3bis. Tres períodes de vida

1. Descripció de l'economia

• Hi ha un únic bé que no es pot produir ni acumular. Cada període neixen n individus idèntics que viuen tres períodes consecutius: jove, adult i gran. Els individus només tenen dotació del bé en el seu segon període de vida: una unitat del bé. Les funcions d'utilitat d'un individu nascut en t són: en t, $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$; en $t+1$, $u_{t+1} = c_{t+1} \cdot c_{t+2}$; i en $t+2$, $u_{t+2} = c_{t+2}$.

• Interpretació: el individus neixen i moren pobres; només tenen dotació en el seu període intermedi de vida; i només els interessa el seu consum present i immediatament futur (el futur més distant no els importa).

2. Anàlisi

• **Notació.** El superíndex '1' designarà un individu jove; '2', un d'adult; i '3', un de gran. Per tant, c_t^1 representarà el consum d'un jove en el període t, c_t^2 el consum d'un adult en t i c_t^3 el consum d'un individu gran en t. Quan quedi clar de quin període es tracta, c^i abreujarà c_t^i, on $i \in \{1, 2, 3\}$. La mateixa convenció s'aplica a altres variables, com u i l.

• **Decisions en el període inicial $t = 1$.** En $t = 1$ només hi ha joves. Atès que tots ells són idèntics no hi ha mercat de préstecs (tot jove, en no tenir dotació, voldria manllevar bé i endeutar-se).

• **Decisions en el període $t \geq 2$.** Cada jove del període $t \geq 2$ vol

$$\begin{array}{lll} \text{maximitzar} & u_t^1 = c_t^1 \cdot c_{t+1}^2 & \\ \text{sotmès a} & c_t^1 + l_t^1 = 0 & \text{(restricció pressupostària en } t\text{)} \\ & c_{t+1}^2 + l_{t+1}^2 = 1 + R_t \cdot l_t^1 & \text{(restricció pressupostària en } t\text{+1)} \end{array}$$

on c_t^1 és el consum present de l'individu (com a jove), c_{t+1}^2 és el consum del període següent (d'adult), l_t^1 és el volum de préstecs que el jove vol rebre en el període present t (l_t^1 serà negatiu perquè l'individu no té dotació en t), l_{t+1}^2 és el volum de préstecs que l'individu, d'adult, voldrà fer en $t+1$ (l_{t+1}^2 serà positiu perquè l'individu no tindrà dotació en $t+2$) i R_t és la taxa d'interès del període present t.

Aquest problema equival a

$$\text{maximitzar} \quad u_t^1 = -l_t^1 \cdot (1 + R_t \cdot l_t^1 - l_{t+1}^2)$$

on la variable objecte de decisió és l_t^1. És raonable suposar que hom és intel·ligent, en el sentit que s'entén com les decisions del present afecten les decisions del futur. Això implica que tot jove haurà d'anticipar com la seva decisió sobre l_{t+1}^2 d'adult està condicionada per la seva decisió sobre l_t^1 de jove. Per tant, tot jove haurà de resoldre el seu problema de decisió d'adult.

Tot individu adult en $t \geq 3$ vol

$$\begin{array}{lll} \text{maximitzar} & u_t^2 = c_t^2 \cdot c_{t+1}^3 & \\ \text{sotmès a} & c_t^2 + l_t^2 = 1 + R_{t-1} \cdot l_{t-1}^1 & \text{(restricció pressupostària en } t\text{)} \\ & c_{t+1}^3 = R_t \cdot l_t^2 & \text{(restricció pressupostària en } t\text{+1)} \end{array}$$

on c_t^2 és el consum de l'individu (com a adult), c_{t+1}^3 és el consum del període següent (de gran), l_t^2 és el volum de préstecs que l'adult fa en t ($l_t^2 > 0$ perquè en el període següent $t+1$ l'individu no tindrà dotació), R_{t-1} és la taxa d'interès del període anterior, l_{t-1}^1 són els préstecs demanats en el període anterior (quan l'individu era jove) i R_t és la taxa d'interès del període present t. En aquest problema R_{t-1} i l_{t-1}^1 són paràmetres, ja que són decisions ja preses.

