a algun $t \geq 1$ i algun $i \in N(t)$, $u_t^i(\tilde{c}_t^i) > u_t^i(c_t^i)$; i

(ii) per a tot $t \geq 1$ i tot $i \in N(t)$, $u_t^i(\tilde{c}_t^i) \geq u_t^i(c_t^i)$.

Que l'assignació C sigui Paretoeficient vol dir que no hi ha cap altra assignació $\tilde{C}$ on algun consumidor tingui més utilitat que a C i cap consumidor no en tinc menys que a C. El següent exemple demostra que una assignació d'equilibri no és necessàriament Paretoeficient.

2.3. Exemple

• **Descripció de l'economia**. Cada generació neixen dos grups de consumidors, G1 i G2, cadascú amb 50 membres. Tots ells tenen la mateixa funció d'utilitat: tot consumidor jove i en t té la funció d'utilitat $u_t^i = c_t^i(t) \cdot c_t^i(t+1)$. La dotació de cada membre G1 de és (1, 0): una unitat de jove i cap de gran. La dotació de cada membre G2 de és (2, 2): dues unitats de jove i dues de gran.

• **Convenció.** En endavant, la coma volada ($'$) indicarà una variable referida al moment $t+1$ i la seva absència significarà que la variable corresponent es refereix al període t. A més, en general s'obviarà el superíndex que identifica a un consumidor. Seguint aquesta convenció, la funció d'utilitat $u_t^i = c_t^i(t) \cdot c_t^i(t+1)$ s'expressa $u = c \cdot c'$. El número 1 identificarà un membre del grup G1 i el 2 a un membre de G2.

• **Càlcul de les funcions de demanda de consum dels membres de** G1. La restricció pressupostària de cada membre jove del grup 1 és $c_1 + l_1 = 1$. La restricció pressupostària de cada membre gran del grup 1 és $c_1' = Rl_1$. La restricció pressupostària vital de cada membre del grup 1 és $c_1 + \frac{c_1'}{R} = 1$. Per a maximitzar u_1, cal que $\frac{\partial u_1/\partial c_1}{\partial u_1/\partial c_1'} = R$. Com a resultat, $c_1 = \frac{c_1'}{R}$. Emprant la restricció pressupostària vital, resulta $c_1 + c_1 = 1$. La funció de demanda de consum de cada membre jove de G1 és $c_1 = \frac{1}{2}$.

• **Càlcul de les funcions de demanda de consum dels membres de** G2. La restricció pressupostària de cada membre jove del grup 2 és $c_2 + l_2 = 2$. La restricció pressupostària de cada membre gran del grup 2 és $c_2' = Rl_2 + 2$. La restricció pressupostària vital de cada membre del grup 2 és $c_2 + \frac{c_2'}{R} = 2 + \frac{2}{R}$. Per a maximitzar u_2, cal que $\frac{\partial u_2/\partial c_2}{\partial u_2/\partial c_2'} = R$. Així, $c_2 = \frac{c_2'}{R}$. Fent servir la restricció pressupostària vital, s'obté $c_2 + c_2 = 2 + \frac{2}{R}$. La funció de demanda de consum de cada membre jove de G2 és $c_2 = 1 + \frac{1}{R}$.

• **Càlcul de la funció d'estalvi agregat.** La funció d'estalvi de cada membre de G1 és $s_1 = w_1 - c_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. L'estalvi agregat del grup G1 és $S_1 = 50 \cdot s_1 = 25$. La funció d'estalvi de cada membre de G2 és $s_2 = w_2 - c_2 = 2 - \left(1 + \frac{1}{R}\right) = 1 - \frac{1}{R}$. L'estalvi agregat del grup G2 és $S_2 = 50 \cdot s_2 = 50 - \frac{50}{R}$. L'estalvi agregat és $S = S_1 + S_2 = 75 - \frac{50}{R}$.

• **Càlcul de la taxa d'interès d'equilibri.** La condició d'equilibri és $S = 0$. Se segueix de $75 - \frac{50}{R} = 0$ que $R = \frac{2}{3}$. Substituint a les funcions de consum dels joves, $c_1 = \frac{1}{2}$ i $c_2 = \frac{5}{2}$. Sabent que $c_1 = \frac{c_1'}{R}$, $c_1' = \frac{1}{3}$. Sabent que $c_2 = \frac{c_2'}{R}$, $c_2' = \frac{5}{3}$. Per tant, el total de joves de G1 consumeixen 25 (quan la seva dotació total és 50) i el total de joves de G2 consumeixen 125 (quan la seva dotació total és 100). Les 25 unitats que estalvien (presten) els membres de G1 són les 25 unitats addicionals que consumeixen (manlleven) els membres de G2. Com era d'esperar, el consum total dels grans ($\frac{50}{3}$ dels de G1 i $\frac{250}{3}$ dels de G2) coincideix amb la dotació total dels grans (100).

