4. Un model de generacions encavalcades amb diner

• **Diner fiduciari.** Diner fiduciari és un actiu sense valor intrínsec que s'accepta en el període present a canvi del bé amb la creença que s'acceptarà a canvi del bé en el període següent.

• **Un model sense diner fiduciari.** Totes les generacions són idèntiques. Cada generació creix a la taxa constant $n > 0$. La gent gran no té dotació. En concret, per a tota generació t i $i \in N(t)$, $N(t) = (1+n) \cdot N(t-1)$, $u_t^i\left(c_t^i(t), c_t^i(t+1)\right) = c_t^i(t) \cdot c_t^i(t+1)$, $w_t^i = (w, 0)$ i la funció d'utilitat de cada consumidor gran coincideix amb el seu consum.

• **Solució.** L'actiu que s'intercanvi per bé en el mercat de préstecs (el préstec del bé) pot ser interpretat com diner endogen ('inside money'). Com que tots els joves són idèntics, no hi ha diner endogen, ja que no hi ha mercat de préstecs. De fet, tots els joves voldrien prestar el bé (adquirint a canvi diner endogen) i cap d'ells no voldria manllevar-lo (venent diner endogen: la promesa de retorn del bé en el següent període). En conseqüència, no hi ha intercanvi i tots els consumidors han de consumir les seves dotacions. Se segueix que els grans no consumeixen.

• **El model amb diner fiduciari.** L'objectiu és demostrar que amb diner fiduciari, introduït exògenament, es pot maximitzar la utilitat de cada generació.

• **Consum que maximitza la utilitat dels joves.** El lot de consum que maximitzaria el benestar de la generació t de joves s'obté maximitzant la funció d'utilitat comuna u_t^i sotmès a la restricció pressupostària de la generació en el període t

$$N(t) \cdot c_t^i(t) + N(t-1) \cdot c_{t-1}^i(t) = N(t) \cdot w \tag{2}$$

on w és dotació d'un jove. El costat dret de (2) representa la quantitat total de bé disponible en el període t, en tant que el costat esquerre estableix el consum total del bé en el període t: la quantitat $N(t) \cdot c_t^i(t)$ que els joves consumeixen més la quantitat $N(t-1) \cdot c_{t-1}^i(t)$ consumida pels grans. Amb $N(t) = (1+n) \cdot N(t-1) > 0$ i $c_{t-1}^i(t) = c_t^i(t+1)$, se segueix que

$$c_t^i(t) + \frac{c_t^i(t+1)}{1+n} = w$$

on n pot ser vist com una mena de taxa d'interès biològica.
Tenint-se $u_t^i = c_t^i(t) \cdot c_t^i(t+1)$, la maximització d' u_t^i requereix que

$$1 + n = \frac{c_t^i(t+1)}{c_t^i(t)} \qquad \text{i} \qquad c_t^i(t+1) = \left[w - c_t^i(t)\right] \cdot (1+n).$$

D'aquestes condicions resulta $c_t^i(t) = \frac{w}{2}$ i $c_t^i(t+1) = (1+n) \cdot \frac{w}{2}$. La utilitat de cada jove és $u_t^i\left(\frac{w}{2}, (1+n) \cdot \frac{w}{2}\right) = \frac{(1+n)\cdot w^2}{4} > 0$; la de cada gran és $c_t^i(t+1) = \frac{(1+n)\cdot w}{2} > 0$. En comparació, en l'equilibri general, cada consumidor consumeix la seva dotació: la utilitat de cada jove és $u_t^i(w, 0) = 0$ i la de cada gran és $c_t^i(t+1) = w_t^i(t+1) = 0$.

• **Creant un mercat (competitiu) de diner.** Els anteriors resultats mostren que la solució maximitzadora del benestar (la que triaria un planificador social benevolent) no és assolible amb el mercat de préstecs. Es demostra a continuació que seria assolible amb un mercat de diner. En particular, imaginem que els grans inventen el diner fiduciari en el període 1: un actiu sense valor intrínsec creat amb la intenció de ser generalment acceptat a canvi del bé en un mercat competitiu. Sigui M la quantitat de diner creada en $t = 1$ i, per a tot t, sigui $p(t)$ el preu del bé en diner: en t, una unitat del bé equival a $p(t)$ unitats de diner. Per tant, $p(t)$ representaria el nivell de preus de l'economia (diner per unitat de bé) i $1/p(t)$ seria el preu, valor o poder adquisitiu del diner (la quantitat de bé que una unitat de diner pot comprar en el període t).

