Resposta a la pregunta 23 de l’examen de 26 de novembre de 2018

23. Dos i quatre períodes. Hi ha un únic bé que no es pot produir ni acumular. Hi ha dos grups d’individus G1 i G2, cadascun format per n membres. Cada membre de G1 viu dos períodes consecutius i cada membre de G2 en viu quatre de consecutius. Per a tot individu, en el darrer període de vida, la utilitat coincideix amb el consum. En la resta de períodes, és el producte del consum del període amb el consum del període següent. La dotació de bé de cada membre de G1 és $(0, 1)$ i la de cada membre de G2 és $(1, 0, 1, 0)$, on el primer (segon, tercer, quart) component de cada vector és la dotació en el primer (segon, tercer, quart) període de vida.

(i) Calcula l’equilibri general competitiu.

(ii) Calcula l’equilibri general competitiu si la utilitat cada període és el producte de tots els consums presents i futurs.

Resposta a l’apartat (i)

L’anàlisi es pot fer (i) suposant que no hi ha període inicial i que, per tant, l’estructura demogràfica és la mateixa cada període o (ii) suposant que hi ha un període inicial en el qual tothom està vivint el seu primer període de vida. A continuació s’adopta l’opció (i) i es deixa com a exercici determinar quina diferència faria optar per (ii).

Si l’estructura demogràfica de cada període és la mateixa, llavors cada període hi ha 6 categories d’individus: els joves de G1 en el període; el grans de G1 en el període; i 4 categories de membres de G2 (aquells per als quals el període considerat és el seu primer període, aquells per als qui n’és el segon, aquells per als qui n’és el tercer i aquells per als qui n’és el quart).

● Anàlisi dels membres de G1

Els individus grans de G1 són irrellevants per a determinar la taxa d’interès R del període, atès que l’únic que faran en el període és consumir la quantitat $c_1{}'$ de bé que, quan eren joves, van planejar de consumir.

Pel que fa als joves de G1, el seu objectiu és de

$$\text{maximitzar } u_1 = c_1 \cdot c_1{}'$$

sotmès a les restriccions pressupostàries

$$\begin{aligned} \text{de jove}: \;\; & c_1 + l_1 = 0 \\ \text{de gran}: \;\; & c_1' = 1 + R \cdot l_1. \end{aligned}$$

De la primera restricció, $c_1 = -l_1$. Inserint-la, juntament amb la segona, a la funció d’utilitat, en resulta el problema

$$\text{maximitzar } u_1 = -l_1 \cdot (1 + R \cdot l_1).$$

respecte d'l_1

La condició de primer ordre $\frac{du_1}{dl_1} = 0$ estableix que

$$-1 - 2 \cdot R \cdot l_1 = 0.$$

D'aquí la funció de demanda de préstecs d'un membre jove de G1 és

$$l_1 = -\frac{1}{2 \cdot R}.$$

● **Anàlisi dels membres de G2**

Els individus de G2 que, en el període considerat, viuen el seu quart període són irrellevants per a determinar la taxa d'interès R del període, atès que l'únic que faran en el període és consumir la quantitat c_2''' de bé que van planejar de consumir en el seu tercer període de vida. En essència, els membres de G2 en el seu tercer i quart període són com els membres de G1 en el seu primer i segon períodes de vida.

Per a establir el problema de decisió dels membres de G2 en el seu tercer període, és convenient començar pels períodes anteriors.

Els membres de G2 en el seu primer període de vida proven de

$$\text{maximitzar } u_2 = c_2 \cdot \; c_2'$$

sotmès a les restriccions pressupostàries

$$\text{de primer període}: \; c_2 + l_2 = 1$$
$$\text{de segon període}: \; c_2' + l_2' = R \cdot l_2.$$

Els membres de G2 en el seu segon període de vida proven de

$$\text{maximitzar } u_2' = c_2' \cdot \; c_2''$$

sotmès a les restriccions pressupostàries

$$\text{de segon període}: \; c_2' + l_2' = R \cdot l_2$$
$$\text{de tercer període}: \; c_2'' + l_2'' = 1 + R' \cdot l_2'.$$

Finalment, els membres de G2 en el seu tercer període de vida proven de

$$\text{maximitzar } u_2'' = c_2'' \cdot \; c_2'''$$

sotmès a les restriccions pressupostàries

$$\text{de tercer període}: \; c_2'' + l_2'' = 1 + R' \cdot l_2'$$
$$\text{de quart període}: \; c_2''' \; = R'' \cdot l_2''.$$