• **Paretoineficiència de l'assignació de consum d'equilibri.** L'assignació de consum d'equilibri C és aquella on, per a cada període, el lot de consum de cada membre de G1 és $(c_1, c_1') = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ (cada un d'ells estalvia $s_1 = \frac{1}{2}$) i el lot de consum de cada membre de G2 és $(c_2, c_2') = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{3}\right)$ (cada un estalvia $s_2 = -\frac{1}{2}$). Per a demostrar que C no és Paretoeficient, sigui $\tilde{C}$ l'assignació de consum definida a partir de C fent que, en cada període, cada consumidor jove lliuri $\varepsilon > 0$ unitats del bé a un consumidor gran diferent. Això fa que, en $\tilde{C}$, el lot de consum de cada membre de G1 sigui $(\tilde{c}_1, \tilde{c}_1') = \left(\frac{1}{2} - \varepsilon,\ \frac{1}{3} + \varepsilon\right)$ i el lot de consum de cada membre de G2 sigui $(\tilde{c}_2, \tilde{c}_2') = \left(\frac{5}{2} - \varepsilon,\ \frac{5}{3} + \varepsilon\right)$.

En C, la utilitat cada període és $u_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ per a cada membre de G1 i $u_2\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{3}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{25}{6}$ per a cada membre de G2. En $\tilde{C}$, la utilitat cada període és $u_1\left(\frac{1}{2} - \varepsilon,\ \frac{1}{3} + \varepsilon\right) = \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \cdot \left(\frac{1}{3} + \varepsilon\right) = \frac{1}{6} + \varepsilon \cdot \left(\frac{1}{6} - \varepsilon\right)$ per a cada membre de G1 i $u_2\left(\frac{5}{2} - \varepsilon,\ \frac{5}{3} + \varepsilon\right) = \left(\frac{5}{2} - \varepsilon\right) \cdot \left(\frac{5}{3} + \varepsilon\right) = \frac{25}{6} + \varepsilon \cdot \left(\frac{5}{6} - \varepsilon\right)$ per a cada membre de G2.

En conseqüència, per a què la utilitat de cada membre de G1 sigui superior en $\tilde{C}$ que en C cal que $\varepsilon \cdot \left(\frac{1}{6} - \varepsilon\right) > 0$; això és, cal que $\varepsilon < \frac{1}{6}$. De manera anàloga, per a què la utilitat de cada membre de G2 sigui superior en $\tilde{C}$ que en C cal que $\varepsilon \cdot \left(\frac{5}{6} - \varepsilon\right) > 0$; és a dir, cal que $\varepsilon < \frac{5}{6}$. En suma, la transferència de joves a grans de qualsevol $\varepsilon < \frac{1}{6}$ fa que tots els joves tinguin més utilitat en $\tilde{C}$ que en C.

En relació amb els grans, en C, en cada període un membre gran de G1 consumeix $\frac{1}{3}$ unitats del bé, en tant que, en $\tilde{C}$, consumeix $\frac{1}{3} + \varepsilon$. Respecte dels membres grans de G2, cadascun d'ells consumeix $\frac{5}{3}$ en C i $\frac{5}{3} + \varepsilon$ en $\tilde{C}$. La conclusió és que tots els consumidors grans consumeixen més (i, així, obtenen més utilitat) en $\tilde{C}$ que en C. Tot plegat demostra que C no es Paretoeficient.

• **Desigualtat.** <u>L'existència del mercat de préstecs augmenta la utilitat de tothom en relació amb la utilitat sense mercat</u>. En concret, sense mercat, la utilitat de cada membre jove de G1 seria la utilitat de la seva dotació: $u_1(1{,}0) = 1 \cdot 0 = 0$. Amb mercat, la utilitat puja a $u_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Una lliçó paral·lela és que el mercat de préstecs incrementa la desigualtat en la distribució del bé. Sense mercat, cada membre de G1 podia consumir, al llarg de la seva vida, $1 + 0 = 1$ unitats del bé; amb el mercat, només consumeix $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. Això implica que cada membre de G2 té accés a més quantitat de bé al llarg de la seva vida amb mercat que sense.

• **Com és que, en l'equilibri, la taxa d'interès neta és negativa?** La taxa bruta d'equilibri $R = \frac{2}{3}$ implica una taxa neta negativa, $r = -\frac{1}{3}$. Aquest resultat deriva del fet que <u>l'autopréstec és impossible</u>: atès que el bé no es pot acumular, l'única alternativa a no consumir-lo és permetre que algú altre el consumeixi. Això fa que la taxa bruta R pugui ser inferior a 1 (es presta una unitat avui i se'n rep menys d'una demà), però no inferior a zero. Tenir $R < 0$ vol dir que un prestador lliura bé avui i en torna a lliurar demà: el prestador paga per prestar. En aquest cas, el prestador té una alternativa millor: no prestar el bé i consumir-lo.

