Llista d'exercicis 3

1. Finançament col·lectiu de tecnologia d'emmagatzematge

La funció d'utilitat de cada individu és $u = c \cdot c'$. Cada generació está formada per dos grups, G1 i G2, cadascun format per n individus. Cada membre de G1 té dotació $(0, w)$ i cada membre de G2 compta amb dotació $(0, v)$, on $w > v > 0$. Tot i que el bé no es pot conservar, es pot emprar una tecnologia d'emmagatzematge d'un període: per cada unitat del bé acumulada en el període t per un individu i, en el període $t + 1$ i tindrà la quantitat $\lambda(t)$ del bé, on $0 < \lambda(t) < 1$.

L'efectivitat de la tecnologia depèn de les contribucions dels individus al seu desenvolupament. Si, en t, cada membre de G1 aporta τ_1 unitats del bé per a finançar/desenvolupar la tecnologia i cada membre de G2 aporta τ_2 unitats, aleshores $\lambda(t) = \frac{\tau_1+\tau_2}{w+v}$. Determina, en l'equilibri general, quina part de la seva dotació estalvia (i quina aporta al finançament de la tecnologia) cada individu.

2. Tecnologia de transferència

Tots els individus són iguals, viuen durant dos períodes consecutius i el bé només pot existir durant un període. Es descobreix una tecnologia que, sense cost, permet de transferir una unitat del bé dos períodes cap al futur. Així, si un individu acumula una unitat del bé en el període t, fent servir la tecnologia, aquesta unitat estarà disponible per a ser consumida (o novament acumulada) en el període $t + 2$. Tindria aquesta tecnologia utilitat pràctica? En particular, acumularien bé els individus?

3. Equilibri amb tecnologia d'emmagatzematge imperfecta

La funció d'utilitat de cada individu és $u = c \cdot c'$. Cada generació está formada per dos grups, G1 i G2, cadascun format per n individus. Cada membre de G1 té dotació (v, w) i cada membre de G2 compta amb dotació (w, v), on $w > v > 0$. Tot i que la naturalesa del bé no permet de transferir-lo d'un període a cap altre de posterior, existeix una tecnologia que possibilita l'acumulació del bé: per cada unitat del bé que un individu jove acumuli en el període t, l'individu disposarà de λ unitats del bé en el període $t + 1$, on $0 < \lambda < 1$. Assumint que hi ha un mercat de préstecs del bé, calcula l'equilibri general.

4. Equilibri amb producció endògena

La funció d'utilitat de cada individu jove i és $u = \ln c + \beta \cdot \ln c'$, on $0 < \beta < 1$. Cada generació està formada per 50 individus amb dotació $(0, 1)$ i 50 amb dotació $(2, 0)$. La funció de producció és $Y(t) = K(t)^{\alpha} L(t)^{1-\alpha}$ i $K(1) > 0$.

(i) Determina l'equació en diferències que estableix la trajectòria de l'estoc de capital.

(ii) Calcula un estat estacionari amb estoc de capital positiu i l'equilibri general.

(iii) Respon a (i) i (ii) si, per a tot t, la generació $t + 1$ té un 50% més de membres que la t.

(iv) Respon a (i) i (ii) si, per a tot t, si en el període 2 mor la meitat dels joves de cada tipus.

(v) Respon a (i) i (ii) si, per a tot t, si en el període 2 es destrueix la meitat de l'estoc de capital.

5. Un amb evasió fiscal sense capital

Cada generació té 100 membres: 50 ("els pobres") amb dotació de treball $(1,0)$ i els altres 50 ("els rics") amb dotació de treball $(4,0)$. Tots els joves de totes les generacions tenen la mateixa funció d'utilitat $u = c \cdot c'$. No hi ha capital: la producció només depèn del treball: $Y = L^{1/2}$. El salari és $\omega = L^{-1/2}$.

Hi ha un goven que estableix un impost τ a pagar pels rics joves. Per a cada t, la recaptació tributària en t es distribueix igualitàriament entre tots els que són grans en t (sistema de pensions de repartiment). Cada individu gran rebrà $\tilde{\tau}$. Els rics joves poden dedicar una part x de la seva dotació de treball tractant d'evadir el pagament de l'impost. Quan un ric esmerça x per a defraudar el pagament, acaba pagant $\tau \cdot g(x)$ en comptes de τ, on $g(x) = \left(1 - \frac{x}{4}\right)^2$.

En cada període t, el pressupost del govern està equilibrat: els ingressos tributaris obtinguts dels rics són iguals a les transferències fetes als grans ($100 \cdot \tilde{\tau}$). Els ingressos provinents dels rics no són necessàriament $50 \cdot \tau$ perquè cal determinar el nivell d'evasió fiscal que decideixen els rics. Troba l'equació que determina $\tilde{\tau}$ en funció de τ i calcula $\tilde{\tau}$ quan $\tau = 1$.

6. Sostenibilitat

Només hi ha un bé, que pot acumular-se d'un període cap a un altre en forma de capital i que pot produir-se combinant els factors treball i capital. Si en el moment t un individu acumula l'estoc k_t de capital, aleshores en el moment $t+1$ estarà disponible només l'estoc $(1-\delta) \cdot k_t$, on $0 < \delta < 1$. Cada generació està formada per n individus idèntics, amb la funció d'utilitat de jove $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$. La funció d'utilitat de cada individu gran coincideix amb el seu consum. Els individus prenen decisions per a maximitzar la seva funció d'utilitat.

Cada individu disposa d'una unitat de treball de jove i cap unitat de gran. Es necessita capital per a què el treball pugui contribuir a la producció del bé. Els individus joves empren tot el seu treball en la producció del bé. En emprar tot el seu treball per a produir el bé, cada individu que és jove en t aconsegueix produir $a \cdot (1-\delta) \cdot k_t$, on $a > 0$ és una constant i k_t és l'estoc de capital mitjà acumulat en el moment $t-1$ i disponible en el moment t (atès que hi ha el mateix nombre d'individus en cada generació, k_t és el capital que cadascun dels individus va acumular en $t-1$). Cada individu jove decideix quina part de la producció que realitza la consumeix i quina part l'acumula en forma de capital. El consum de cada individu gran en el període t coincideix amb la part no depreciada del capital que el mateix individu va acumular en el període $t-1$.

(i) Determina l'equació que expressa la trajectòria d'acumulació del capital i representa-la gràficament.

(ii) Considera la següent modificació de l'economia. Hi ha un recurs lliure i gratuït X que és necessari per a produir el bé. Sigui x_t la quantitat de recurs existent en el moment t. Cada unitat de capital emprada en la producció comporta la pèrdua d'α unitats d'X. El recurs X té la capacitat de regeneració: si y_t representa la quantitat d'X disponible un cop descomptada la pèrdua causada pel procés de producció, aleshores hi ha $y_t \cdot (1+\beta)$ unitats del recurs en $t+1$, on $\beta > 0$. Assumint que $\alpha = \delta$ i que $\beta = \alpha/2$, determina el valor màxim $\bar{a}$ que pot assolir a per a què el procés productiu no esgoti X. Com es veu afectat $\bar{a}$ per canvis en α?

7. Independència

Hi ha únicament un bé, que pot acumular-se només un període en forma de capital (sense depreciació) i que pot produir-se combinant els factors treball i capital. Cada generació està integrada per dos grups, G1 i G2. G1 està format per $2 \cdot n$ individus idèntics, cadascú amb una unitat de treball de jove i dues unitats de treball de grans. La funció d'utilitat de cada jove de G1 en el període t és $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^{\beta}$, on $0 < \beta < 1$. La funció d'utilitat de cada individu gran coincideix amb el seu consum. G2 està constituït per n individus idèntics, cadascú amb quatre unitats de treball de jove i dues unitats de treball de grans. La funció d'utilitat de cada jove de G2 en t és $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$. La funció d'utilitat de cada individu gran coincideix amb el seu consum.

