Un exemple on els consumidors viuen tres períodes

Descripció de l'economia

• Hi ha un únic bé que no es pot produir ni acumular. Cada període neixen n individus idèntics que viuen tres períodes consecutius. Els individus només tenen dotació del bé en el seu segon període de vida: una unitat del bé. Les funcions d'utilitat d'un individu nascut en t són: en t, $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$; en $t+1$, $u_{t+1} = c_{t+1} \cdot c_{t+2}$; i en $t+2$, $u_{t+2} = c_{t+2}$. Calcula l'equilibri general de l'economia de cada període.

Anàlisi

• **Tipus de consumidors.** En general, en un període t hi haurà tres tipus de consumidors: els nascuts en t, els nascuts en $t-1$ i els nascuts en $t-2$ (els nascuts abans de $t-2$ ja no són vius).

• **Participants en el mercat de préstecs.** Els nascuts en $t-2$ acaben la seva vida en $t-2$, de manera que no participaran en el mercat de préstecs del període t. Per tant, només els nascuts en $t-1$ i en t formen part del mercat de préstecs de t: en el tercer període de vida els consumidors són irrellevants en el mercat de préstecs.

• **Decisió de prestar en el segon període de vida.** Els nascuts en $t-1$ s'enfronten en t a problema de

$$\begin{array}{cl} \text{maximitzar} & u' = c' \cdot c'' \\ \text{sotmès a} & c' + l' = 1 + R \cdot l \\ & c'' = R' \cdot l' \end{array}$$

on c' és el consum present del consumidor, c'' és el consum del període següent, l és el volum de préstecs rebuts en el període anterior, R és la taxa d'interès del període anterior, R' és la taxa d'interès del període present i l' és el volum de préstecs donats en el període present. Atès que en el període anterior $t-1$ aquests consumidors no disposaven de dotació, se segueix que $l < 0$: els nascuts en $t-1$ s'endeuten en $t-1$. El deute corresponent $R \cdot l < 0$ es paga en t. D'altra banda, com que aquests consumidors no tindran dotació en el període següent $t+1$ han d'estalviar en el període present t, de manera que $l' > 0$.

Combinant les dues restriccions pressupostàries s'obté la restricció pressupostària que involucra els dos darrers períodes de vida:

$$c' + \frac{c''}{R'} = 1 + R \cdot l.$$

El lagrangià és

$$\mathcal{L} = c' \cdot c'' + \lambda \cdot \left(1 + R \cdot l - c' - \frac{c''}{R'}\right).$$

Les condicions necessàries per a assolir un màxim d'$\mathcal{L}$ són

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c'} = c'' - \lambda$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c''} = c' - \frac{\lambda}{R'}$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 1 + R \cdot l - c' - \frac{c''}{R'}.$$

Se segueix de les dues primeres condicions que

$$c' = \frac{c''}{R'}.$$

Introduint aquesta equació en la tercera condició

$$c' = \frac{1 + R \cdot l}{2}.$$

Sabent que $c' + l' = 1 + R \cdot l$, la conclusió és que

$$l' = 1 + R \cdot l - c' = 1 + R \cdot l - \frac{1 + R \cdot l}{2} = \frac{1 + R \cdot l}{2} = c'.$$

Així doncs, en el seu segon període de vida un consumidor vol prestar

$$\boxed{l' = \frac{1 + R \cdot l}{2}} \qquad (1)$$

on l és allò que el mateix consumidor va manllevar en el període anterior.

- **Decisió de manllevar en el primer període de vida.** Els nascuts en t s'enfronten en t al problema de

$$\begin{array}{ll} \text{maximitzar} & u = c \cdot c' \\ \text{sotmès a} & c + l = 0 \\ & c' + l' = 1 + R \cdot l \end{array}$$

on c és el consum present del consumidor, c' és el consum del període següent, l és el volum de préstecs rebuts en el període present, R és la taxa d'interès del període present i l' és el volum de préstecs donats en el període següent. La restricció futura $c' + l' = 1 + R \cdot l$ coincideix amb la restricció a què s'enfrontarà el consumidor en el seu següent període de vida i introduïda en l'anàlisi feta anteriorment relativa al segon període de vida d'un consumidor.