Exercicis

Exercici 1. Consum i estalvi. Troba les funcions de consum i estalvi si:

(i) $u_t^i\left(c_t^i(t), c_t^i(t+1)\right) = c_t^i(t)^{\alpha} \cdot c_t^i(t+1)^{\beta}$, on α i β són constants positives;

(ii) $u_t^i\left(c_t^i(t), c_t^i(t+1)\right) = c_t^i(t)^{\alpha} + c_t^i(t+1)^{\beta}$, on α i β són constants positives;

Exercici 2. Equilibri. Determina l'equilibri general competitiu en els dos casos (i) i (ii) de l'Exercici 1 si, de grans, els consumidors no tenen cap dotació, de joves tenen una unitat i hi ha 100 consumidors en cada generació.

Exercici 3. Equilibri i Paretoeficiència. Verifica que l'equilibri general competitiu de la següent economia no és Paretoeficient:

(i) cada generació està formada per 100 consumidors;

(ii) la dotació de cada consumidor jove és 2;

(iii) la dotació de cada consumidor gran és 1; i

(iv) per a tot i i t, $u_t^i\left(c_t^i(t), c_t^i(t+1)\right) = c_t^i(t) \cdot c_t^i(t+1)$.

Exercici 4. Equilibri amb grups de mida diferent. (i) Determina l'equilibri general competitiu de la següent economia. Cada generació neixen dos grups de consumidors, G1 i G2. G1 té m membres. G2 té n membres. La dotació vital de cada membre de G1 és $(w, 0)$. La dotació vital de cada membre de G1 és $(0, w)$. Tots els consumidors tenen la mateixa funció d'utilitat $u_t^i = c_t^i(t) \cdot c_t^i(t+1)$. (ii) Determina com afecta a la taxa d'interès d'equilibri variacions en w, m i n.

Exercici 5. Equilibri amb lladregots i escurabosses. Cada generació té 100 membres: 80 (els pobres) amb dotació $(1, 0)$ i els altres 20 (els rics) amb dotació $(4, 2)$. Tots els consumidors joves de totes les generacions tenen la funció d'utilitat $u_t^i = c_t^i(t) \cdot c_t^i(t+1)$.

(i) Troba el vector de consum d'equilibri de cada consumidor jove.

(ii) Per a cada període, determina el vector de consum agregat d'equilibri del total de rics (i també del total de pobres) del període.

Per a tot t, cada jove pobre en t roba b unitats del grup de rics en t. El robatori agregat puja a $80 \cdot b$: $3 \cdot b$ unitats es prenen de cada jove ric i b unitats es prenen de cada ric gran. En conseqüència, el total apropiat pels joves pobres $(80 \cdot b)$ coincideix amb el que perden els rics $(20 \cdot 3 \cdot b + 20 \cdot b)$.

(iii) Torna a respondre a (i) i a (ii) si $b = 1$. Causa el robatori un augment o una reducció de la desigualtat?

Exercici 6. Imposts. Cada generació està formada per tres grups: 1, 2 i 3. Cada grup està format per n individus idèntics. La funció d'utilitat de cada jove és $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove i c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran. La funció d'utilitat de cada individu gran coincideix amb el seu consum. Cada individu del grup 1 té, com a dotació, zero unitats del bé de jove i una unitat del bé de gran. Cada individu del grup 2 té, com a dotació, una unitat del bé de jove i zero unitats del bé de gran. Cada individu del grup 3 no té dotació del bé, ni de jove ni de gran. Una llei sagrada establerta en temps immemorial dicta que, cada període, els membres joves dels grups 1 i 2 han de pagar τ unitats del bé (aquest import és el mateix cada període i suficientment petit per a què tothom el pugui pagar). La llei mana que la recaptació total de l'impost en el període sigui distribuïda, en el mateix període, de manera igualitària entre els membres del grup 3, però no especifica si els destinataris de la transferència han de ser el joves del grup 3 o els grans del grup 3.

(i) Obté l'equilibri general, i la utilitat de cada individu, en aquests dos casos: cas 1, la transferència es fa als joves del grup 3; cas 2, la transferència es fa als grans del grup 3.

(ii) Jutja quina opció consideres més recomanable.

Exercici 7. Cicles. En l'economia només hi ha un bé, que no pot acumular-se en els períodes senars però sí en els períodes parells. No hi ha producció però el bé disponible en els períodes parells pot acumular-se indefinidament. Els individus viuen dos períodes consecutius. En els períodes senars, cada generació jove està formada per dos grups, G1 i G2. Cada grup està constituït per n individus idèntics. En els períodes parells hi ha un únic grup G d'individus, integrat per n membres.

Cada individu de G2 té, com a dotació, zero unitats del bé de jove i una unitat del bé de gran. Cada individu de G1 i de G té, com a dotació, una unitat del bé de jove i zero unitats del bé de gran. La funció d'utilitat de cada individu jove en el moment t és $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove i c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran. La funció d'utilitat de cada individu gran coincideix amb el consum que fa de gran.

Cada unitat acumulada per un individu jove en un període parell es transforma en $1 + d$ unitats en el següent període. Del total $1 + d$, quan l'individu és gran, només pot consumir una unitat. Les altres d unitats es reparteixen igualitàriament entre els individus joves del període senar.