La funció de producció de l'economia en cada període t és $Y_t = K_t \cdot L_t$, on K_t és el capital total en el moment t i L_t és el volum total de treball ofert en t. Tots els individus d'ambdós grups ofereixen el seu treball, tant de joves com de grans. La remuneració del capital és la meitat de la productivitat marginal del capital. La remuneració del treball és la meitat de la productivitat marginal del treball. S'assumeix que, per arbitratge, la taxa d'interès d'un préstec en el moment t coincideix amb la remuneració del capital en el moment $t+1$.

(i) Determina l'equació que descriu la trajectòria d'acumulació del capital i representa-la gràficament.

(ii) Imagina que els membres de G2 s'independitzen i constitueixen una economia pròpia, separada de l'economia que formarien els membres de G1. En cada economia es mantenen les dotacions dels membres dels grups respectius, la funció de producció de l'economia original i les regles que determinen les remuneracions dels factors. Determina l'equació que representa la trajectòria d'acumulació del capital de cada economia i compara-la amb l'obtinguda en l'apartat (i) per a jutjar si a algun dels grups li convé la secessió.

(iii) Respon a (i) i (ii) si la funció de producció és $Y_t = {K_t}^{1/2} \cdot {L_t}^{1/2}$ (però ara la remuneració de cada factor coincideix amb la seva productivitat marginal).

8. Cicles

Hi ha un únic bé que es pot acumular un període. Cada període hi ha n individus idèntics que viuen dos períodes consecutius i que de joves tenen la funció d'utilitat $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove i c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran. Els individus que neixen en un període senar tenen la dotació de factor treball $(1,1)$: una unitat de treball de joves i una unitat de grans. Els individus que neixen en un període parell tenen la dotació de factor treball $(2, 2)$: dues unitats de treball de joves i dues unitats de grans. La funció de producció agregada en el període t és $Y_t = K_t \cdot L_t$, on K_t és l'estoc total de capital en t i L_t és la quantitat total de treball disponible en t. Cada factor de producció rep com a remuneració la meitat de la seva productivitat marginal segons la funció de producció agregada. Determina l'equació que descriu la trajectòria d'acumulació de l'estoc de capital i troba els estats estacionaris.

9. Globalització

Hi ha dues economies, E1 i E2. En cada economia: (i) hi ha n individus idèntics i el mateix bé, que es pot acumular un període i es pot produir; i (ii) cada factor de producció es remunera segons la seva productivitat marginal en la funció de producció agregada.

La dotació de treball dels membres d'E1 és $(2, 1)$: dues unitats de treball de jove i una de gran. Cada jove d'E1 té funció d'utilitat $u_t = c_t^{\beta} \cdot c_{t+1}$, on $0 < \beta < 1$ és una constant, c_t és el consum que l'individu fa de jove i c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran. La funció de producció agregada en el període t és $Y_t = 2K_t + L_t$, on K_t és l'estoc total de capital en t i L_t és la quantitat total de treball disponible en t..

La dotació de treball dels membres d'E2 és $(1, 0)$: una unitat de treball de jove i cap de gran. Cada jove d'E2 té funció d'utilitat $u_t = c_t \cdot c_{t+1}^{\beta}$, on $0 < \beta < 1$ és la mateixa constant d'E1, c_t és el consum que l'individu fa de jove i c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran. La funció de producció agregada en el període t és $Y_t = 2K_t + L_t$, on K_t és l'estoc total de capital en t i L_t és la quantitat total de treball disponible en t.

(i) Per a cada economia, determina l'equació que descriu la trajectòria d'acumulació de l'estoc de capital i l'estoc de capital a tot estat estacionari.

(ii) Suposa que els membres de les dues economies s'emparellen, de manera que cada membre d'E1 ha de transferir $1/8$ unitats de capital a la seva parella d'E2. Torna a calcular, només per a l'economia E2, l'equació que descriu la trajectòria d'acumulació de l'estoc de capital i l'estoc de capital a tot estat estacionari. Sobre la base dels resultats, fes una anàlisi crítica de la transferència com a mesura de política econòmica per a contribuir a la prosperitat d'E2.

(iii) Determina l'equació que descriu la trajectòria d'acumulació de l'estoc de capital i l'estoc de capital a tot estat estacionari si les dues economies s'integressin i formessin una de sola.

10. Igualtat

Hi ha un bé, que no pot acumular-se d'un període cap a un altre ni produir-se. Cada generació està formada per dos grups: G1 (integrat per n individus idèntics) i G2 (constituït per m individus idèntics). La funció d'utilitat de cada jove de G1 és $u_t = (c_t)^{\beta} \cdot c_{t+1}$ i la de cada jove de G2 és $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^{\beta}$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove, c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran i $\beta > 0$. Cada individu de G2 té, com a dotació, zero unitats del bé de jove i una unitat del bé de gran. Cada individu de G1 té, com a dotació, una unitat del bé de jove i zero unitats del bé de gran.

(i) Determina l'equilibri general i l'efecte sobre la utilitat d'un membre de G1 d'un augment d'n.

(ii) Calcula la quantitat τ del bé que cada jove de G1 ha de rebre o pagar de manera que, quan l'import $n \cdot \tau$ es distribueix igualitàriament entre els joves de G2, la utilitat de tots els joves de tots dos grups és la mateixa en l'equilibri general.

11. Capital per sempre

En l'economia només hi ha un bé, que pot acumular-se indefinidament. Cada generació està formada per individus idèntics. La funció d'utilitat de cada jove és $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove i c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran. La funció d'utilitat de cada individu gran coincideix amb el seu consum.

Cada individu té, com a dotació, una unitat de treball de jove i cap de gran. Amb cada unitat de treball es produeixen α unitats del bé. Cada unitat de capital que un individu acumula de jove es transforma en β unitats del bé en el període següent. A més, del total de capital acumulat en el període t es preserva la proporció δ per al període $t + 1$. Aquest capital romanent és indistingible del bé que es produeix en $t + 1$ i es distribueix a parts iguals entre els joves del període $t + 1$.

Redacta tu mateix/a les preguntes a respondre i respon-les. En un cas, suposa que la població és sempre constant (amb n membres) i en un altre que creix a la taxa $n > 0$.

12. Capital humà

Només hi ha un bé, que no pot acumular-se d'un període cap a un altre però que es pot produir-se combinant els factors treball i capital humà. La funció de producció de l'economia en cada període t és $Y_t = (H_t)^\alpha \cdot (L_t)^{1-\alpha}$, on $0 < \alpha < 1$, H_t és el capital humà total en el període t i L_t és el volum total de factor treball en t.

Cada generació està formada per n individus idèntics, amb $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$ com a funció d'utilitat de jove, on c_t és el consum que l'individu fa de jove i c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran. Cada individu jove disposa d'una unitat de treball de jove i cap unitat de gran. Cada individu jove en t decideix quina part l_t del seu treball dedica a la producció del bé i quina part $1 - l_t$ destina a la formació de capital humà. La funció de formació de capital humà h_t a partir del treball $1 - l_t$ destinat a formar-lo és $h_t = \theta \cdot (1 - l_t)$, on $\theta > 1$ és una constant. Formar capital humà té un cost: el cost, en unitats del bé, de crear una unitat de capital humà és una constant $\gamma > 0$. El capital humà acumulat de jove es pot fer servir de gran per a produir el bé. La remuneració de cada unitat de capital humà és la productivitat marginal del capital humà. La retribució de cada unitat de treball és la productivitat marginal del treball.