Introduint les restriccions en la funció objectiu, el problema de maximització d'un membre de G2 en el tercer període és

$$\text{maximitzar } u_2'' = (1 + R' \cdot l_2' - l_2'') \cdot (R'' \cdot l_2'').$$
$$\text{respecte d'}l_2''$$

Atès que $\frac{du_2''}{dl_2''} = 0$ equival a $(1 + R' \cdot l_2') - 2 \cdot R'' \cdot l_2'' = 0$, es conclou que la decisió sobre préstecs en el tercer període queda definidida per la funció

$$l_2'' = \frac{1 + R' \cdot l_2'}{2} \tag{1}$$

on R' i l_2' són termes coneguts (paràmetres) en el període on es decideix l_2''.

Considerant ara el problema de maximització d'un membre de G2 en el segon període, es tracta de

$$\text{maximitzar } u_2' = (R \cdot l_2 - l_2') \cdot (1 + R' \cdot l_2' - l_2'').$$
$$\text{respecte d'}l_2'$$

Fent servir (1), el problema esdevé

$$\text{maximitzar } u_2' = (R \cdot l_2 - l_2') \cdot \left(1 + R' \cdot l_2' - \tfrac{1 + R' \cdot l_2'}{2}\right)$$
$$\text{respecte d'}l_2'$$

o

$$\text{maximitzar } u_2' = (R \cdot l_2 - l_2') \cdot \left(\tfrac{1 + R' \cdot l_2'}{2}\right).$$
$$\text{respecte d'}l_2'$$

Com que $\frac{du_2'}{dl_2'} = 0$ equival a $\frac{1}{2}(R \cdot R' \cdot l_2 - 1 - 2 \cdot R' \cdot l_2') = 0$, es conclou que la decisió sobre préstecs en el segon període queda definidida per la funció

$$l_2' = \frac{R \cdot R' \cdot l_2 - 1}{2 \cdot R'} = \frac{1}{2} \cdot \left(R \cdot l_2 - \frac{1}{R'}\right).$$

on R i l_2 són termes coneguts (paràmetres) en el període on es decideix l_2'.

Finalment, el problema de maximització d'un membre de G2 en el primer període és

$$\text{maximitzar } u_2 = (1 - l_2) \cdot (R \cdot l_2 - \ l_2').$$
$$\text{respecte d'}l_2$$

Sabent que

$$l_2' = R \cdot l_2 - \frac{1}{R'}$$

es tracta de

$$\text{maximitzar } u_2 = (1 - l_2) \cdot \left(R \cdot l_2 - \tfrac{1}{2} \cdot R \cdot l_2 + \tfrac{1}{2 \cdot R'}\right);$$
$$\text{respecte d'}l_2$$

això és,

$$\text{maximitzar } u_2 = (1 - l_2) \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \left(R \cdot l_2 + \tfrac{1}{R'}\right).$$
$$\text{respecte d'}l_2$$

Atès que $\frac{du_2}{dl_2} = 0$ equival a $\frac{1}{2}\left(R - R \cdot l_2 - \frac{1}{R'}\right) = 0$, es conclou que la decisió sobre préstecs en el primer període queda definidida per la funció

$$l_2 = \frac{R - 1/R'}{2 \cdot R} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{R \cdot R'}\right).$$

Emprant aquest resultat,

$$l_2' = \frac{1}{2} \cdot \left(R \cdot l_2 - \frac{1}{R'}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(R - \frac{1}{R'}\right) - \frac{1}{R'}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(R - \frac{3}{R'}\right)$$

i, així,

$$l_2'' = \frac{1}{2} \cdot (1 + R' \cdot l_2') = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + R' \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(R - \frac{3}{R'}\right)\right) = \frac{1}{8} \cdot (1 + R \cdot R').$$

• Equilibri en el mercat de préstecs

En el mercat de préstecs s'hi trobaran tots els individus que no estan en el seu darrer període de vida. La condició d'equilibri és:

$$n \cdot l_1 + n \cdot l_2 + n \cdot l_2' + n \cdot l_2'' = 0.$$

En conseqüència, cancel·lant n,

$$-\frac{1}{2 \cdot R} \ + \ \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{R \cdot R'}\right) \ + \ \frac{1}{4} \cdot \left(R - \frac{3}{R'}\right) \ + \ \frac{1}{8} \cdot (1 + R \cdot R') = 0.$$

Invocant la hipòtesi que l'estructura demogràfica de cada període és la mateixa es pot justificar que els problemes de decisió de cada període són equivalents: el que farà un individu en el seu període k de vida és el mateix que el que fa ara un individu que viu en el seu període k.

