3. Un exemple amb tres períodes de vida

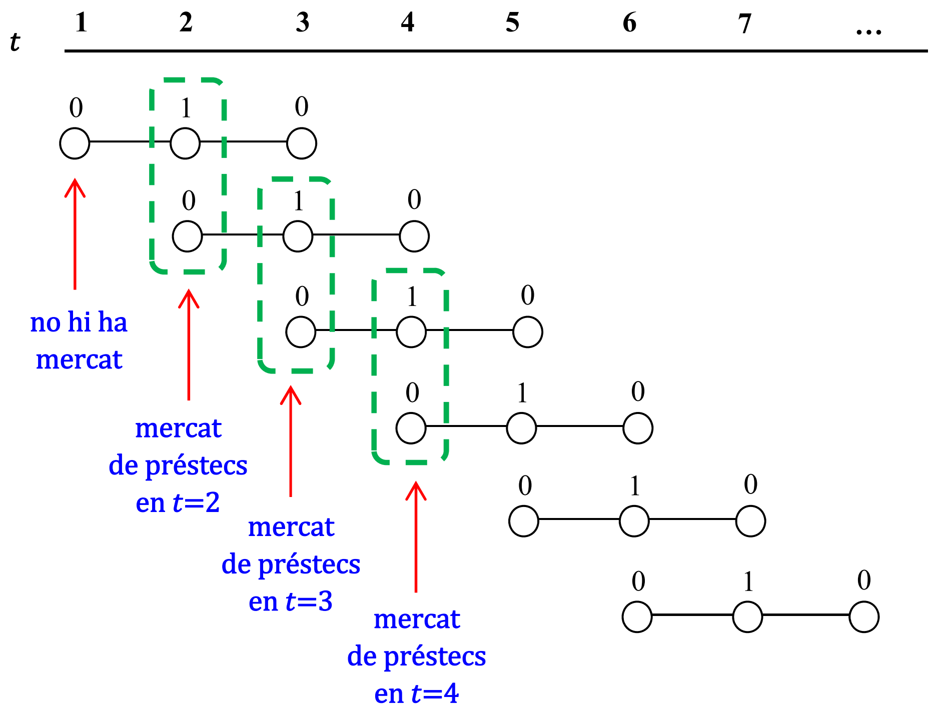
1. Descripció de l'economia

- Hi ha un únic bé que no es pot produir ni acumular.
- Cada període neixen n individus idèntics que viuen tres períodes consecutius: jove, adult i gran.
- Els individus només tenen dotació del bé en el seu segon període de vida: una unitat del bé.
- Les funcions d'utilitat d'un individu nascut en t són: en t, $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$; en $t+1$, $u_{t+1} = c_{t+1} \cdot c_{t+2}$; i en $t+2$, $u_{t+2} = c_{t+2}$.

2. Anàlisi

- **Tipus d'individus.** En general, en un període t hi haurà tres tipus d'individus: els nascuts en t, els nascuts en $t-1$ i els nascuts en $t-2$ (els nascuts abans de $t-2$ ja no són vius).

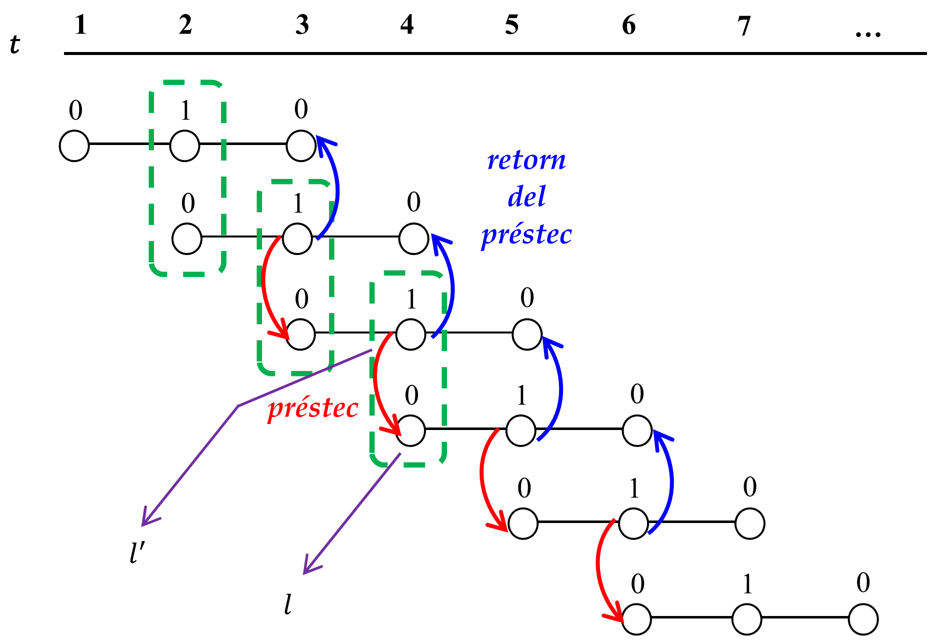
- **Participants en el mercat de préstecs.** Els nascuts en $t-2$ acaben la seva vida en $t-2$, de manera que no participaran en el mercat de préstecs del període t. Per tant, només els nascuts en $t-1$ i en t formen part del mercat de préstecs de t: en el tercer període de vida els consumidors són irrellevants en el mercat de préstecs.