Redacta tu mateix/a les preguntes a respondre i respon-les.

13. Capital i gent

Només hi ha un bé, que pot acumular-se d'un període cap al següent combinant els factors treball i capital. La funció de producció de l'economia en cada període t és $Y_t = K_t \cdot L_t$, on K_t és l'estoc total de capital en el període t i L_t és el volum total de factor treball en t.

Cada generació està formada per individus idèntics, amb la funció d'utilitat $u_t = c_t \cdot c_{t+1} \cdot n_{t+1}$ de jove, on c_t és el consum que l'individu fa de jove, c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran i n_{t+1} és el nombre de fills que cada individu decideix tenir de jove. Cada individu jove disposa d'una unitat de treball de jove i cap unitat de gran. La unitat de treball de cada període t es ven a canvi d'un salari ω_t.

Cada jove decideix quants fills tenir i quina part del salari acumular en forma de capital. El cost de tenir cada fill és $\gamma > 0$ unitats del bé. El capital acumulat de jove en t es ven de gran en $t+1$ a canvi d'un preu σ_{t+1}. Cada període la proporció de la producció total destinada a pagar salaris és la mateixa que la proporció destinada a remunerar el capital.

Determina l'equilibri general de cada període, les trajectòries d'acumulació de capital i de creixement de la població, i determina els estats estacionaris de l'economia.

14. Comerç internacional

Hi ha dues economies, E1 i E2. Hi ha dos béns, C i D. En cada economia i cada període hi ha el mateix nombre n d'individus idèntics, que viuen un període. Cada individu disposa d'una unitat de treball, que pot destinar a produir qualssevol dels dos béns. En E1: (i) la quantitat l de treball pot produir $\alpha \cdot l$ unitats del bé C, on $\alpha > 1$; i (ii) la quantitat l de treball pot produir l unitats del bé D. En E2: (i) la quantitat l de treball pot produir $\alpha \cdot l$ unitats del bé D (el paràmetre α és el mateix que el d'E1); i (ii) la quantitat l de treball pot produir l unitats del bé C.

L'economia E1 pot exportar bé C a l'economia E2 a canvi de bé D (per tant, E2 pot exportar D a canvi de C). La relació d'intercanvi és d'u a u: una unitat de C s'intercanvia sempre per una unitat de D. La funció d'utilitat de cada membre d'E1 és $u_{1t} = c_{1t} \cdot \left(d_{1t} + \tilde{d}_t\right)^2$, on c_{1t} és el consum que l'individu fa del bé C (per força, produït a E1), d_{1t} és el consum que ell mateix fa del bé D produït a E1 i $\tilde{d}_t$ és el consum que l'individu fa del bé D importat d'E2. La funció d'utilitat de cada membre d'E2 és $u_{2t} = (c_{2t} + \tilde{c}_t)^2 \cdot d_{2t}$, on d_{2t} és el consum que l'individu fa del bé D (per força, produït a E2), c_{2t} és el consum que ell mateix fa del bé C produït en E2 i $\tilde{c}_t$ és el consum que l'individu fa del bé C importat d'E1.

(i) Determina l'equilibri general de cada economia si les economies són autàrquiques.

(ii) Determina l'equilibri general de cada economia si hi ha comerç internacional i avalua en quina economia els individus guanyen proporcionalment més en el trànsit d'una economia tancada a una d'oberta.

(iii) Suggereix alguna altra pregunta a respondre.

15. Convergència i divergència

Hi ha un únic bé que es pot produir i acumular un període. Cada període neixen n individus idèntics, que viuen dos períodes consecutius. La funció d'utilitat en t d'un individu nascut en t és $u_t = (c_t)^\beta \cdot c_{t+1}$, on $\beta > 1$. La funció d'utilitat en $t+1$ d'un individu nascut en t és $u_{t+1} = c_{t+1}$. Quan neix, tot individu disposa d'una unitat de treball; no en té cap en el següent període. En el seu primer període de vida els individus lloguen el seu treball a canvi d'un salari. El salari rebut és la productivitat marginal del treball segons la funció de producció agregada $Y_t = {K_t}^{1/2} \cdot {L_t}^{1/2}$. La remuneració dels propietaris de capital és la productivitat marginal del capital.

(i) Determina l'equació d'acumulació de capital i troba els estats estacionaris.

(ii) Hi ha una segona economia idèntica a l'anterior, excepte pel fet que $Y_t = {K_t}^{2/3} \cdot {L_t}^{1/3}$. Els individus vells de la primera economia tenen la possibilitat de dur part del seu capital a l'altra economia sense cap cost. Calcula quina part de l'estoc de capital de la primera economia es transfereix a la segona en els estats estacionaris.

16. Cicle demogràfic

Hi ha un únic bé que es pot produir i acumular d'un període al següent. En cada període senar neixen n individus idèntics. En cada període parell neixen $2 \cdot n$ individus idèntics. Cada individu viu dos períodes consecutius, neix amb una unitat de treball i no té cap dotació en el seu segon període de vida. Per a tot període t, la funció d'utilitat de tot individu nascut en t és $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$. L'objectiu de tot individu en el seu segon període de vida és maximitzar el seu consum.

En el seu primer període t de vida cada individu lloga el seu treball a canvi d'una remuneració. Aquesta remuneració es pot emprar en consumir i en acumular capital. El capital que un individu va acumular en el període anterior no es pot consumir en el període present sinó que només serveix per a produir. Els individus vius en $t+1$ nascuts en t apleguen tot el seu capital i contracten treballadors per a produir el bé segons la funció de producció agregada $Y_{t+1} = K_{t+1} \cdot L_{t+1}$, on K_{t+1} és el capital total acumulat pels individus en el període anterior i L_{t+1} és la quantitat de treball oferta pels nascuts en $t+1$. La producció del bé feta en cada període es distribueix igualitàriament entre tots els individus vius en el període.

Determina l'equació d'acumulació de capital i identifica els estats estacionaris.

17. Govern

Hi ha un únic bé que no es pot produir però sí acumular un període. Cada període neixen n individus idèntics que viuen dos períodes consecutius. Els individus només tenen dotació del bé en el seu primer període de vida: una unitat del bé. Les funcions d'utilitat d'un individu nascut en t són: en t, $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$; en $t+1$, $u_{t+1} = c_{t+1}$. La quantitat de bé que acumulen els individus té una taxa de depreciació del 25%: si un individu acumula k unitats del bé en t només disposarà en $t+1$ de $3 \cdot k/4$ unitats en $t+1$. Hi ha un govern que estableix un impost cada període de τ unitats del bé.

(i) El govern pot acumular l'impost sense patir cap depreciació. L'impost en t el paguen els que neixen en t. La recaptació del l'impost en t es distribueix igualitàriament en $t+1$ entre els individus que van néixer en t. Obté el volum de capital que acumula cada individu.

(ii) Obté el volum de capital que acumula cada individu si el govern distribueix la recaptació de l'impost feta en t de manera igualitària entre els individus vius en t nascuts en $t-1$. Quina de les dues polítiques maximitza el benestar dels individus?

(iii) En la situació descrita en (i), troba el valor de τ que maximitza la utilitat dels individus en el seu primer període de vida i el valor que maximitza la utilitat dels individus en el seu segon període.

18. Famílies

Hi ha un únic bé, que es pot produir i acumular d'un període al següent. Els individus que neixen en el període t són tots idèntics i viuen dos períodes consecutius. La funció d'utilitat de tot individu que neix en el període t és $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^\beta$, on $\beta > 0$. Aquest mateix individu disposa d'una unitat de treball, que ofereix a canvi d'un salari ω_t. Aquest salari es pot emprar en consumir, en acumular capital i en tenir fills. El cost (en termes del bé) per fill és $\gamma > 0$.