Aquest argument justificaria fer $R = R'$. Per tant, la condició d'equilibri esdevé

$$-\frac{1}{2\cdot R} + \frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{R^2}\right) + \frac{1}{4}\cdot\left(R-\frac{3}{R}\right) + \frac{1}{8}\cdot(1+R^2) = 0$$

o, simplificant,

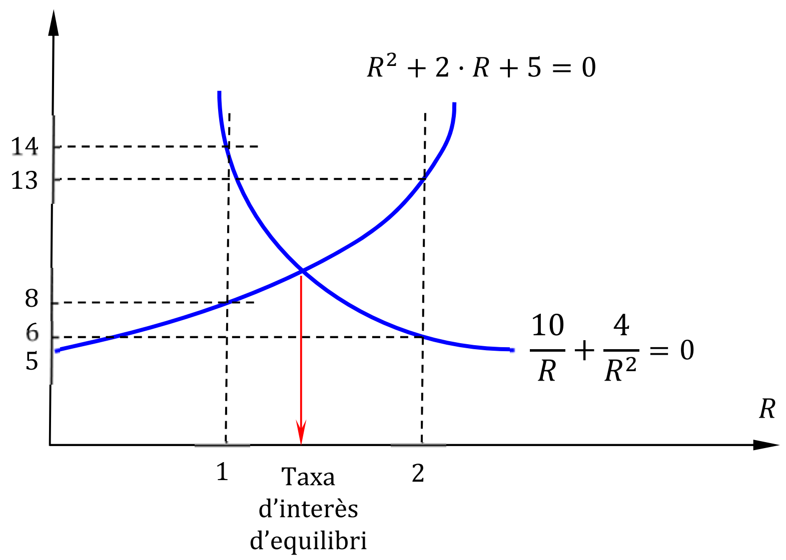
$$R^4 + 2\cdot R^3 + 5\cdot R^2 - 10\cdot R - 4 = 0. \tag{2}$$

Equivalentment,

$$R^2 + 2\cdot R + 5 = \frac{10}{R} + \frac{4}{R^2}.$$

La utilitat de la darrera expressió és que les solucions de l'equació (2) són, geomètricament, els punts d'intersecció, en el quadrant positiu, entre les corbes $R^2 + 2\cdot R + 5 = 0$ i $\frac{10}{R} + \frac{4}{R^2} = 0$.

En el quadrant positiu, la corba $R^2 + 2\cdot R + 5 = 0$ arrenca del punt (0,5) i creix. En el mateix quadrant, $\frac{10}{R} + \frac{4}{R^2} = 0$ és una funció decreixent que tendeix a infinit quan R tendeix cap a zero i tendeix cap a zero quan R tendeix cap a infinit. En suma, les dues corbes només es creuen un cop. En concret, és fàcil comprovar gràficament que el valor d'R on s'intersecten les corbes es troba entre 1 i 2 (de fet, entre 1 i 3/2); vegeu la representació gràfica a continuació.



Resposta a l'apartat (ii)

Anàlisi de la decisió dels membres de G1 és la mateixa que en l'apartat (i). Pel que fa als membres de G2, tot membre de G2 en el seu primer període de vida tracta de

$$\text{maximitzar } u_2 = c_2 \cdot c_2' \cdot c_2'' \cdot c_2'''$$

sotmès a les restriccions pressupostàries

$$\begin{aligned} \text{de primer període: } & c_2 + l_2 = 1 \\ \text{de segon període: } & c_2' + l_2' = R \cdot l_2 \\ \text{de tercer període: } & c_2'' + l_2'' = 1 + R' \cdot l_2' \\ \text{de quart període: } & c_2''' = R'' \cdot l_2''. \end{aligned}$$