Calcula l'equilibri general en cada període si els joves dels períodes senars mai no acumulen el capital que reben dels joves dels períodes parells.

Exercici 8. Igualtat. En l'economia només hi ha un bé, que no pot acumular-se d'un període cap a un altre ni produir-se. Cada generació està formada per dos grups: G1 (format per n individus idèntics) i G2 (format per m individus idèntics). La funció d'utilitat de cada jove de G1 és $u_t = (c_t)^{\beta} \cdot c_{t+1}$ i la de cada jove de G2 és $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^{\beta}$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove i c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran. Cada individu de G2 té, com a dotació, zero unitats del bé de jove i una unitat del bé de gran. Cada individu de G1 té, com a dotació, una unitat del bé de jove i zero unitats del bé de gran.

(i) Determina l'equilibri general i l'efecte sobre la utilitat d'un membre de G1 d'un augment d'n.

(ii) Calcula la quantitat τ del bé que cada jove de G1 ha de rebre o pagar de manera que, quan l'import $n \cdot \tau$ es distribueix igualitàriament entre els joves de G2, la utilitat de tots els joves de tots dos grups és la mateixa en l'equilibri general.

Exercici 9. Comerç internacional. Hi ha dues economies, E1 i E2. Hi ha dos béns, C i D. En cada economia i cada període hi ha el mateix nombre n d'individus idèntics, que viuen un període. Cada individu disposa d'una unitat de treball, que pot destinar a produir qualssevol dels dos béns. En E1: (i) la quantitat l de treball pot produir $\alpha \cdot l$ unitats del bé C, on $\alpha > 1$; i (ii) la quantitat l de treball pot produir l unitats del bé D. En E2: (i) la quantitat l de treball pot produir $\alpha \cdot l$ unitats del bé D (el paràmetre α és el mateix que el d'E1); i (ii) la quantitat l de treball pot produir l unitats del bé C. L'economia E1 pot exportar bé C a l'economia E2 a canvi de bé D (per tant, E2 pot exportar D a canvi de C). La relació d'intercanvi és d'u a u: una unitat de C s'intercanvia sempre per una unitat de D.

La funció d'utilitat de cada membre d'E1 és $u_{1t} = c_{1t} \cdot \left(d_{1t} + \tilde{d}_t\right)^2$, on c_{1t} és el consum que l'individu fa del bé C (per força, produït a E1), d_{1t} és el consum que ell mateix fa del bé D produït a E1 i $\tilde{d}_t$ és el consum que l'individu fa del bé D importat d'E2. La funció d'utilitat de cada membre d'E2 és $u_{2t} = (c_{2t} + \tilde{c}_t)^2 \cdot d_{2t}$, on d_{2t} és el consum que l'individu fa del bé D (per força, produït a E2), c_{2t} és el consum que ell mateix fa del bé C produït a E2 i $\tilde{c}_t$ és el consum que l'individu fa del bé C importat d'E1.

(i) Calcula l'equilibri general de cada economia si les economies són autàrquiques.

(ii) Calcula l'equilibri general de cada economia si hi ha comerç internacional i avalua en quina economia els individus guanyen proporcionalment més en el trànsit d'una economia tancada a una d'oberta.

Exercici 10. Altruïsme. Hi ha un únic bé que es pot acumular d'un període al següent. No hi ha producció. Cada període neixen n individus idèntics que viuen dos períodes consecutius. Els individus de cada període es numeren de l'1 a l'n, de manera que l'individu amb número i que neix en el període t és el pare de l'individu amb número i que neix en el període $t+1$ (i aquest segon és el fill del primer).

La funció d'utilitat de l'individu i que neix en el període t és $u_t = c_t \cdot c_{t+1} \cdot (\tilde{c}_{t+1})^2$, on $\tilde{c}_{t+1}$ representa el consum del fill d'i. Cada individu que neix en el període t té una dotació de w unitats del bé, que pot dedicar a consumir-les o acumular-les per al següent període. La quantitat del bé acumulada en t té dos usos en $t+1$: una part la consumeix el propi individu i l'altra la transfereix al seu fill. La funció d'utilitat en el període $t+1$ de tot individu nascut en t és $u_{t+1} = (c_{t+1})^2 \cdot \tilde{c}_{t+1}$. Tot individu viu en el període t que no ha nascut en aquest període no té dotació de bé. Assumint que cada individu pren decisions amb l'objectiu de maximitzar la seva funció d'utilitat, determina quina quantitat de bé rep cada fill del seu pare.

Exercici 11. Tres grups. Hi ha un únic bé que no es pot produir ni acumular. Hi ha tres grups d'individus G1, G2 i G3, cadascun format per n membres. Cada individu viu dos períodes consecutius. Per a tot període t, la funció d'utilitat de tot individu nascut en t és $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$. La dotació de bé de cada membre de G1 és $(2, 0)$, on 2 és la dotació quan neix i 0 és la dotació en el següent període. La dotació de bé de cada membre de G2 és $(0, 2)$ i la de cada membre de G3 és $(1, 1)$ on 1 és la dotació de gran. L'estructura demogràfica de l'economia es repeteix cada tres períodes. En el període inicial neixen els membres els grups G1 i G2. En el següent període neixen els dels grups G2 i G3. En el darrer període del cicle neixen els dels grups G3 i G1. Calcula l'equilibri general de l'economia de cada període.