En el segon període de vida els individus maximitzen el seu consum. El capital que un individu va acumular en el període anterior no es pot consumir en el període present sinó que només serveix per a produir. Cada individu nascut en t té accés, en el període $t+1$, a la funció de producció $y_{t+1} = (k_{t+1})^\alpha \cdot (n_{t+1})^\beta$, on k_{t+1} és el capital que l'individu va acumular en el període t i n_{t+1} és el nombre de fills que l'individu va tenir en el període t. Una interpretació és que els treballadors que un individu contracta són els seus fills. Per a tot període t, el pagament en salaris que fa cada individu i (nascut en el període anterior) és una proporció fixa ϕ de la producció que fa i mitjançant la funció de producció. Determina l'equació d'acumulació de capital i l'equació que estableix l'evolució del nombre de fills.

19. Canvi de tecnologia

Hi ha un únic bé que es pot produir i acumular d'un període al següent. Cada període neixen n individus idèntics, que viuen dos períodes consecutius. La funció d'utilitat de tot individu que neix en el període t és $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^\beta$, on $\beta > 0$. Aquest mateix individu disposa d'una unitat de treball, que ofereix a canvi del salari competitiu. De gran, l'individu no té dotació de treball. En tot període senar t la funció de producció agregada és $Y_t = {K_t}^{1/3} \cdot {L_t}^{2/3}$, on K_t és el capital total acumulat pels individus en el període anterior i L_t és la quantitat de treball oferta pels nascuts en $t+1$. En tot període parell t la funció de producció agregada és $Y_t = {K_t}^{2/3} \cdot {L_t}^{1/3}$. Troba la trajectòria d'acumulació del capital i els estats estacionaris.

20. Canvi de preferències

Hi ha un únic bé que es pot acumular d'un període al següent. La taxa de depreciació del bé que s'acumula és $0 < \delta < 1$. No hi ha producció. En un període senar neixen n individus idèntics que viuen dos períodes consecutius. En un període parell neixen $2 \cdot n$ individus idèntics que viuen dos períodes consecutius. La dotació de cada individu nascut en un període senar són dues unitats del bé. La dotació de cada individu nascut en un període parell és una unitat del bé. Cap individu gran no té dotació de treball. La funció d'utilitat de cada individu jove nascut en un període senar és $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$. La funció d'utilitat de cada individu jove nascut en un període parell és $u_t = ln\, c_t + \beta \cdot c_{t+1}$, on $\beta \neq 1$. Troba l'equilibri general de l'economia i la trajectòria d'acumulació de capital.

21. Tema lliure

Construeix una economia que contingui algun element no considerat en els apunts o en els exercicis, proposa preguntes rellevants a respondre i troba les seves respostes.

22. Dotació variable

Només hi ha un bé, que pot acumular-se un únic període en forma de capital. De cada unitat de bé acumulada com a capital en un període només la fracció $a < 1$ està disponible en el període següent. Tota generació està formada per n individus idèntics que viuen dos períodes consecutius. La funció d'utilitat de cada individu que és jove en el període t és $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^{\beta}$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove, c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran i $\beta > 0$ és una constant. En el període inicial, cada individu gran té una unitat de bé com a dotació (interpreta aquesta unitat de bé com el capital que hauria acumulat aquest individu si hagués estat jove). En la resta de períodes els grans no tenen dotació del bé.

(i) Suposa que cada individu jove té una unitat de bé de dotació i, a més, té com a dotació el capital que, de mitjana, van acumular els joves del període anterior. Determina quant capital acumula cada individu de jove, la trajectòria d'acumulació de l'estoc total de capital i els valors positius de l'estoc total de capital en tots els estats estacionaris.

(ii) Quina diferència provoca en els resultats d'(i) si els joves del període inicial només tenen una dotació d'una unitat del bé?

(iii) Torna a respondre les qüestions d'(i) si cada individu jove té com a dotació únicament la mitjana del capital que van acumular els joves del període anterior (per als joves del període inicial, suposa que la seva dotació coincideix amb la dotació dels grans del període inicial).

(iv) Considera novament la situació descrita en (i). Imagina que un dictador benevolent pogués escollir per compte dels individus el capital que acumulen. Torna a respondre les qüestions d'(i) si l'objectiu del dictador fos maximitzar la utilitat de cada jove en cada període.

(v) Torna a respondre a (iv) assumint la situació descrita en (iii) en comptes de la descrita en (i).

23. Retribucions proporcionals

Només hi ha un bé, que pot acumular-se un únic període en forma de capital. Tota generació està formada per n individus idèntics que viuen dos períodes consecutius. La funció d'utilitat de cada individu que és jove en el període t és $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^{\beta}$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove, c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran i $\beta > 0$ és una constant. La funció de producció de l'economia en cada període t és $Y_t = {K_t}^{\alpha} \cdot {L_t}^{\theta}$, on K_t és l'estoc total de capital en el període t, L_t és el volum total de factor treball en t, i α i θ són constants positives. Cada jove té, com a dotació, x unitats de treball; de gran, no té cap dotació. Per a tot període t, el quocient entre la remuneració ω_t del treball i la remuneració σ_t del capital és una constant a; això és, per a tot t, $\omega_t = a \cdot \sigma_t$. A més, per a tot t, $Y_t = \sigma_t \cdot K_t + \omega_t \cdot L_t$.

(i) Determina quant capital acumula cada individu de jove, la trajectòria d'acumulació de l'estoc total de capital i els valors positius de l'estoc total de capital en tots els estats estacionaris.

(ii) Torna a respondre (i) si, en comptes de tenir $\omega_t = a \cdot \sigma_t$, es compleix, per a tot t, la condició $\sigma_t \cdot K_t = \omega_t \cdot L_t$.

(iii) Torna a respondre (i) si el capital té una taxa de depreciació δ: per cada unitat de bé acumulada en forma de capital en t per a ser emprada en $t + 1$, només està disponible per a emprar-la en la producció del bé la quantitat $1 - \delta$, on δ està entre 0 i 1.

24. Producció afitada

Només hi ha un bé, que pot acumular-se un únic període en forma de capital. Tota generació està formada per n individus idèntics que viuen dos períodes consecutius. La funció d'utilitat de cada individu que és jove en el període t és $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^\beta$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove, c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran i $\beta > 0$ és una constant. La funció de producció de l'economia en cada període t és $Y_t = K_t \cdot (1 - K_t) \cdot L_t$, on K_t és l'estoc total de capital en el període t i L_t és el volum total de factor treball en t. Cada jove té, com a dotació, una unitat de treball; de gran, no té cap dotació. Per a tot període t, la remuneració ω_t del treball i la remuneració σ_t del capital satisfan les condicions $Y_t = \sigma_t \cdot K_t + \omega_t \cdot L_t$ i $\sigma_t \cdot K_t = \omega_t \cdot L_t$.

(i) Determina quant capital acumula cada individu de jove, la trajectòria d'acumulació de l'estoc total de capital i els valors positius de l'estoc total de capital en tots els estats estacionaris.

(ii) Torna a respondre (i) si, en comptes de tenir-se que $\sigma_t \cdot K_t = \omega_t \cdot L_t$ es té $\omega_t = a \cdot \sigma_t$.