En aquest punt es planteja el dubte de si, en el seu primer període de vida, el consumidor té present la relació $l' = \frac{1+R\cdot l}{2}$ obtinguda en la secció anterior entre el volum l' de préstecs futur i el volum l de préstecs present. Tot i obtinguda en t per a un consumidor nascut en $t-1$ la relació també sembla vàlida en $t+1$ per a un consumidor nascut en t (si això és cert, per què ho és?). L'alternativa és que el consumidor triï ara l ignorant la depèndencia $l' = \frac{1+R\cdot l}{2}$ entre l' i l (què podria justificar aquesta alternativa?).

• **Opció 1: es tria $\boldsymbol{l}$ presumint que $\boldsymbol{l}$ no afecta $\boldsymbol{l'}$.** Reunint les dues restriccions pressupostàries s'obté la restricció que involucra els dos primers períodes de vida:

$$c + \frac{c'}{R} = \frac{1-l'}{R}.$$

El lagrangià és

$$\mathcal{L} = c \cdot c' + \lambda \cdot \left(\frac{1-l'}{R} - c - \frac{c'}{R}\right).$$

Les condicions necessàries per a assolir un màxim d'$\mathcal{L}$ són

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} = c' - \lambda$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c'} = c - \frac{\lambda}{R}$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \frac{1-l'}{R} - c - \frac{c'}{R}.$$

Les dues primeres condicions impliquen

$$c = \frac{c'}{R}.$$

Fent servir aquesta equació en la tercera condició

$$c = \frac{1-l'}{2\cdot R}.$$

Atès que $c + l = 0$, es conclou que $l = -c$; això és,

$$\boxed{l = \frac{l'-1}{2\cdot R}.} \tag{2}$$

Aïllant l' en (2)

$$l' = 2\cdot R\cdot l + 1.$$

Emprant (1), $2 \cdot R \cdot l + 1 = l' = \frac{1+R \cdot l}{2}$. D'aquí que

$$R \cdot l = -\frac{1}{3}.$$

Donat $c' = \frac{1+R \cdot l}{2}$, se segueix que

$$\boxed{c' = \frac{1}{3}.}$$

D'altra banda, recordant que $l' = 2 \cdot R \cdot l + 1$ (o que $l' = c'$), es conclou que

$$l' = \frac{1}{3}.$$

I com que $c'' = R' \cdot l'$,

$$\boxed{c'' = \frac{R'}{3}.}$$

A més,

$$c = \frac{1 - l'}{2 \cdot R}.$$

implica

$$\boxed{c = \frac{1}{3 \cdot R}.}$$

Si s'interpreta que el mercat de préstecs és idèntic cada període, $R = R'$. Finalment, hi ha la condició de factibilitat: atès que el bé no pot acumular-se entre períodes, el consum total

$$n \cdot c + n \cdot c' + n \cdot c''$$

en un període ha coincidir amb la quantitat total $n \cdot 1$ existent en el període. En resum, cal que

$$c + c' + c'' = 1\,.$$

Així doncs,

$$\frac{1}{3 \cdot R} + \frac{1}{3} + \frac{R}{3} = 1$$

o, equivalentment,

$$R^2 - 2 \cdot R + 1 = 0\,.$$

De les dues solucions, $R = -1$ no és acceptable com a taxa d'interès d'equilibri (per quin motiu?). Això porta a

$$\boxed{R = 1}$$

i, en conseqüència, a

$$c = c' = c'' = \frac{1}{3}.$$

- **Opció 2: es tria $\boldsymbol{l}$ presumint que $\boldsymbol{l}$ afecta $\boldsymbol{l'}$ segons la condició $\boldsymbol{l' = \frac{1+R\cdot l}{2}}$.** A les restriccions pressupostàries

$$c + l = 0$$

$$c' + l' = 1 + R \cdot l$$

s'afegeix

$$l' = \frac{1 + R \cdot l}{2}.$$

Inserint la tercera equació en la segona,

$$c' + \frac{1 + R \cdot l}{2} = 1 + R \cdot l\,.$$

Equivalentment,

$$c' = \frac{1 + R \cdot l}{2}.$$

De la primera equació, $l = -c$. Introduint aquesta condició en l'equació anterior,

$$c' = \frac{1 - R \cdot c}{2}$$

o

$$\frac{R \cdot c}{2} + c' = \frac{1}{2}.$$

El lagrangià és

$$\mathcal{L} = c \cdot c' + \lambda \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{R \cdot c}{2} - c'\right).$$