Exercici 12. Tres períodes. Hi ha un únic bé que no es pot produir ni acumular. Cada període neixen n individus idèntics que viuen tres períodes consecutius. Els individus només tenen dotació del bé en el seu segon període de vida: una unitat del bé. Les funcions d'utilitat d'un individu nascut en t són: en t, $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$; en $t+1$, $u_{t+1} = c_{t+1} \cdot c_{t+2}$; i en $t+2$, $u_{t+2} = c_{t+2}$. Calcula l'equilibri general de l'economia de cada període.

Exercici 13. Transferència òptima. Cada generació neixen dos grups de consumidors, G1 i G2, cadascú amb 50 membres. Tots ells tenen la mateixa funció d'utilitat: tot consumidor jove i en t té la funció d'utilitat $u_t^i = c_t^i(t) \cdot c_t^i(t+1)$. La dotació de cada membre G1 de és (1, 0): una unitat de jove i cap de gran. La dotació de cada membre G2 de és (2, 2): dues unitats de jove i dues de gran. Partint de l'assignació de consum d'equilibri, tots els consumidors acorden que cada jove s'emparellarà amb un consumidor gran i li transferirà τ unitats de bé. Calcula el valor de τ que maximitza la suma de la utilitat d'un jove de G1 amb la utilitat d'un jove de G2.

Exercici 14. Mort sobtada. Només hi ha un bé, que no es pot acumular. Cada generació està formada per dos grups, G1 i G2. G1 està constituït per n individus idèntics i G2 per m individus idèntics. La dotació de cada membre de G1 és una unitat del bé de jove i cap de gran. La dotació de cada membre de G2 és una unitat del bé de gran i cap de jove. Els membres de G1 viuen dos períodes consecutius. Cada membre de G2 té una probabilitat $0 < p < 1$ d'arribar a un segon període de vida (per tant, té la probabilitat $1 - p$ de no viure el segon període). Per a G1, la funció d'utilitat de cada individu que és jove en el període t és $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^\beta$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove, c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran i $\beta > 0$ és una constant. Per a G2, la funció d'utilitat de cada individu que és jove en el període t és $u_t = (c_t)^\beta \cdot p \cdot c_{t+1}$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove, c_{t+1} el consum que el mateix individu faria de gran i β és la mateixa constant que en les funcions dels membres de G1.

Calcula l'equilibri general i determina com afecta la probabilitat p a la taxa d'interès d'equilibri.

Exercici 15. Deute exterior. Només hi ha un bé, que no es pot acumular. Cada generació està formada per dos grups, G1 i G2. G1 està constituït per n individus idèntics i G2 per m individus idèntics. La dotació de cada membre de G1 és de dues unitats del bé de jove i de $-x$ unitats de gran (es pot entendre aquest valor negatiu com un deute a pagar a algú de fora de l'economia). La dotació de cada membre de G2 és una unitat del bé de gran i cap de jove. Hom viu dos períodes consecutius. Per a G1, la funció d'utilitat de cada individu que és jove en el període t és $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^{\beta}$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove, c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran i $\beta > 0$ és una constant. Per a G2, la funció d'utilitat de cada individu que és jove en el període t és $u_t = (c_t)^{\beta} \cdot c_{t+1}$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove, c_{t+1} el consum que el mateix individu faria de gran i β és la mateixa constant que amb els membres de G1.

Calcula l'equilibri general i determina com afecta el deute x a la taxa d'interès d'equilibri.

Exercici 16. Transferències. Només hi ha un bé, que no es pot acumular. Cada generació està formada per n membres iguals. Cada individu viu dos períodes consecutius i té una dotació de dues unitats de bé de jove i cap de gran. La funció d'utilitat de cada individu jove en el període t és $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^{\beta}$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove, c_{t+1} el consum que l'individu farà de gran i $\beta > 0$ és una constant.

(i) Calcula la transferència τ (la mateixa cada període) que un jove ha de fer a un individu gran del mateix període per a maximitzar la utilitat del jove.

(ii) Suposa que la utilitat d'un individu gran coincideix amb el seu consum. Calcula la transferència τ (la mateixa cada període) que un jove ha de fer a un individu gran del mateix període per a maximitzar la suma de la utilitat d'un jove i la d'un individu gran del mateix període.

(iii) Torna a respondre (i) si la la funció d'utilitat de cada jove és $u_t = (c_t - \tau) \cdot (c_{t+1})^{\beta}$. Dóna una interpretació a aquesta funció d'utilitat.