25. Tecnologies privatives

Només hi ha un bé, que es pot acumular. Cada generació està formada per dos grups, G1 i G2, cadascú format per n individus idèntics. Cada individu té, com a dotació, una unitat de treball de jove i cap de gran. Hom viu dos períodes consecutius. Per a G1, la funció d'utilitat de cada individu que és jove en el període t és $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^\beta$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove, c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran i $\beta > 0$ és una constant. Per a G2, la funció d'utilitat de cada individu que és jove en el període t és $u_t = (c_t)^\beta \cdot c_{t+1}$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove, c_{t+1} el consum que el mateix individu faria de gran i β és la mateixa constant que en les funcions dels membres de G1. Els membres de G1 tenen, col·lectivament, accés a la funció de producció $Y_{1t} = {K_{1t}}^{1/2} \cdot {L_t}^{1/2}$, on K_{1t} és l'estoc total de capital que acumulen els membres joves de G1 del període $t - 1$ i L_t és la quantitat total de treball de l'economia en t. Els membres de G2 tenen, col·lectivament, accés a la funció de producció $Y_{2t} = {K_{2t}}^{1/3} \cdot {L_t}^{2/3}$, on K_{2t} és l'estoc total de capital que acumulen els membres joves de G2 del període $t - 1$ i L_t és la quantitat total de treball de l'economia. Les remuneracions de treball i capital són iguals a les seves productivitats marginals.

(i) Troba el acumulat per cada individu jove de cada grup, la trajectòria d'acumulació de l'estoc total de capital i els valors positius de l'estoc total de capital en tots els estats estacionaris.

(ii) Torna a respondre (i) si la quantitat total de treball es distribueix entre les dues funcions de producció de manera que: (a) $Y_{1t} = K_{1t}^{1/2} \cdot L_{1t}^{1/2}$, on L_{1t} és la quantitat total de treball emprat en la funció de producció de G1 (L_{1t} pot incloure treball aportat per membres de G2); (b) $Y_{2t} = K_{2t}^{1/3} \cdot L_{2t}^{2/3}$, on L_{2t} és la quantitat total de treball emprat en la funció de producció de G2 (L_{2t} pot incloure treball aportat per membres de G1); i (c) la remuneració del treball és la mateixa segons les dues funcions de producció (condició d'arbitratge de salaris).

26. Discriminació salarial

Només hi ha un bé, que es pot acumular. Cada generació està formada per dos grups, G1 i G2. Componen cada grup n individus idèntics. Cada individu té, com a dotació, una unitat de treball de jove i cap de gran. Hom viu dos períodes consecutius. Per a G1, la funció d'utilitat de cada individu jove en el període t és $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^{\beta}$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove, c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran i $\beta > 0$ és una constant. Per a G2, la funció d'utilitat de cada individu jove en el període t és $u_t = (c_t)^{\beta} \cdot c_{t+1}$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove, c_{t+1} el consum que el mateix individu faria de gran i β és la mateixa constant que en les funcions dels membres de G1. La funció de producció és $Y_t = K_t^{\alpha} \cdot L_t^{1-\alpha}$, on K_t és l'estoc total de capital que acumulen els joves del període $t-1$, L_t és la quantitat total de treball de l'economia en t i α és una constant entre 0 i 1. El treball es remunera segons la seva productivitat marginal. La resta de la producció remunera el factor treball, però de manera asimètrica: els membres de G1 reben el doble de salari que els membres de G2.

(i) Troba el acumulat per cada individu jove de cada grup, la trajectòria d'acumulació de l'estoc total de capital i els valors positius de l'estoc total de capital en tots els estats estacionaris.

(ii) Torna a respondre (i) si són els membres de G2 els que reben el doble de salari que els de G1.

27. Fills o capital?

Només hi ha un bé, que es pot acumular. Cada generació està constituïda per dos grups, G1 i G2. Cada individu té, com a dotació, dues unitats de bé de jove i cap de gran. Hom viu dos períodes consecutius. Per a G1, la funció d'utilitat de cada individu que és jove en el període t és $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^{\beta}$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove, c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran i $\beta > 0$ és una constant. Per a G2, la funció d'utilitat de cada individu que és jove en el període t és $u_t = (c_t)^{\beta} \cdot c_{t+1}$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove, c_{t+1} el consum que el mateix individu faria de gran i β és la mateixa constant que en les funcions dels membres de G1. Cada període, G1 està format per m individus idèntics. Els membres de G1 no poden tenir fills, però poden acumular el bé. Els membres de G2 no poden acumular el bé, però poden tenir fills. Acumular capital no té cost i cada unitat acumulada en un període està disponible per a ser consumida el període següent. Tenir fills té un cost de $\gamma > 0$ unitats de bé per fill. Cada fill transfereix una unitat de bé al seu progenitor quan aquest és gran (interpreta que, en el període que es tenen els fills, aquests no són agents econòmicament actius: és com si no existissin).

(i) Determina quant capital acumula cada individu de G1 de jove, la trajectòria d'acumulació de l'estoc total de capital i els valors positius de l'estoc total de capital en tots els estats estacionaris.

(ii) Determina quants fills té cada individu de G2 de jove, la trajectòria de la població de G2 i la població de G2 en tots els estats estacionaris.

28. Vida llarga i vida curta

Només hi ha un bé, que es pot acumular. Cada generació està formada per dos grups, G1 i G2. G1 inclou n membres, els quals viuen dos períodes consecutius. G2 està constituït per m membres, els quals viuen un període. Els membres de G1 no tenen dotació, ni de joves ni de grans. Els membres de G2 tenen com a dotació $x > 0$ unitats de treball, que ofereixen cada període a canvi d'un salari. La funció de producció és $Y_t = {K_t}^{\alpha} \cdot {L_t}^{1-\alpha}$, on K_t és l'estoc total de capital que acumulen els joves del període $t-1$, L_t és la quantitat total de treball de l'economia en t i α és una constant entre 0 i 1. El salari és la productivitat marginal del treball segons la funció de producció. La remuneració del capital es reparteix igualitàriament cada període entre tots els membres de G1. La funció d'utilitat de cada individu jove de G1 en el període t és $u_t = (c_t)^{\beta} \cdot c_{t+1}$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove, c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran i $\beta > 0$ és una constant.

Determina quant capital acumula cada individu de G1 de jove, la trajectòria d'acumulació de l'estoc total de capital i els valors positius de l'estoc total de capital en tots els estats estacionaris.

29. Funció d'utilitat CES

Només hi ha un bé, que es pot acumular. Cada generació està formada per dos grups, G1 i G2, cadascun amb n membres, que viuen dos períodes consecutius. Els membres de G1 tenen com a dotació x unitats de treball de joves i cap de grans; els de G2, cap de joves i x de grans. La funció de producció és $Y_t = {K_t}^{\alpha} \cdot {L_t}^{1-\alpha}$, on K_t és l'estoc total de capital que acumulen els joves del període $t-1$, L_t és la quantitat total de treball de l'economia en t i α és una constant entre 0 i 1. La funció d'utilitat de tot individu jove en el període t és $u_t = \left({c_t}^{\beta} + {c_{t+1}}^{\beta}\right)^{1/\beta}$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove, c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran i $\beta > 0$ és una constant.

Determina quant capital acumula cada individu de jove, la trajectòria d'acumulació de l'estoc total de capital i els valors positius de l'estoc total de capital en tots els estats estacionaris.

30. Despesa pública i producció

Només hi ha un bé, que es pot acumular. Cada generació està formada per n membres. Cada individu viu dos períodes consecutius i té, com a dotació, una unitat de bé de jove i cap de gran. La funció d'utilitat de cada individu jove en el període t és $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^{\beta}$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove, c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran i $\beta > 0$ és una constant. La funció de producció és $Y_t = (\tau \cdot n) \cdot {K_t}^{\alpha} \cdot {L_t}^{1-\alpha}$, on K_t és l'estoc total de capital que acumulen els joves del període $t-1$, L_t és la quantitat total de treball de l'economia en t, τ és un impost que paga cada jove de cada període i α és una constant entre 0 i 1. El salari és la productivitat marginal del treball segons la funció de producció. El preu del capital és la productivitat marginal del treball segons la funció de producció.