- **Decisió de prestar en el segon període de vida.** Els nascuts en $t-1$ s'enfronten en t al problema de

$$
\begin{array}{lll}
\text{maximitzar} & u' = c' \cdot c'' & \\
\text{sotmès a} & c' + l' = 1 + R \cdot l & \text{(restricció present, d'adult)} \\
 & c'' = R' \cdot l' & \text{(restricció futura, de gran)}
\end{array}
$$

on c' és el consum present de l'individu (com a adult), c'' és el consum del període següent (de gran), l és el volum de préstecs rebuts en el període anterior, R és la taxa d'interès del període anterior, R' és la taxa d'interès del període present i l' és el volum de préstecs donats en el període present. Atès que en el període anterior $t-1$ aquests individus no disposaven de dotació, se segueix que $l<0$: els nascuts en $t-1$ s'endeuten en $t-1$. El deute corresponent $R \cdot l < 0$ es paga en t. D'altra banda, com que aquests individus no tindran dotació en el període següent $t+1$ han d'estalviar en el període present t, de manera que $l' > 0$.



Combinant les dues restriccions pressupostàries s'obté la restricció pressupostària dels dos darrers períodes de vida:

$$c' + \frac{c''}{R'} = 1 + R \cdot l.$$

El lagrangià és

$$\mathcal{L} = c' \cdot c'' + \lambda \cdot \left(1 + R \cdot l - c' - \frac{c''}{R'}\right).$$

Les condicions necessàries per a assolir un màxim d'$\mathcal{L}$ són

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c'} = c'' - \lambda$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c''} = c' - \frac{\lambda}{R'}$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 1 + R \cdot l - c' - \frac{c''}{R'}.$$

Se segueix de les dues primeres condicions que

$$c' = \frac{c''}{R'}.$$

Introduint aquesta equació en la tercera condició

$$c' = \frac{1 + R \cdot l}{2}.$$

Sabent que $c' + l' = 1 + R \cdot l$, la conclusió és que

$$l' = 1 + R \cdot l - c' = 1 + R \cdot l - \frac{1 + R \cdot l}{2} = \frac{1 + R \cdot l}{2} = c'.$$

Així doncs, en el seu segon període de vida tot individu vol prestar

$$\boxed{l' = \frac{1 + R \cdot l}{2}} \tag{1}$$

on l és allò que el mateix individu va manllevar en el període anterior.

• **Decisió de manllevar en el primer període de vida.** Els nascuts en t s'enfronten en t al problema de

maximitzar	$u = c \cdot c'$	
sotmès a	$c + l = 0$	(restricció present, de jove)
	$c' + l' = 1 + R \cdot l$	(restricció futura, d'adult)

on c és el consum present, c' és el consum del període següent, l és el volum de préstecs rebuts en el període present, R és la taxa d'interès del període present i l' és el volum de préstecs donats en el període següent. La restricció futura $c' + l' = 1 + R \cdot l$ coincideix amb la restricció a què s'enfrontarà l'individu en el seu següent període de vida i introduïda en l'anàlisi feta anteriorment relativa al segon període de vida d'un individu.