• **Equilibri en el mercat de diner.** El mercat de diner fa possible que un jove estalviï poder de compra aconseguint diner. Sigui $m^i(t)$ el nombre d'unitats monetàries que el consumidor i adquireix en t. Això fa que les restriccions pressupostàries d'i siguin de jove i de gran, respectivament,

$$c_t^i(t) + \frac{m^i(t)}{p(t)} = w \qquad \text{i} \qquad c_t^i(t+1) = \frac{m^i(t)}{p(t+1)}$$

on $\frac{m^i(t)}{p(t)}$ representa la quantitat de bé que cal pagar en t (donat el preu $p(t)$ del bé en diner o, equivalentment, el preu $\frac{1}{p(t)}$ en bé del diner) per a obtenir $m^i(t)$ unitats de diner i $\frac{m^i(t)}{p(t+1)}$ és la quantitat de bé que es pot comprar en $t+1$ amb unitats de diner, donat el preu $p(t+1)$ del bé. De la primera restricció, la demanda individual de diner en t resulta ser $m^i(t) = p(t) \cdot [w - c_t^i(t)]$. La demanda agregada de diner en t seria aleshores $N(t) \cdot m^i(t)$. En l'equilibri del mercat de diner, demanda agregada en t és igual a l'oferta agregada en t. Això és, $N(t) \cdot m^i(t) = M$. Així doncs,

$$p(t) = \frac{M}{N(t) \cdot [w - c_t^i(t)]} \; .$$

Aquesta relació també val per a $t+1$:

$$p(t+1) = \frac{M}{N(t+1) \cdot [w - c_{t+1}^i(t+1)]} \; .$$

Essent les generacions idèntiques, $c_{t+1}^i(t+1) = c_t^i(t)$. Sabent que $N(t+1) = (1+n) \cdot N(t)$ s'obté la condició d'equilibri del mercat de diner:

$$\frac{p(t)}{p(t+1)} = \frac{N(t+1)}{N(t)} = 1 + n \; .$$

• **Rendibilitat del diner.** La raó

$$P = \frac{p(t)}{p(t+1)}$$

és la taxa de rendibilitat bruta del diner fiduciari: la quantitat de bé que s'aconsegueix en $t+1$ invertint en t una unitat de bé en diner. Una unitat del bé en t permet d'obtenir $p(t)$ unitats de diner en t. Atès que cada unitat de diner pot comprar $1/p(t+1)$ unitats del bé en $t+1$, es conclou que $p(t)$ unitats de diner permeten l'adquisició de $P = p(t)/p(t+1)$ unitats del bé en $t+1$. En suma:

$$1 \text{ unitat del bé en } t \;\rightarrow\; p(t) \text{ unitats de diner } t \;\rightarrow\; \frac{p(t)}{p(t+1)} \text{ unitats del bé en } t+1$$

• **Interpretant l'equilibri en el mercat de diner.** La interpretació d'n com a taxa d'interès real neta vol dir que el valor real futur d'un actiu és $(1+n)$ vegades el valor real present de l'actiu. En el cas present, l'actiu és el diner fiduciari i el valor real en el període t d'una unitat de diner és $\frac{1}{p(t)}$. Aquesta conclusió se'n deriva del fet que $\frac{1}{p(t)}$ mesura el poder adquisitiu en t d'una unitat de diner. Si, per tant, s'assumeix que la taxa d'interès real bruta és $1+n$, aleshores el valor real en $t+1$ d'$\frac{1}{p(t)}$ és $\frac{1}{p(t)} \cdot (1+n)$. Aquesta magnitud ha de representar el valor real de l'actiu 'diner' en $t+1$. Per definició, el valor real del diner en $t+1$ és el seu poder adquisitiu $\frac{1}{p(t+1)}$. Recapitulant, s'ha de tenir que

$$\frac{1}{p(t+1)} = \frac{1}{p(t)} \cdot (1+n)$$

o, reordenant,

$$\boxed{\frac{p(t)}{p(t+1)} = 1+n} \tag{3}$$

que és la condició d'equilibri del mercat de diner. Aquesta condició pot interpretar-se que és avalada per l'arbitratge: la rendibilitat (en termes real) $1+n$ de fer un préstec hipotètic del bé ha de ser la mateixa que la rendibilitat $\frac{p(t)}{p(t+1)}$ d'invertir en diner.