(i) Calcula el capital que acumula cada individu de jove, la trajectòria d'acumulació de l'estoc total de capital i els valors positius de l'estoc total de capital en tots els estats estacionaris.

(ii) Respon a (i) si $\tau = 0$ (no es paguen imposts).

(iii) Respon a (i) si $\tau \cdot n$, en comptes de ser la recaptació d'un impost, s'obté amb una emissió de bons emesos pel govern cada període (i venciment al període següent) i el pagament dels bons al venciment es fa mitjançant el refinançament del deute amb més bons.

(iv) Respon a (i) si $\tau = 0$ (no es paguen imposts) i la funció de producció és una d'elasticitat de substitució constant (CES): $Y_t = (\alpha \cdot {K_t}^{\gamma} + (1-\alpha) \cdot {L_t}^{\gamma})^{1/\gamma}$.

31. Ocio y producción

Hay n individuos idénticos. Viven dos períodos consecutivos. Cada individuo joven cuenta con una unidad de factor trabajo. Esta unidad puede emplearse en producir (a cambio de un salario) o en actividades de ocio. La función de utilidad de todo joven en t es $u_t = c_t \cdot c_{t+1} \cdot (1 - x_t)$, donde x_t representa la cantidad de factor trabajo que el individuo joven dedica a la producción. Todo individuo joven puede acumular su salario en forma de capital. Los ingresos de todos los individuos mayores provienen de la venta del capital acumulado en el período anterior. La función de producción agregada en todo t es $Y_t = {K_t}^{\alpha} \cdot L_t$, donde K_t és la cantidad total de capital disponible en t (acumulado en $t-1$), L_t es el volumen total de factor trabajo que los individuos emplean en producir y α es una constante positiva. Para todo t, $Y_t = \sigma_t \cdot K_t + \omega_t \cdot L_t$, donde σ_t es la remuneración por unidad de capital que reciben los que venden capital y ω_t es el salario que reciben los que proveen factor trabajo. Cada período el pago total $\omega_t \cdot L_t$ al factor L es el doble del pago total que recibe el factor K.

Determina qué fracción de su dotación de trabajo emplea en ocio un individuo joven, el volumen de capital que acumula cada individuo joven, la trayectoria de acumulación de la cantidad total de capital, los valores del capital total en todos los estados estacionarios y tanto la producción per cápita como la producción por unidad de trabajo en los estados estacionarios.

32. Globalización

Hay dos economías, E1 y E2. En cada una hay n individuos idénticos. Cada uno de ellos vive dos períodos consecutivos. Todos los individuos cuentan con una unidad de trabajo cuando son jóvenes. Los jóvenes pueden acumular en forma de capital la remuneración por la venta de su trabajo. Este capital acumulado en un período sólo puede utilizarse (para producir) en el período siguiente. K_t es la cantidad total de capital disponible en t (acumulado en $t-1$) y L_t es el volumen total de trabajo. En E1 la función de utilidad de todo joven es $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^{\beta}$, donde $0 < \beta < 1$, y la función de producción es $Y_t = {K_t}^{1/2} \cdot {L_t}^{1/2}$. En E2 la función de utilidad de todo joven es $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$ y la función de producción es $Y_t = K_t \cdot L_t$. En E1 la retribución a los factores de producción es igual a la productividad marginal del factor. En E2 la retribución total que recibe el factor K es el doble de la retribución total que recibe L.

(i) Determina, para cada economía, el volumen de capital que acumula cada individuo joven, la trayectoria de acumulación de la cantidad total de capital, los valores del capital total en todos los estados estacionarios y la producción per cápita en los estados estacionarios.

(ii) Supón que los miembros de E1 pueden, de jóvenes, trabajar en E2, pero el capital que acumulan se empleará en E1. Calcula qué proporción de la población de E1 trabajaría en E2 en cada estado estacionario y compara los precios de los factores con los obtenidos en (i).

(iii) Supón que los miembros de E1 tienen que trabajar en E1 de jóvenes pero, de mayores, pueden vender su capital en E2. Calcula qué proporción de la población de E1 invertiría su capital en E2 en cada estado estacionario y compara los precios de los factores con los obtenidos en (i).

33. Producción

Hay n individuos idénticos. Todo individuo vive dos períodos consecutivos. Existe un único bien, que puede acumularse de un período al siguiente. Cada individuo dispone de x unidades de trabajo cuando es joven, que se ofrecen a cambio de un salario. La función de utilidad de un individuo joven en t es $u_t = (c_t)^\beta \cdot c_{t+1}$, donde $\beta > 1$.

La función de producción agregada en todo t es $Y_t = A \cdot {K_t}^\alpha \cdot {L_t}^{1-\alpha}$, donde K_t es la cantidad total de capital disponible en t (acumulado en $t-1$), L_t es el número total de unidades de trabajo en t, A es una constante positiva y α es una constante entre cero y uno. K y L se remuneran según su productividad marginal.

(i) Calcula el volumen de capital que acumula cada individuo joven, la trayectoria de acumulación de la cantidad total de capital, los valores del capital total en todos los estados estacionarios y la producción per cápita en los estados estacionarios.

(ii) Explica y determina cómo afecta un cambio de A al volumen de capital que acumula cada individuo joven, a la trayectoria de acumulación de la cantidad total de capital, a los valores del capital total en todos los estados estacionarios y a la producción per cápita en los estados estacionarios.

34. Brecha en la acumulación

Hay n individuos idénticos. Todo individuo vive dos períodos consecutivos. Existe un único bien. El bien puede acumularse, pero sólo puede utilizarse dos períodos después: la cantidad de bien que se acumule en el período t sólo es utilizable en $t+2$. Cada individuo joven dispone de una unidad de trabajo, que ofrece a cambio de un salario. Todo individuo joven en t tiene como función de utilidad $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$. La función de producción agregada en todo t es $Y_t = {K_t}^\alpha \cdot {L_t}^{1-\alpha}$, donde K_t es la cantidad total de capital disponible en t (acumulado en $t-2$), L_t es el número total de unidades de trabajo en t y α es una constante entre cero y uno. K y L se remuneran según su productividad marginal.

(i) Calcula el volumen de capital que acumula cada individuo joven, la trayectoria de acumulación de la cantidad total de capital, los valores del capital total en todos los estados estacionarios y la producción per cápita en los estados estacionarios.

(ii) Explica cómo un cambio de α afecta a las respuestas del apartado (i).

35. Separación

Hay un único bien, que no puede acumularse. En cada período hay dos grupos, G1 y G2, el primero con 200 y el segundo con 100 miembros. Todos los individuos viven dos períodos. La función de utilidad de todo joven en t de G1 es $u_t = (c_t)^{\beta} \cdot c_{t+1}$; la de todo joven en G2, $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^{\beta}$. La dotación de cada miembro de G1 es $(w, 0)$; la de cada uno de G2 es $(0, 2w)$.

(i) Calcula el equilibrio general competitivo.

(ii) Si 50 miembros de G1 desean segregarse de la economía, ¿qué número mínimo de miembros de G2 se les deben unir para que esos 50 de G1 tengan más utilidad en el nuevo equilibrio?