En aquest punt es planteja el dubte de si, en el seu primer període de vida, el consumidor té present la relació $l' = \frac{1+R \cdot l}{2}$ obtinguda en la secció anterior entre el volum l' de préstecs futur i el volum l de préstecs present. Tot i obtinguda en t per a un individu nascut en $t - 1$ la relació també sembla vàlida en $t + 1$ per a un individu nascut en t (si això és cert, per què ho és?). L'alternativa és que l'individu triï ara l ignorant la depèndencia $l' = \frac{1+R \cdot l}{2}$ entre l' i l (què podria justificar aquesta alternativa?).

• **Opció 1: es tria l presumint que l no afecta l'.** Reunint les dues restriccions pressupostàries s'obté la restricció que involucra els dos primers períodes de vida:

$$c + \frac{c'}{R} = \frac{1 - l'}{R}.$$

El lagrangià és

$$\mathcal{L} = c \cdot c' + \lambda \cdot \left(\frac{1 - l'}{R} - c - \frac{c'}{R} \right).$$

Les condicions necessàries per a assolir un màxim d'$\mathcal{L}$ són

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} = c' - \lambda$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c'} = c - \frac{\lambda}{R}$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \frac{1 - l'}{R} - c - \frac{c'}{R}.$$

Les dues primeres condicions impliquen

$$c = \frac{c'}{R}.$$

Fent servir aquesta equació en la tercera condició

$$c = \frac{1 - l'}{2 \cdot R}.$$

Atès que $c + l = 0$, es conclou que $l = -c$; això és,

$$\boxed{l = \frac{l' - 1}{2 \cdot R}.} \tag{2}$$

Aïllant l' en (2)

$$l' = 2 \cdot R \cdot l + 1.$$

Emprant (1), $2 \cdot R \cdot l + 1 = l' = \frac{1 + R \cdot l}{2}$. D'aquí que

$$R \cdot l = -\frac{1}{3}.$$

Donat $c' = \frac{1 + R \cdot l}{2}$, se segueix que

$$\boxed{c' = \frac{1}{3}.}$$

D'altra banda, recordant que $l' = 2 \cdot R \cdot l + 1$ (o que $l' = c'$), es conclou que

$$l' = \frac{1}{3}.$$

I com que $c'' = R' \cdot l'$,

$$\boxed{c'' = \frac{R'}{3}\,.}$$

A més,

$$c = \frac{1 - l'}{2 \cdot R}\,.$$

implica

$$\boxed{c = \frac{1}{3 \cdot R}\,.}$$

Si s'interpreta que el mercat de préstecs és idèntic cada període, es conclou que $R = R'$. Finalment, hi ha la condició de factibilitat: atès que el bé no pot acumular-se entre períodes, el consum total

$$n \cdot c + n \cdot c' + n \cdot c''$$

en un període ha coincidir amb la quantitat total $n \cdot 1$ existent en el període. En resum, cal que

$$c + c' + c'' = 1\,.$$

Així doncs,

$$\frac{1}{3 \cdot R} + \frac{1}{3} + \frac{R}{3} = 1$$

o, equivalentment,

$$R^2 - 2 \cdot R + 1 = 0\,.$$

De les dues solucions, $R = -1$ no és acceptable com a taxa d'interès d'equilibri (per quin motiu?). Això porta a

$$\boxed{R = 1}$$

i, en conseqüència, a

$$c = c' = c'' = \frac{1}{3}\,.$$

• **Opció 2: es tria l presumint que l afecta l' segons la condició $l' = \frac{1+R\cdot l}{2}$.** A les restriccions pressupostàries

$$c + l = 0$$

$$c' + l' = 1 + R \cdot l$$

s'afegeix

$$l' = \frac{1 + R \cdot l}{2}\,.$$

Inserint la tercera equació en la segona,

$$c' + \frac{1 + R \cdot l}{2} = 1 + R \cdot l\,.$$

Equivalentment,

$$c' = \frac{1 + R \cdot l}{2}.$$

De la primera equació, $l = -c$. Introduint aquesta condició en l'equació anterior,

$$c' = \frac{1 - R \cdot c}{2}$$

o

$$\frac{R \cdot c}{2} + c' = \frac{1}{2}.$$

El lagrangià és

$$\mathcal{L} = c \cdot c' + \lambda \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{R \cdot c}{2} - c'\right).$$