Exercici 17. Tres períodes. Tots els individus són idèntics i viuen tres períodes consecutius: jove, adult i ancià. La funció d'utilitat d'un jove en t és $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^{\beta}$, donde $0 < \beta < 1$. La seva funció d'adult, en $t+1$, és $u_{t+1} = c_{t+1} \cdot c_{t+2}$. I la d'ancià, en $t+2$, és $u_{t+2} = c_{t+2}$. Hom té, com a dotació, $\omega > 0$ unitats de bé en el segon període de vida i cap unitat en la resta de períodes.

Calcula l'equilibri general i determina com un canvi en ω afecta la taxa d'interès d'equilibri.

Exercici 18. Enveja. Hi ha dos grups, G1 amb n membres i G2 amb m. Hom viu dos períodes consecutius. Cada membre de G1 té una dotació d'una unitat del bé quan és jove i cap de gran. Cada membre de G2 té una dotació d'una unitat del bé quan és gran i cap de jove. La funció d'utilitat de tot membre jove en t de G1 és $u_{1t} = (c_{1t}/c_{2t})^{\beta} \cdot c_{1\,t+1}$, on c_{2t} és el consum en t d'un membre jove de G2. La funció d'utilitat de tot membre jove en t de G2 és $u_{2t} = c_{2t} \cdot (c_{2\,t+1}/c_{1\,t+1})^{\beta}$, on $c_{1\,t+1}$ és el consum en $t+1$ d'un membre gran de G1. En ambdós casos, $0 < \beta < 1$.

(i) Calcula l'equilibri general.

(ii) Calcula l'equilibri general si els joves de G1 tenen en compte a l'hora de decidir sobre el seu consum present i futur que el seu consum present c_{1t} afecta al consum c_{2t} de tot jove de G2 (per tant, considera que c_{2t} és funció de c_{1t}).

Exercici 19. Emigració. Hay dos economías, A y B, y un único bien, que no puede acumularse. Todos los individuos viven dos períodos. Todos los miembros jóvenes de A tienen como función de utilidad $u_t = (c_t)^\beta \cdot c_{t+1}$. Todos los miembros jóvenes en t de B tienen como función de utilidad $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^\beta$. En ambos casos β es una constante positiva. En cada economía hay dos grupos, G1 y G2. G1 en A tiene m miembros. G2 en A tiene n miembros. G1 en B tiene n miembros. G2 en B tiene m miembros. En ambas economías cada miembro de G1 tiene la dotación (1, 0): una unidad de bien de joven y ninguna de mayor. Cada miembro de G2 tiene la dotación (0, 1).

(i) Calcula el equilibrio general competitivo de cada economía.

(ii) Calcula el equilibrio general competitivo de cada economía si sólo los que, en equilibrio, son prestatarios (oferta de préstamos) pueden decidir en qué economía realizar préstamos.

(ii) Calcula el equilibrio general competitivo de cada economía si sólo los que, en equilibrio, son prestamistas (demanda de préstamos) pueden decidir en qué economía solicitar préstamos.

Exercici 20. A dos i a tres períodes. Hay un único bien, que no puede acumularse. Cada período hay dos grupos, G1 y G2. Cada grupo cuenta con n miembros. Cada miembro de G1 vive tres períodos consecutivos y tiene la dotación (1, 0, 0): una unidad de bien en su primer período de vida y ninguna en los demás. Cada miembro de G2 vive dos períodos consecutivos y tiene la dotación (1, 0). Todos los miembros jóvenes de G2 en t tienen la función de utilidad $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$. Todo miembro de G1 tiene, en su primer período de vida t, la función de utilidad $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$ y, en su segundo período $t+1$, la función de utilidad $u_{t+1} = c_{t+1} \cdot c_{t+2}$.

Calcula el equilibrio general competitivo de la economía.

Exercici 21. Quartet i duet. Hay un único bien, que no puede acumularse. Cada período nacen n individuos idénticos. La estructura demográfica se repite cada tres períodos. Los nacidos en el primer período viven cuatro períodos consecutivos y tienen dotación (1, 0, 1, 0) del bien. Los nacidos en el segundo y tercer períodos viven dos períodos consecutivos y tienen la dotación (1, 0). A todos los individuos que no están en su último período de vida sólo les interesa su consumo presente c_t y su consumo inmediatamente futuro c_{t+1} según la la función de utilidad $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$.

(i) Calcula el equilibrio general competitivo de la economía.

(ii) Calcula el equilibrio general competitivo de la economía si los nacidos en el tercer período tienen la dotación (0, 1) en lugar de (1, 0).

Exercici 22. Tercet i duet. Hay un único bien, que no puede acumularse. Cada período nacen n individuos idénticos. Los nacidos en un período par viven tres períodos consecutivos y tienen dotación ($2w$, 0, w) del bien. Los nacidos en un período impar viven dos períodos consecutivos y tienen la dotación ($3w$, 0). Los jóvenes nacidos en un período par t tienen la función de utilidad

$u_t = c_t \cdot c_{t+1} \cdot c_{t+2}$; la función de utilidad de estos individuos en $t + 1$ es $u_{t+1} = c_{t+1} \cdot c_{t+2}$. La función de utilidad de un joven nacido en t es $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^\beta$, donde β es una constante positiva.