Aquest problema equival a

$$\text{maximitzar} \quad u_t^2 = (1 + R_{t-1} \cdot l_{t-1}^1 - l_t^2) \cdot R_t \cdot l_t^2$$

on la variable objecte de decisió és l_t^2.

La presumpció que el mercat de préstecs és competitiu implica que hom tracta R_t com a un paràmetre. Com que maximitzar una funció equival a maximitzar qualsevol múltiple de la funció, R_t és irrellevant. Així, un adult vol

$$\text{maximitzar} \quad (1 + R_{t-1} \cdot l_{t-1}^1 - l_t^2) \cdot l_t^2$$

respecte d'l_t^2. La solució és

$$\boxed{l_t^2 = \frac{1 + R_{t-1} \cdot l_{t-1}^1}{2}}$$

Emprant les restriccions pressupostàries,

$$c_t^2 = \frac{1 + R_{t-1} \cdot l_{t-1}^1}{2}$$

i

$$c_{t+1}^3 = R_t \cdot \frac{1 + R_{t-1} \cdot l_{t-1}^1}{2}.$$

Atès que tots els individus adults són iguals cada període, la solució per a un adult en t és la mateixa que la d'un adult en $t+1$ (només cal moure el subíndex temporal un període endavant):

$$l_{t+1}^2 = \frac{1 + R_t \cdot l_t^1}{2}.$$

Aquesta equació representa la decisió que un jove en t anticipa que ell mateix farà d'adult en $t + 1$. Inserint-la en el problema de maximització d'un jove de t,

$$\text{maximitzar} \quad u_t^1 = -l_t^1 \cdot (1 + R_t \cdot l_t^1 - l_{t+1}^2)$$

esdevé

$$\text{maximitzar} \quad u_t^1 = -l_t^1 \cdot (1 + R_t \cdot l_t^1 - \tfrac{1+R_t \cdot l_t^1}{2})$$

o bé

$$\text{maximitzar} \quad u_t^1 = -l_t^1 \cdot \tfrac{1+R_t \cdot l_t^1}{2}$$

o, equivalentment,

$$\text{maximitzar} \quad u_t^1 = -l_t^1 \cdot (1 + R_t \cdot l_t^1)$$

respecte d'l_t^1. La solució és

$$\boxed{l_t^1 = -\frac{1}{2 \cdot R_t}.}$$

Fent servir les restricció $c_t^1 + l_t^1 = 0$,

$$c_t^1 = \frac{1}{2 \cdot R_t}$$

i, atès que

$$c_{t+1}^2 + l_{t+1}^2 = 1 + R_t \cdot l_t^1$$

i

$$l_{t+1}^2 = \frac{1 + R_t \cdot l_t^1}{2},$$

es conclou que

$$c_{t+1}^2 = \frac{1 + R_t \cdot l_t^1}{2} = \frac{1 - R_t \cdot \frac{1}{2 \cdot R_t}}{2} = \frac{1}{4}.$$

En resum, per a tot $t \geq 2$, <u>les decisions d'un jove en t estan representades per dues equacions</u>:

$$l_t^1 = -\frac{1}{2 \cdot R_t}$$

i

$$c_t^1 = \frac{1}{2 \cdot R_t}.$$

A més, per a tot $t \geq 3$, <u>les decisions d'un adult en t estan representades per dues equacions</u>:

$$l_t^2 = \frac{1 + R_{t-1} \cdot l_{t-1}^1}{2} = \frac{1 - \frac{R_{t-1}}{2 \cdot R_{t-1}}}{2} = \frac{1}{4}$$

i

$$c_t^2 = \frac{1}{4}.$$

L'únic que resta pendent és determinar les decisions d'un adult en $t = 2$. Aquest cas és especial perquè <u>un adult en $t = 2$ no es va poder endeutar de jove</u>, en $t = 1$ (tot adult en $t \geq 3$ va poder-se endeutar en el període anterior, de jove).