En el seu <u>segon període</u> de vida, tot membre de G2 provaria de

$$\text{maximitzar } u_2' = c_2' \cdot c_2'' \cdot c_2'''$$

sotmès a les restriccions pressupostàries

$$\begin{aligned} \text{de segon període: } & c_2' + l_2' = R \cdot l_2 \\ \text{de tercer període: } & c_2'' + l_2'' = 1 + R' \cdot l_2' \\ \text{de quart període: } & c_2''' = R'' \cdot l_2''. \end{aligned}$$

En el seu <u>tercer període</u> de vida, tot membre de G2 provaria de

$$\text{maximitzar } u_2'' = c_2'' \cdot c_2'''$$

sotmès a les restriccions pressupostàries

$$\begin{aligned} \text{de tercer període: } & c_2'' + l_2'' = 1 + R' \cdot l_2' \\ \text{de quart període: } & c_2''' = R'' \cdot l_2''. \end{aligned}$$

Aquesta sèrie de problemes es resol per inducció cap enrere, atès que la decisió d'un període depèn de les decisions de períodes posteriors. Començant pel tercer període, la solució ja es va calcular en l'apartat (i): l'equació (1). Emprant (1), el problema de maximització en el segon període seria

$$\text{maximitzar } u_2' = c_2' \cdot c_2'' \cdot c_2'''$$

on $c_2' = R \cdot l_2 - l_2'$, $c_2'' = 1 + R' \cdot l_2' - l_2'' = \frac{1+R' \cdot l_2'}{2}$ i $c_2''' = R'' \cdot l_2'' = R'' \cdot \frac{1+R' \cdot l_2'}{2}$. Així, es tracta de

$$\text{maximitzar } u_2' = (R \cdot l_2 - l_2') \cdot \left(\frac{1+R' \cdot l_2'}{2}\right)^2 \cdot R''$$

respecte d'l_2'.

Sabent que

$$\frac{du_2'}{dl_2'} = R'' \cdot \left(-\left(\frac{1 + R' \cdot l_2'}{2}\right)^2 + (R \cdot l_2 - l_2') \cdot \frac{1}{2} \cdot R' \cdot (1 + R' \cdot l_2') \right)$$

la condició de maximització $\frac{du_2'}{dl_2'} = 0$ implica, tret d'error o omissió,

$$l_2' = \frac{2}{3} \cdot \left(R \cdot l_2 - \frac{1}{2 \cdot R'} \right).$$

Passant al problema del primer període, i emprant l'equació anterior, es tracta de

$$\text{maximitzar } u_2 = c_2 \cdot \ c_2' \cdot \ c_2'' \cdot \ c_2'''$$

on

$$c_2 = 1 - \ l_2$$
$$c_2' = R \cdot l_2 - l_2' = R \cdot l_2 - \frac{2}{3} \cdot \left(R \cdot l_2 - \frac{1}{2 \cdot R'} \right) = \frac{1}{3} \cdot \left(R \cdot l_2 + \frac{1}{R'} \right) = \frac{1}{3 \cdot R'} \cdot (1 + R' \cdot R \cdot l_2)$$
$$c_2'' = 1 + R' \cdot l_2' - l_2'' = \frac{1 + R' \cdot l_2'}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot R' \cdot \left(R \cdot l_2 - \frac{1}{2 \cdot R'} \right) = \frac{1}{3} \cdot (1 + R' \cdot R \cdot l_2)$$
$$c_2''' = R'' \cdot l_2'' = \ R'' \cdot \left(\frac{1 + R' \cdot l_2'}{2} \right) = \frac{R''}{3} \cdot (1 + R' \cdot R \cdot l_2)$$

i la maximització és respecte d'l_2. Inserint les quatre equacions finals en la funció objectiu, es tracta de

$$\text{maximitzar } u_2 = \frac{R''}{R' \cdot 3^3} \cdot (1 - \ l_2) \cdot \ (1 + R' \cdot R \cdot l_2)^3$$

respecte d'l_2. Fent $\frac{du_2}{dl_2} = 0$, s'obté

$$-(1 + R' \cdot R \cdot l_2)^3 + 3 \cdot R \cdot R' \cdot (1 - \ l_2) \cdot \ (1 + R' \cdot R \cdot l_2)^2 = 0\,.$$

Simplificant,

$$1 + R' \cdot R \cdot l_2 = 3 \cdot R' \cdot R - 3 \cdot R' \cdot R \cdot l_2\,.$$

Aïllant l_2,

$$l_2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4 \cdot R \cdot R'}\,.$$

La resolució final es deixa com a exercici.