Calcula el equilibrio general competitivo de la economía.

Exercici 23. Lleure. Hay un único bien, que no puede acumularse pero que debe recolectarse empleando el factor trabajo. Todos los individuos viven dos períodos. Hay dos grupos, G1 y G2. Cada miembro de G1 dispone de una unidad de trabajo de joven y ninguna de mayor. Cada miembro de G2 dispone de dos unidades de trabajo de mayor y ninguna de joven. Cada individuo decide qué parte de su dotación de factor trabajo dedica a recolectar el bien y qué parte dedica a ocio. Todos los miembros jóvenes de G1 en t tienen la función de utilidad $u_t = c_t \cdot c_{t+1} \cdot a_t$, donde a_t es la cantidad de trabajo dedicada a ocio. Todos los miembros jóvenes de G2 en t tienen la función de utilidad $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$. Todos los miembros mayores de G2 en t tienen la función de utilidad $u_t = c_t \cdot a_t$, donde c_t es el consumo de mayor y es a_t es la cantidad de trabajo que el mayor dedica a ocio. La productividad recolectora de cada miembro de G1 son λ unidades de bien por cada unidad de trabajo empleada en recolectar. La productividad de cada miembro de G2 es una unidad de bien por unidad de trabajo empleada.

Calcula el equilibrio general competitivo de la economía y qué porcentaje de su dotación de trabajo dedica cada individuo, en equilibrio, al ocio.

Exercici 24. Donació. Hay un único bien, que no puede acumularse. Cada período hay dos grupos, G1 (con n integrantes) y G2 (con m integrantes). Cada miembro de G1 tiene la dotación (2, 0). Cada miembro de G2 tiene la dotación (1, 2). La función de utilidad de un joven de G2 nacido en t es $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^\beta$. La función de utilidad de un joven de G1 nacido en t es $u_t = (c_t)^\beta \cdot c_{t+1}$. En los dos casos β es una constante positiva. La función de utilidad en $t + 1$ de un individuo de G1 nacido en t es $u_{t+1} = c_{t+1} \cdot d_{t+1}$, donde d_{t+1} es la parte del bien de que dispone el individuo que dona a otros miembros de la economía.

En cada caso, calcula el equilibrio general competitivo si reciben la donación: (a) los jóvenes de G1; (b) los jóvenes de G2; (c) los mayores de G2 (la donación total que realizan los mayores de G1 se distribuye igualitariamente entre los miembros de los grupos de cada caso).

Exercici 25. Donacions. El enunciado es el mismo que el del ejercicio 24 con dos salvedades: (i) la donación se realiza simultániamente a los mayores G2 y a los jóvenes de G1; y (ii) la función de utilidad de un mayor de G1 es $u_{t+1} = c_{t+1} \cdot d_{t+1} \cdot e_{t+1}$, donde d_{t+1} es la donación realizada a los mayores de G2 y e_{t+1} es la donación realizada a los jóvenes de G1.

Exercici 26. Fills i préstecs. Hay un único bien, que no puede acumularse. Cada período hay dos grupos, G1 y G2, ambos inicialmente con m integrantes. Cada miembro de G1 tiene la dotación (0, 0). Cada miembro de G2 tiene la dotación (w, 0). Cada miembro de G2 tiene un descendiente, por lo que G2 tiene cada período el mismo número de miembros. La función de utilidad de un joven de G2 nacido en t es $u_t = (c_t)^\beta \cdot c_{t+1}$, siendo β una constante positiva. La función de utilidad de un joven de G1 nacido en t es $u_t = c_t \cdot c_{t+1} \cdot n_{t+1}$, donde n_{t+1} es el número de hijos que el joven decide tener en t y que serán jóvenes (y miembros de G1) en $t+1$. El coste (en términos del bien) de tener cada hijo es la constante $\gamma > 0$. Cada mayor recibe de cada hijo que ha tenido de joven la cantidad p de bien.

Determina la taxa de interés de equilibrio cada período y el número de individuos cada período.

Exercici 27. Consum mínim. Hay un único bien, que no puede acumularse. Cada período hay dos grupos, G1 y G2, ambos con n integrantes. Cada miembro de G1 tiene la dotación $(w, 0)$. Cada miembro de G2 tiene la dotación $(0, 2w)$. La función de utilidad de un joven de G2 nacido en t es $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$. La función de utilidad de un joven de G1 nacido en t es $u_t = (c_t - d) \cdot (c_{t+1} - d)$, donde d es una constante positiva.

Interpreta d, calcula el equilibrio general competitivo y especifica el valor mínimo de w que asegura la existencia de equilibrio.

Exercici 28. Creixement. Hay un único bien, que no puede acumularse. Cada período hay dos grupos, G1 y G2, con n y m integrantes, respectivamente. Cada miembro de G1 tiene la dotación $(w, 0)$. Cada miembro de G2 tiene la dotación $(0, w)$. La función de utilidad de todo joven nacido en t es $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$.