En $t = 2$, l'objectiu de cada adult és

$$\begin{array}{lll} \text{maximitzar} & u_t^2 = c_t^2 \cdot c_{t+1}^3 & \\ \text{sotmès a} & c_t^2 + l_t^2 = 1 & \text{(restricció pressupostària en } t\text{)} \\ & c_{t+1}^3 = R_t \cdot l_t^2 & \text{(restricció pressupostària en } t\text{+1)} \end{array}$$

on c_t^2 és el consum present de l'individu (com a adult), c_{t+1}^3 és el consum del període següent (de gran), l_t^2 és el volum de préstecs que el jove fa en el període present t (l_t^2 serà positiu perquè en el període següent l'individu no tindrà dotació) i R_t és la taxa d'interès del període present t.

Aquest problema equival a

$$\text{maximitzar} \quad u_t^2 = (1 - l_t^2) \cdot R_t \cdot l_t^2$$

on la variable objecte de decisió és l_t^2. La presumpció que el mercat de préstecs és competitiu implica que hom tracta R_t com a un paràmetre. Com que maximitzar una funció equival a maximitzar qualsevol múltiple de la funció, R_t és irrelevant. Així, un adult vol

$$\text{maximitzar} \quad u_t^2 = (1 - l_t^2) \cdot l_t^2 \, .$$

La solució és

$$\boxed{l_t^2 = \frac{1}{2}.}$$

Emprant les restriccions pressupostàries,

$$\boxed{c_t^2 = \frac{1}{2}}$$

i

$$\boxed{c_{t+1}^3 = \frac{R_t}{2}.}$$

• **Equilibris en $t = 2$.** En $t = 2$ hi ha n joves i n adults. L'<u>equilibri en el mercat de préstecs</u> (oferta total igual a demanda total) requereix

$$n \cdot l_t^2 = \left| n \cdot l_t^1 \right|$$

on $n \cdot l_t^2$ és l'oferta total de préstecs (dels adults) i la demanda total (dels joves) $\left| n \cdot l_t^1 \right|$ s'especifica en valor absolut (ja que la funció de demanda s'expressa mitjançant valors negatius). De manera equivalent,

$$n \cdot l_t^2 + n \cdot l_t^1 = 0.$$

Un cop es cancel·la n,

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot R_t} = 0$$

Com a resultat, la taxa d'interès d'equilibri en $t = 2$ és

$$\boxed{R_t = 1\,.}$$

Si es considerés l'equilibri en el mercat del bé en comptes de l'equilibri en el mercat de préstecs, s'invocaria la igualtat entre l'oferta total del bé en $t = 2$ (la dotació total del bé en $t = 2$) i la demanda total del bé en $t = 2$ (la suma del consum que hom vol fer en $t = 2$). En concret,

$$n \cdot 1 + n \cdot 0 = n \cdot c_t^1 + n \cdot c_t^2$$

on $n \cdot 1$ és la dotació total dels adults en $t = 2$, $n \cdot 0$ és la dotació total dels joves en $t = 2$, $n \cdot c_t^1$ és la demanda total del bé dels joves en $t = 2$ i $n \cdot c_t^2$ és la demanda total del bé dels adults en $t = 2$. Per tant, un cop es cancel·la n,

$$1 = \frac{1}{2 \cdot R_t} + \frac{1}{2},$$

d'on es conclou

$$R_t = 1\,.$$

En conseqüència, l'anàlisi del mercat de préstecs coincideix amb l'anàlisi del mercat del bé.

Resumint, l'equilibri en $t = 2$ comporta una taxa d'interès $R_t = 1$ i consums $c_t^1 = c_t^2 = 1/2$.

• **Equilibris en $t \geq 3$.** En tot $t \geq 3$ hi ha n joves, n adults i n grans. S'entén que tothom participa en el mercat del bé però que només joves (com a prestataris) i adults (com a prestadors) participen en el mercat de préstecs.