Les condicions necessàries per a assolir un màxim d'$\mathcal{L}$ són

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} = c' - \frac{R \cdot \lambda}{2}$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c'} = c - \lambda$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} - \frac{R \cdot c}{2} - c'\,.$$

Les dues primeres condicions impliquen

$$c' = \frac{R \cdot c}{2}.$$

Fent servir aquest resultat i la tercera condició

$$\boxed{c' = \frac{1}{4}.}$$

Sabent que $c' = \frac{1+R\cdot l}{2}$,

$$R \cdot l = -\frac{1}{2}.$$

Partint de $c = -l$ i l'anterior resultat, s'arriba a

$$\boxed{c = \frac{1}{2 \cdot R}.}$$

D'$l' = \frac{1+R\cdot l}{2}$ i $R \cdot l = -\frac{1}{2}$ es dedueix

$$l' = \frac{1}{4}.$$

Finalment, $c'' = R' \cdot l'$, la presumpció que $R' = R$ i el resultat anterior impliquen

$$\boxed{c'' = \frac{R}{4}.}$$

Continua essent vàlida la condició

$$c + c' + c'' = 1.$$

En conseqüència,

$$\frac{1}{2 \cdot R} + \frac{1}{4} + \frac{R}{4} = 1,$$

que equival a

$$R^2 - 3 \cdot R + 2 = 0.$$

Les dues solucions de l'equació anterior són admissibles:

$$\boxed{R = 1} \quad \text{i} \quad \boxed{R = 2.}$$

Amb $R = 1$,

$$\boxed{c = \frac{1}{2} \ \text{ i } \ c' = c'' = \frac{1}{4}.}$$

Amb $R = 2$,

$$\boxed{c = c' = \frac{1}{4} \quad \text{i} \quad c'' = \frac{1}{2}.}$$

• **Comparacions.** La utilitat del consumidor que pren la decisió entre les opcions 1 i 2, són: (i) en l'opció 1, $u = c \cdot c' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$; i (ii) en l'opció 2, $u = c \cdot c' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$, si $R = 1$, i $u = c \cdot c' = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$, si $R = 2$. Per tant, <u>ignorar la veritat</u> (adoptant l'opció 1) <u>pot resultar convenient</u>.

• **Una altra manera de trobar la solució en l'opció 1.** Aparentment, atès que la història sembla repetir-se cada període, el préstec l que un individu rep en el seu primer període de vida hauria de coincidir amb el préstec que un individu en el seu segon període de vida va rebre en el seu primer període de vida. Això és, el paràmetre l en l'equació (1) hauria de coincidir amb la variable l definida en l'equació (2). Amb aquesta hipòtesi, introduint (2) en (1) resulta en $l' = 1/3$.

Emprant $l' = 1/3$ i l'equació (2) s'obté

$$l = -\frac{1}{3 \cdot R}.$$

D'altra banda, l'equació (1) representa el que presta cada prestador durant un període determinat, en tant que l'equació (2) representa el que demanda cada prestatari durant el mateix període. En equilibri cal que la quantitat total oferta de préstecs $n{\cdot}l'$ (un valor positiu per la manera en què s'han definit els préstecs) sigui igual a la quantitat total demanda de préstecs $n{\cdot}l$ (un valor negatiu). Equivalentment, un cop es cancel·la el valor comú n, la condició d'equilibri en el mercat de préstecs estableix que

$$l + l' = 0\,.$$

Així doncs, sabent que $l' = 1/3$ i que $l = -1/3{\cdot}R$, l'equilibri requereix

$$-\frac{1}{3 \cdot R} + \frac{1}{3} = 0\,.$$

La solució de l'equació anterior implica $R = 1$, que és el resultat obtingut en l'opció 1.