Les condicions necessàries per a assolir un màxim d'$\mathcal{L}$ són

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} = c' - \frac{R \cdot \lambda}{2}$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c'} = c - \lambda$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} - \frac{R \cdot c}{2} - c'\,.$$

Les dues primeres condicions impliquen

$$c' = \frac{R \cdot c}{2}.$$

Fent servir aquest resultat i la tercera condició

$$\boxed{c' = \frac{1}{4}.}$$

Sabent que $c' = \frac{1+R \cdot l}{2}$,

$$R \cdot l = -\frac{1}{2}.$$

Partint de $c = -l$ i l'anterior resultat, s'arriba a

$$\boxed{c = \frac{1}{2 \cdot R}.}$$

D'$l' = \frac{1+R\cdot l}{2}$ i $R\cdot l = -\frac{1}{2}$ es dedueix

$$l' = \frac{1}{4}\,.$$

Finalment, $c'' = R' \cdot l'$, la presumpció que $R' = R$ i el resultat anterior impliquen

$$\boxed{c'' = \frac{R}{4}\,.}$$

Continua essent vàlida la condició

$$c \;+\; c' \;+\; c'' \;=\; 1\,.$$

En conseqüència,

$$\frac{1}{2\cdot R} \;+\; \frac{1}{4} \;+\; \frac{R}{4} \;=\; 1\,,$$

que equival a

$$R^2 \;-\; 3\cdot R \;+\; 2 \;=\; 0\,.$$

Les dues solucions de l'equació anterior són admissibles:

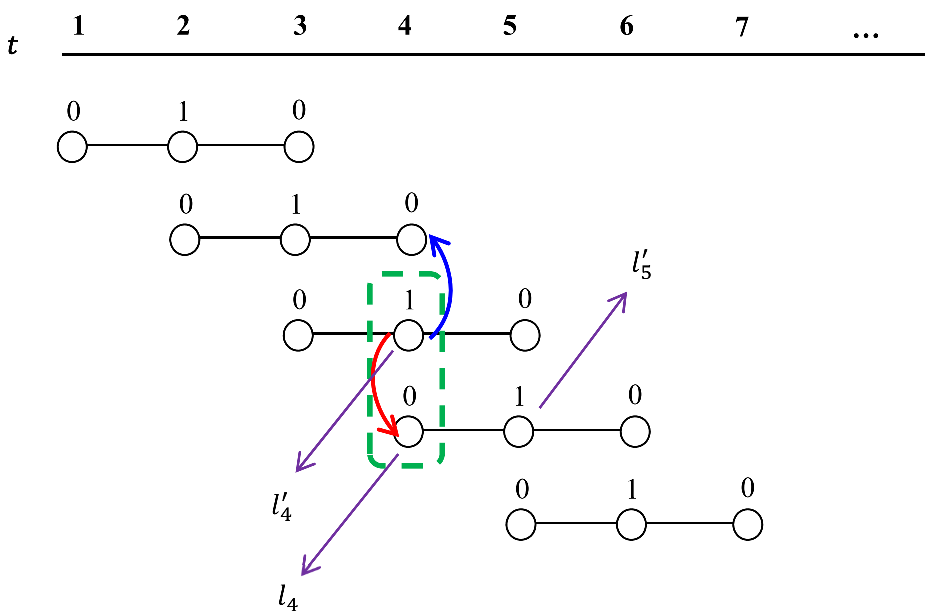
$$\boxed{R = 1} \quad \text{i} \quad \boxed{R = 2.}$$

Amb $R = 1$,

$$\boxed{c = \frac{1}{2} \;\text{ i }\; c' = c'' = \frac{1}{4}\,.}$$

Amb $R = 2$,

$$\boxed{c = c' = \frac{1}{4} \;\text{ i }\; c'' = \frac{1}{2}\,.}$$



• **Remarca sobre les funcions de préstecs.** Els problemes de maximització de les pàgines 1 i 3 es refereixen a un mateix individu; per exemple a un individu nascut en el període $t = 4$ (vegeu la gràfica de la pàgina anterior). Les funcions de préstecs l i l' calculades serien l_4 i l_5'. Però quan es calcula l'equilibri del mercat de préstecs en $t = 4$, la funció que es combina amb l_4 (la demanda de préstecs dels joves en $t = 4$) no és l_5', sinó l_4' (la funció de demanda de préstecs dels adults en $t = 4$). Amb tot, un adult en $t = 4$ té un problema de maximització idèntic a un adult en $t = 5$. Per aquest motiu, $l_4' = l_5'$: la solució del problema que un jove del període 4 tindrà en el període 5 és la mateixa que la de l'adult del període 4 amb qui el jove del període 4 vol manllevar el bé.