L'equilibri en el mercat de préstecs (oferta total igual a demanda total) requereix

$$n \cdot l_t^2 = \left| n \cdot l_t^1 \right|$$

on $n \cdot l_t^2$ representa l'oferta total de préstecs i la demanda total $\left| n \cdot l_t^1 \right|$ s'especifica en valor absolut (ja que la funció de demanda pren valors negatius). De manera equivalent,

$$n \cdot l_t^2 + n \cdot l_t^1 = 0.$$

Un cop es cancel·la n,

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2 \cdot R_t} = 0$$

La taxa d'interès d'equilibri resultant en $t \geq 3$ és

$$\boxed{R_t = 2\,.}$$

Els consums associats en $t \geq 4$ serien: per a joves, $c_t^1 = \frac{1}{2 \cdot R_t} = \frac{1}{4}$; per a adults, $c_t^2 = \frac{1}{2}$; i, per a grans, $c_t^3 = R_{t-1} \cdot l_{t-1}^2 = R_{t-1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{R_{t-1}}{4}$. La diferència en $t = 3$ és que $c_t^3 = R_{t-1} \cdot l_{t-1}^2 = R_{t-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{R_{t-1}}{2}$.

L'anàlisi de l'equilibri en el mercat del bé comporta emprar la condició d'equilibri en el mercat de bé, això és, la igualtat de l'oferta total del bé en t (la dotació total del bé en t) i la demanda total del bé en t (la suma del consum que hom vol fer en t). Concretament,

$$n \cdot 0 + n \cdot 1 + n \cdot 0 = n \cdot c_t^1 + n \cdot c_t^2 + n \cdot c_t^3$$

on $n \cdot 1$ és la dotació total dels adults en t, $n \cdot 0$ és tant la dotació total dels joves com la dels grans en t, $n \cdot c_t^1$ és la demanda total del bé dels joves en t, $n \cdot c_t^2$ és la demanda total del bé dels adults en t i $n \cdot c_t^3$ és la demanda total del bé dels grans en t. Així, un cop es cancel·la n,

$$1 = c_t^1 + c_t^2 + c_t^3 \,.$$

Per a $t \geq 4$, $c_t^1 = \frac{1}{2 \cdot R_t}$, $c_t^2 = \frac{1}{4}$ i $c_t^3 = R_{t-1} \cdot l_{t-1}^2 = R_{t-1} \cdot \frac{1}{4}$. Per consegüent, en l'equilibri del mercat del bé quan $t \geq 4$,