36. Tres períodos con producción

Hay un único bien, que puede acumularse. Cada período nacen n individuos idénticos, que viven tres períodos consecutivos. En su primer período de vida la función de utilidad es $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$. En el segundo, $u_{t+1} = c_{t+1} \cdot c_{t+2}$. En el tercero, $u_{t+2} = c_{t+2}$. La única dotación de los individuos es una unidad de factor trabajo cuando son jóvenes. La función $Y_t = {K_t}^{1/2} \cdot {L_t}^{1/2}$ determina la cantidad Y_t de bien que, en cada período t, puede producirse en la economía empleando la cantidad total K_t de bien acumulada en el período anterior (y utilizable en t como capital) y la cantidad total L_t de factor trabajo disponible en t. Los mercados de trabajo y capital son competitivos.

(i) Obtén la trayectoria de acumulación del capital.

(ii) Identifica los estados estacionarios.

37. Hijos y capital

Hay un único bien, que puede acumularse. La función de producción agregada es $Y_t = 2 \cdot {K_t}^{1/2} \cdot {L_t}^{1/2}$. Los individuos viven tres períodos consecutivos. En el primer período son niños y no toman decisiones económicas. En el segundo período, t, la función de utilidad es $u_t = c_t \cdot c_{t+1} \cdot n_{t+1}$, donde n_{t+1} es el número de hijos que el individuo decide tener en t y que son niños en t. En el tercer período la utilidad sólo depende del consumo del período. La única dotación de un individuo es una unidad de factor trabajo en su segundo período. Los mercados de trabajo y capital son competitivos.

(i) Obtén las trayectorias de acumulación del capital total y de la población.

(ii) Determina los correspondientes estados estacionarios.

38. Dos períodos con ciclos de dotaciones

Hay un único bien, que no puede acumularse. Cada período hay dos grupos, G1 y G2. G1 tiene siempre n miembros. El tamaño de G2 varía con cada período según el patrón n, $2{\cdot}n$, $n/2$, n, $2{\cdot}n$, $n/2$, … Todos los individuos viven dos períodos consecutivos. Los miembros de G1 que son jóvenes en el período t tienen la función de utilidad $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^{\beta}$; los de G2, $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$. La dotación de los miembros de G1 es (2, 1). La dotación de los miembros de G2 es (1, 0) cuando G2 tiene n miembros; (0, 1) cuando tiene $2{\cdot}n$; y (1, 1) cuando tiene $n/2$. Calcula el equilibrio general competitivo de la economía.

39. Dos períodos con ciclos demográficos y de dotaciones

Hay un único bien, que no puede acumularse. Cada período hay dos grupos, G1 y G2. En todo período par G1 tiene n miembros y G2 tiene $2{\cdot}n$ miembros. En todo período impar los tamaños se invierten. Todos los individuos viven dos períodos consecutivos. Los miembros de G1 que son jóvenes en t tienen la función de utilidad $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^{\beta}$; los de G2, $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$. En un período par los miembros de G1 tienen la dotación (0, 2); en uno impar, (1, 0). En un período par los miembros de G2 tienen la dotación (1, 0); en uno impar, (0, 2). Calcula el equilibrio general competitivo de la economía.

40. Producción cíclica

Hay un único bien, que puede acumularse. La función de producción agregada es $Y_t = 2 \cdot {K_t}^{1/2} \cdot {L_t}^{1/2}$ si t es par y $Y_t = 3 \cdot {K_t}^{1/3} \cdot {L_t}^{2/3}$ si t es impar. Los mercados son competitivos. Cada período nacen n individuos idénticos, que viven dos períodos consecutivos, tienen como dotación una unidad de factor trabajo en su primer período t y, en t, tienen la función de utilidad $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$.

(i) Obtén la trayectoria de acumulación del capital.

(ii) Identifica los estados estacionarios.

41. Dos economías

Hay dos economías, A y B, y un único bien, que puede acumularse. En cada economía y período nacen n individuos, que viven dos períodos (joven y mayor) y tienen como dotación una unidad de factor trabajo de jóvenes. Los miembros jóvenes de A tienen como función de utilidad $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^{\beta}$, donde β es una constante positiva. Todos los miembros jóvenes en t de B tienen como función de utilidad $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$. La función de producción agregada de ambas economías es $Y_t = {K_t}^{1/2} \cdot {L_t}^{1/2}$. Los mercados de trabajo y capital son competitivos. Los individuos mayores de A son libres de vender en la economía que quieran, sin coste adicional, el capital acumulado de jóvenes (los de B sólo pueden venderlo en B).

(i) Obtén la trayectoria de acumulación del capital de cada economía e identifica los estados estacionarios.

(ii) ¿Qué proporción de los mayores de A venden su capital en B?

(iii) Vuelve a responder la pregunta (i) si los individuos mayores de B son libres de vender su capital en la economía que quieran.

42. Acumulación y préstamos

Hay un único bien. Cada período nacen n individuos idénticos, que viven tres períodos consecutivos y tienen dotación $(1, 0, 0)$. En el primer período de vida la función de utilidad es $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^{\beta}$. En el segundo, $u_{t+1} = c_{t+1} \cdot c_{t+2}$. En el tercero, $u_{t+2} = c_{t+2}$. En el primer período puede acumularse bien por un período; el bien se deprecia totalmente en el segundo período si no se consume. Acumular x unidades del bien en el primer período implica disponer de $\lambda \cdot x$ unidades en el segundo.

(i) Calcula el equilibrio general competitivo de la economía.

(ii) ¿Cuánto acumula cada individuo?

43. Població i producció

Hi ha un únic bé, Y, que no es pot acumular. Tots els individus són idèntics i viuen dos períodes. En el primer període són econòmicament irrellevants. En el segon decideixen quants fills tenir. El bé pot ser produït amb treball L. La funció de producció agregada en el període t és $Y(t) = A \cdot L(t)^{\alpha}$, on α és una constant positiva. Cada individu disposa d'una unitat de treball en el segon període de vida i rep com a renda el valor de la producció per càpita. La funció d'utilitat en el segon període t és $u(t) = c(t)^{\beta} \cdot n(t)^{\delta}$, on $c(t)$ és la quantitat de bé que l'individu consumeix en el període t, $n(t)$ és el nombre de fills que ha triat tenir i β i δ són constants positives. El cost associat amb la tinença i criança de fills és un cost fix de $\gamma > 0$ unitats de bé per fill. Calcula la trajectòria d'acumulació de la població i de la producció i els estats estacionaris corresponents.

44. Migració

Hi ha dues economies amb les característiques descrites en l'exercici 43. L'única diferència és que α és més gran en una que en l'altra. Calcula quanta gent hauria de migrar d'una economia a l'altra per a què, en l'estat estacionari, hi hagi la mateixa població en les dues economies.

45. Dues economies

Hi ha dues economies amb les característiques descrites en l'exercici 43. L'única diferència és que en la segona economia $Y(t) = A \cdot L(t)^{\lambda \cdot \alpha}$ i el valor de γ és el doble que en la primera economia. Calcula el valor de λ que fa que, en l'estat estacionari, hi hagi la mateixa població en les dues economies.

46. Cost dels fills

En l'economia descrita en l'exercici 43, γ és una funció $\gamma(n)$ del nombre de fills, tal que $\gamma'(n) > 0$ i $\gamma''(n) > 0$. Determina la funció que relaciona n amb la renda per càpita i representa-la gràficament.

47. Treball

Hi ha un únic bé que es pot produir amb treball però no acumular. Hi ha dos grups d'individus G1 i G2. G1 té n membres. G2 té m membres. Hom viu dos períodes. Per a tot individu, en el darrer període de vida, la utilitat coincideix amb el consum. En la resta de períodes, és el producte del consum del període amb el consum del període següent. La dotació de treball de cada membre de G1 és (0, 2) i la de cada membre de G2 és (0, 1), on el primer (segon) component de cada vector és la dotació en el primer (segon) període de vida. Cada unitat de treball d'un membre de G1 produeix $\lambda > 0$ unitats del bé. Cada unitat de treball d'un membre de G2 produeix $3 \cdot \lambda$ unitats del bé. Calcula l'equilibri general competitiu.