• **Comparacions.** La utilitat del consumidor que pren la decisió entre les opcions 1 i 2, són: (i) en l'opció 1, $u = c \cdot c' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$; i (ii) en l'opció 2, $u = c \cdot c' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$, si $R = 1$, i $u = c \cdot c' = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$, si $R = 2$. Per tant, <u>ignorar la veritat</u> (adoptant l'opció 1) <u>resultaria convenient</u>.

• **Una altra manera de trobar la solució en l'opció 1.** Pel comentat a la remarca, atès que la història sembla repetir-se cada període, el préstec l que un individu rep de jove d'un adult hauria de coincidir amb el préstec que l'adult va rebre de jove. Això és, el paràmetre l en l'equació (1) hauria de coincidir amb la variable l definida en l'equació (2). Amb aquesta hipòtesi, introduint (2) en (1) resulta $l' = 1/3$.

Emprant $l' = 1/3$ i l'equació (2) s'obté

$$l = -\frac{1}{3 \cdot R}.$$

D'altra banda, l'equació (1) representa el que presta cada prestador durant un període determinat, en tant que l'equació (2) representa el que demanda cada prestatari durant el mateix període. En equilibri cal que la quantitat total oferta de préstecs $n{\cdot}l'$ (un valor positiu per la manera en què s'han definit els préstecs) sigui igual a la quantitat total demanda de préstecs $n{\cdot}l$ (un valor negatiu). Equivalentment, un cop es cancel·la el valor comú n, la condició d'equilibri en el mercat de préstecs estableix que

$$l + l' = 0 .$$

Així doncs, sabent que $l' = 1/3$ i que $l = -1/3{\cdot}R$, l'equilibri requereix

$$-\frac{1}{3 \cdot R} + \frac{1}{3} = 0 .$$

La solució de l'equació anterior implica $R = 1$, que és el resultat obtingut en l'opció 1.

• **Què passa en els períodes 1 i 2?** L'anàlisi anterior és vàlida quan un període i el posterior són idèntics; això és, a partir del període 3. En $t = 1$ no hi ha mercat, ja que que només hi ha joves. En t

= 2, i aplicant l'opció 2, les funcions de demanda de préstecs dels nascuts en el període 2 coincideixen a les calculades anteriorment. En particular (final de la pàgina 6),

$$\boxed{l = -\frac{1}{2 \cdot R}.}$$

Pel que fa als adults en $t = 2$, el seu problema de maximització és

$$\begin{array}{lll} \text{maximitzar} & u' = c' \cdot c'' & \\ \text{sotmès a} & c' + l' = 1 & \text{(restricció present, d'adult)} \\ & c'' = R \cdot l' & \text{(restricció futura, de gran)} \end{array}$$

(on s'escriu R en comptes d'R' perquè es pren la perspectiva dels joves, no dels adults). La diferència respecte d'un adult típic és que la restricció present ara ja no és

$$c' + l' = 1 + R \cdot l$$

atès que de jove l'adult no va rebre cap préstec. Aïllant c' a la restricció d'adult, $c' = 1 - l'$. Introduint aquesta expressió i la restricció futura en la funció objectiu, es tracta de maximitzar

$$u' = (1 - l') \cdot R \cdot l'.$$

Derivant respecte d'l' i igualant a zero, s'obté

$$\boxed{l' = 1/2.}$$

Com a resultat, en l'equilibri del mercat de préstecs en $t = 2$,

$$n \cdot l + n \cdot l' = 0$$

això és,

$$l + l' = 0$$

o

$$-\frac{1}{2 \cdot R} + \frac{1}{2} = 0.$$

Un cop aïllada R, en $t = 2$,

$$\boxed{R = 1.}$$

• **Exercici.** Què passaria amb les assignacions d'equilibri i la taxa d'interès d'equilibri cada període si els joves derivessin utilitat de tot el consum que fan al llarg de la seva vida i, en particular,

$$u = c \cdot c' \cdot c''?$$