(i) Calcula el equilibrio general competitivo.

(ii) Responde a (i) en cada uno de los siguientes casos: (a) cada período G1 tiene un miembro más; (b) cada período G2 tiene un miembro menos; (c) w crece a una tasa constante $g > 0$.

Exercici 29. Utilitat especial. Hay un único bien, que no puede acumularse. Cada período hay dos grupos, G1 y G2, ambos con n integrantes. Cada miembro de G1 tiene la dotación $(3w, 0)$. Cada miembro de G2 tiene la dotación $(w, 2w)$. La función de utilidad de todo joven de G1 nacido en t es $u_t = (c_t + c_{t+1})^2$. La función de utilidad de todo joven de G2 nacido en t es $u_t = c_t \cdot (c_t + c_{t+1})^2$.

Calcula el equilibrio general competitivo. [Función de utilidad CES: $u_t = ({c_t}^r + {c_{t+1}}^r)^{1/r}$]

Exercici 30. Empatia i antipatia. Hay un único bien, que no puede acumularse. Cada período hay dos grupos, G1 y G2, ambos con n integrantes. Cada miembro de G1 tiene la dotación $(2w, 2w)$. Cada miembro de G2 tiene la dotación (w, w). La función de utilidad de todo joven de G1 nacido en t es $u_t = c_t \cdot c_{t+1} \cdot d_{t+1}$, donde c_t es su consumo de joven, c_{t+1} es su consumo de mayor y d_{t+1} es el consumo de un mayor del grupo G2. La función de utilidad de todo joven de G2 nacido en t es $u_t = c_t \cdot c_{t+1}/d_t$, donde c_t es su consumo de joven, c_{t+1} es su consumo de mayor y d_t es el consumo de un joven del grupo G1.

(i) Interpreta las funciones de utilidad.

(ii) Calcula el equilibrio general competitivo y explica si algún individuo i puede incidir sobre el consumo de otros individuos que afecta a la utilidad de i.

Exercici 31. Tres períodes. Hay un único bien, que no puede acumularse. Cada período nacen n individuos idénticos, que viven tres períodos consecutivos. En el período inicial de vida t la función de utilidad es $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$. En el $t + 1$, la función de utilidad es $u_{t+1} = c_{t+1} \cdot c_{t+2}$.

(i) Calcula el equilibrio general competitivo si la dotación es: (a) (1, 1, 1); (b) (2, 0, 1).

(ii) Explica si hay algún mecanismo de intercambio voluntario, alternativo al mercado de préstamos privados, que pueda mejorar la utilidad de los individuos.

Exercici 32. Tres períodes. Hay un único bien, que no puede acumularse. Cada período nacen n individuos idénticos, que viven tres períodos consecutivos. En el período inicial de vida t la función de utilidad es $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$. En el período siguiente $t + 1$ la función de utilidad es $u_{t+1} = c_{t+1} \cdot c_{t+2}$. Calcula el equilibrio general competitivo con dotación (0, 0, w) [y $u_t(t + 2) = c_{t+2}(t + 2) \cdot u_t(t + 2)$].

Exercici 33. Expansió demogràfica. Hay un único bien, que no puede acumularse. Cada período hay dos grupos, G1 y G2. Todos los individuos viven dos períodos. La función de utilidad de todo joven en t es $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$. La dotación de cada miembro de G1 es (1, 0); la de cada uno de G2 es (0, 1). Inicialmente, cada grupo tiene n miembros. En cada período impar G1 incrementa su tamaño en n individuos. En cada período impar G2 incrementa su tamaño en n individuos.

Calcula el equilibrio general competitivo y determina si hay algún valor al que converge el tipo de interés.

Exercici 34. Probabilitats. Hay un único bien, que no puede acumularse. Cada período hay dos grupos, G1 y G2, cada uno con n miembros. Todos los individuos viven dos períodos. En G2, la función de utilidad de todo joven en t es $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$ y la dotación es (1, 1). En G1: (a) con probabilidad p, la función de utilidad de todo joven en t es $u_t = (c_t)^\beta \cdot c_{t+1}$ y su dotación es (1, 0); y (b) con probabilidad $1 - p$, la función es $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^\beta$ y la dotación (0, 1). Calcula el equilibrio general competitivo.

Exercici 35. Creixement. Hay un único bien, que no puede acumularse. Cada período hay dos grupos, G1 y G2, cada uno con n miembros. Todos los individuos viven dos períodos. La función de utilidad de todo joven en t es $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$. Los miembros de G1 sólo tienen dotación de jóvenes; los de G2, sólo tienen dotación de mayores. El valor inicial de la dotación es w y cada período crece a la tasa $g > 0$. Así, por ejemplo, en el período inicial, los miembros de G1 tienen dotación $(w, 0)$ y los de G2, $(0, w(1 + g))$.

Calcula el equilibrio general competitivo e interpreta la fórmula que defina el tipo de interés.