• **Consum que maximitza la utilitat dels joves amb diner.** La demanda de diner d'un jove i s'obté maximitzant $u_t^i\left(c_t^i(t), c_t^i(t+1)\right) = c_t^i(t) \cdot c_t^i(t+1)$ sotmès a $c_t^i(t) + \frac{m^i(t)}{p(t)} = w$ i $c_t^i(t+1) = \frac{m^i(t)}{p(t+1)}$. Per tant, i tria $m^i(t)$ per a

$$\text{maximitzar } \left(w - \frac{m^i(t)}{p(t)}\right) \cdot \frac{m^i(t)}{p(t+1)}$$

on, atès que el mercat de diner es considera competitiu, els preus $p(t)$ i $p(t+1)$ s'assumeixen donats. Després d'igualar a zero la derivada respecte d'$m^i(t)$, la demanda real de diner és

$$\frac{m^i(t)}{p(t)} = \frac{w}{2}.$$

El consum d'un consumidor jove i el consum d'un consumidor gran resulten ser

$$c_t^i(t) = w - \frac{m^i(t)}{p(t)} = \frac{w}{2} \qquad \text{i} \qquad c_t^i(t+1) = \frac{m^i(t)}{p(t+1)} = \frac{w \cdot \frac{p(t)}{2}}{p(t+1)} = \frac{w \cdot (1+n)}{2}.$$

Els resultats anteriors mostren que el diner fiduciari (i) genera el nivells de consum que maximitzen el benestar i (ii) milloren la situació on no hi ha intercanvi. La capacitat del diner fiduciari com a mecanisme per a augmentar el benestar depèn de la seva abilitat de fer de dipòsit de valor, la qual cosa requereix que els consumidors creguin que el diner que compren de joves podrà ser intercanviat pel bé de grans. Si els joves en t no expectessin que els joves en $t+1$ estaran disposats a acceptar diner a canvi del bé, aleshores els joves en t no acceptarien el diner. En aquest cas, el diner esdevindria inútil i perdria tota funció econòmica.

El problema s'ha resolt susbtituint les restriccions pressupostàries $c_t^i(t)+\frac{m^i(t)}{p(t)}=w$ i $c_t^i(t+1)=\frac{m^i(t)}{p(t+1)}$ en la funció d'utilitat. Alternativament, es podrien haver combinat les dues restriccions de manera que s'eliminés $m^i(t)$, obtenint-se el problema de

$$maximitzar_{\{c_t^i(t),\, c_t^i(t+1)\}} \;\; u_t^i\left(c_t^i(t), c_t^i(t+1)\right) = c_t^i(t)\cdot c_t^i(t+1)$$

$$sotmès\ a\ \ c_t^i(t)+\frac{p(t+1)}{p(t)}\cdot c_t^i(t+1) = \ w_t^i(t)\,.$$

Fent $R=1+n$, la condició (3) d'equilibri del mercat de diner implicaria $\frac{p(t+1)}{p(t)}=\frac{1}{R}$. D'aquí que la restricció pressupostària seria la condició habitual $c_t^i(t)+\frac{c_t^i(t+1)}{R(t)}= w_t^i(t)+\frac{w_t^i(t+1)}{R(t)}$ disfressada. Definint la taxa d'inflació en el període t com

$$\pi(t)=\frac{p(t)-p(t-1)}{p(t-1)}.$$

resulta

$$1+\pi(t)=\frac{1}{1+n}$$

o, equivalentment,

$$\boxed{\pi(t)=-\frac{n}{1+n}.}$$

Això vol dir que la economia experimenta <u>deflació</u>: el nivell de preus cau a una taxa constant. Atès que

$$\pi(t)=-\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

la deflació és més intensa com més gran és la taxa n de creixement de la població:

$$\uparrow n \ \Rightarrow \downarrow \tfrac{1}{n} \ \Rightarrow \uparrow \tfrac{1}{1+\frac{1}{n}} \ \Rightarrow \uparrow |\pi|\,.$$

A més, $c_t^i(t+1)=\frac{w/2}{1+\pi(t+1)}$: de gran es consumeix la meitat del valor present descomptat (tenint en compte la inflació) de la dotació de jove.

• **Exercici. Emissió contínua de diner.** En el model que s'ha analitzat la quantitat de diner és fixa: el diner es crea un cop, pels grans del període inicial. Torna a analitzar el model si els grans de cada període tinguessin el privilegi de crear una quantitat fixa de diner, m. Per tant, essent $t=1$ el període inicial, la quantitat de diner en el període t és $m{\cdot}t$.