$$1 = \frac{1}{2 \cdot R_t} + \frac{1}{4} + \frac{R_{t-1}}{4} \,.$$

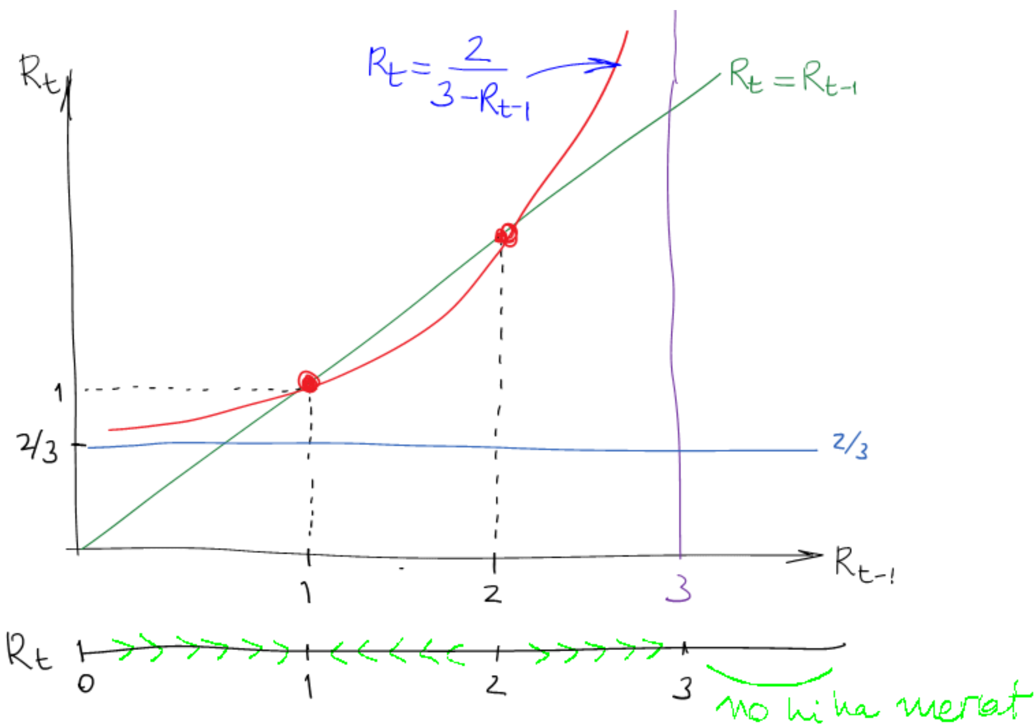
Reordenant,

$$3 = \frac{2}{R_t} + R_{t-1} \,.$$

Aïllant R_t,

$$\boxed{R_t = \frac{2}{3 - R_{t-1}} \,.}$$

Aquesta equació estableix la dinàmica de la taxa d'interès per a $t \geq 4$ quan el mercat del bé està en equilibri (R_1 no està definit perquè no hi ha mercat de préstecs, $R_2 = 1$ i, almenys segons l'anàlisi del mercat de préstecs, $R_3 = 2$). La gràfica a continuació representa l'equació.



3. Comentaris

• En un sentit, l'equació $R_t = \frac{2}{3-R_{t-1}}$ és innecessària. Si l'anàlisi es restringeix al mercat de préstecs, aleshores, com es mostra a la p. 5, $R_t = 2$ per a tot $t \geq 3$. Per tant, a partir del període 3, només un valor de la taxa d'interès equilibra el mercat de préstecs: $R = 2$.

• D'altra banda, l'equació $R_t = \frac{2}{3-R_{t-1}}$ demostra que l'anàlisi d'equilibri del mercat de préstecs no és equivalent a l'anàlisi d'equilibri del mercat del bé. Fins i tot considerant només els estats estacionaris de la dinàmica representada per $R_t = \frac{2}{3-R_{t-1}}$, es tenen dos valors de la taxa d'interès que equilibren el mercat del bé.

Gràficament, els valors de la taxa d'interès del estats estacionaris de la trajectòria $R_t = \frac{2}{3-R_{t-1}}$ són els punts d'intersecció de la gràfica de la trajectòria (la corba vermella) amb la diagonal principal $R_t = R_{t-1}$ (la línia verda). Algebraicament, els valors dels estats estacionaris s'obtenen resolent l'equació

$$R = \frac{2}{3-R}.$$

Els valors resultants són $R = 1$ i $R = 2$. El valor $R = 2$ també equilibra el mercat de préstecs, però el valor $R = 1$ no: si $R = 1$, la quantitat oferta de préstecs és $\frac{n}{4}$, però la quantitat demanda és $\frac{n}{2 \cdot R} = \frac{n}{2}$. Això significa que hi ha un excés de demanda de préstecs igual a $\frac{n}{2} - \frac{n}{4} = \frac{n}{4}$.

• Una pega de l'equació $R_t = \frac{2}{3-R_{t-1}}$ és que no garanteix el compliment de les restriccions pressupostàries (és, per tant, vàlida?). Per exemple, amb $R = 1$,

$$c^1 = \frac{1}{2} \qquad c^2 = \frac{1}{4} \qquad c^3 = \frac{1}{4}$$

(amb $R = 2$, $c^1 = c^2 = \frac{1}{4}$ i $c^3 = \frac{1}{2}$).

Quan $R = 1$, hi ha desequilibri en el mercat de préstecs, atès que $l^1 = -\frac{1}{2}$ i $l^2 = \frac{1}{4}$. Si s'interpreta que s'imposa el costat curt del mercat, els préstecs que efectivament reben els joves són $\frac{1}{4}$ i no $\frac{1}{2}$. El resultat és que la restricció pressupostària dels joves $c^1 + l^1 = 0$ no se satisfà: $c^1 = \frac{1}{2}$ però $l^1 = -\frac{1}{4}$ (atès que cada prestador no presta més d'$\frac{1}{4}$).

En aquest cas tampoc no se satisfà la restricció d'adult: $c^2 + l^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} < 1 + R \cdot l^1 = 1 - \frac{1}{4}$. Així doncs, els joves queden per damunt de la restricció i els adults per sota.

Amb tot, sí que es compleix la restricció pressupostària intertemporal de joves i adults: els valors de consums i préstecs efectius que genera $R = 1$ satisfan la suma de les restriccions de joves i adults.