48. Fills i pensions

Hi ha un únic bé. El bé pot ser produït emprant el factor de producció treball. La funció de producció agregada en el període t és $Y_t = A \cdot {L_t}^{\alpha}$, on Y_t és la quantitat de bé produïda en el període t, L_t és la quantitat de treball emprada en la producció del bé en el període t, α és un número entre 0 i 1 i A representa la contribució d'altres factors a la producció.

Els agents, que aporten treball i duen a terme la producció, s'anomenen camperols. La renda y_t de tot camperol en el seu segon període de vida t és $y_t = Y_t/L_t$. Tots els camperols són idèntics i viuen tres períodes consecutius.

En el seu primer període de vida un camperol és econòmicament inactiu i ha de ser sostingut pel seu progenitor. En el segon període de vida cada camperol decideix quants fills tenir (les famílies són monoparentals); tot camperol esdevé econòmicament actiu i empra tota la seva dotació de treball (una unitat de treball), amb independència de la renda que n'obtingui; la renda de cada camperol es destina a consumir i a criar fills, on el cost associat amb la tinença i criança de fills és un valor fix de $\gamma > 0$ unitats de bé per fill. En el seu tercer període de vida un camperol només consumeix i la seva font de renda és una pensió de p unitats del bé que li paga cadascun dels fills que va tenir en el segon període de vida.

La funció d'utilitat de cada camperol en el seu segon període t de vida és $u_t = c_t \cdot c_{t+1} \cdot n_t$, on c_t és la quantitat de bé que consumeix el camperol en el període t, c_{t+1} és la quantitat de bé que consumeix el camperol en el període següent $t + 1$ (el darrer període de vida del camperol) i n_t és el nombre de fills que el camperol ha triat tenir en el període t.

(i) Determina la trajectòria de creixement de la població i els estats estacionaris d'aquesta trajectòria.

(ii) Determina la trajectòria de creixement de la producció per càpita i els estats estacionaris d'aquesta trajectòria.

49. Acumulació de capital

Hi ha un únic bé, que pot produir-se i acumular-se. Cada període neixen n individus idèntics. Cada individu viu dos períodes consecutius. Hom té les mateixes funcions d'utilitat: en el primer període t de vida, $u_t = (c_t)^{\beta} \cdot c_{t+1}$, on β és una constant positiva, c_t és el consum en el primer període i c_{t+1} és el consum en el segon període de vida; en el segon període $t + 1$, la funció és $u_{t+1} = c_{t+1}$. Tot individu disposa, com a dotació, d'una unitat de treball en el seu primer període i de cap en el segon. La funció de producció agregada en el període t és $Y_t = {K_t}^{\alpha} \cdot {L_t}^{1-\alpha}$, on α és un número entre 0 i 1, L_t és la quantitat total de treball en t i K_t és la quantitat total del bé acumulada en el període anterior (capital).

Cada període, tota la producció es destina a retribuir treball i capital, de manera que la retribució total del treball (salari multiplicat per la quantitat de treball) és el doble de la retribució total del capital (preu del capital per la quantitat de capital).

Determina la trajectòria d'acumulació del capital i els estats estacionaris d'aquesta trajectòria.

50. Khapytal qostosoh

Ai hun húniko vihen, ke puhede produzirse hyh tamvihén akumularhse. Kaddah perúhodoh názen n hyndybiuhos hidéntikos, keh bibhen dhos pehrihodohs qonsequtibos. Hla fu-unzihón dhe utylydad hehn hel prymer perýoh-do éss $u = c \cdot (c')^{\beta}$, don-dhe β hés hunah qonstanntteh possityba, c ehl conshumo hdhehlh prrymher peri-hodo iy c' elh konsumoh dehl sseggunnddoh pheríodoh. hEn Hel seg-u-ndoh pe-ry-od-oh, lA hutylidaad koynzideh konn hhel qonssumho. Qadda hinddibiduho tyhene huna hunydád deh ttravajoh hen hel prymer pheryóhdoh íh nyngunna enh elh seg-unh-dho. Lhah funzzyohn dhe produkzyhon hagrreghadah hes $Y = 2 \cdot K^{1/2} \cdot L^{1/2}$, dhondhe K hes lah qkantydad tohtahl dehh qapytal yh L lah qkantydad tohtahl dehh trrava-joh. Lhohsh merqahdos dhe qapytal hi travajjo sonn qompetytybos.

Hobtéhn lah hekuazión ke defyneh lah trallektórya deh hakumulazyón dhelh kapytal, hih hlosh corrrehspondyentes hestaddosh hestazyonaryos, sy hakumular qapytal tyhene hun kosteh fyjjo dhe λ hunydadhes delh vihehn porh huny-dhadh deh kapytal. (Konsegyr hakhumular k hunydades hen $t + 1$ rhekihere sakrifykar $k + k{\cdot}\lambda$ hunidades dhel vien enh t.)

51. Trres perýodohs hy produkzihón

Ai hun húniko vihen, ke puhede produzirse hyh akumularhse. Kaddah perúhodoh názen n hyndybiuhos hidéntikos, keh bibhen thres pehrihodohs qonsequtibos. Hla fu-unzihón dhe utylydad hehn hel prymer perýoh-do éss $u = c^2 \cdot c'$; hen elh sheghundoh, $u' = c' \cdot (c'')^2$. Qadda hinddibiduho tyhene huna hunydád deh ttravajoh hen hel prymer pheryóhdoh, nyngunna enh elh seg-unh-dho ýhh hunah hen hel terzerho. $Y = K^{1/2} \cdot L^{1/2}$ hehs lah funzzyohn dhe produkzyhon hagrreghadah. Lhohsh merqahdos dhe qapytal hi travajjo sonn qompetytybos.

(i) Hobtéhn lah hekuazión ke defyneh lah trallektórya deh hakumulazyón dhelh kapytal hih hlosh corrrehspondyentes hestaddosh hestazyonaryos.

(ii) Buhelbe ha kontesthar (i) sy hen lhos per-ýodohs pahress nahzen n hyndybiuhos yh enh lhos himpahres nhazhen $2n$.

52. Eksthernahlydades

Ahi hun húnyko vyhen, ke noh puhede produzyrse ný akumularhse. Hahy dhos grruhpos deh hyndybiduhos, G1 yh G2, el prymheroh konh n myhemvros hy hel seghuhndo qon m. Kkadha hyndybiduoh bibhe hdhos pehríhodohs qonsequtibos. Lhos myhemmvrros dhe G1 tyhenen dosh hunydades dhelh vihén hen hel prymer pherhyhodoh ih hunah hen hel seghundoh; losh deh G2, huna yh dhos, respeqtibamenteh. Hla fu-unzihón dhe utylydad hen elh prymer pherhyhodoh deh toddoh myhemvroh de G1 és $u_1 = c_1 \cdot c'_1 - c_2$, dhondeh c_1 hés ehl conshumo pressenteh dhel mihemvro deh G1, c'_1 suh konsumoh fhuthuroh hy c_2 ehl conshumo pressenteh dhe thodoh mihemvro deh G2. Hla fu-unzihón dhe utylydad hen elh prymer pherhyhodoh deh toddoh myhemvroh de G2 és $u_2 = c_2 \cdot c'_2 + c_1$, dhondeh c_2 hés ehl conshumo pressenteh dhel mihemvro deh G2, c'_2 suh konsumoh fhuthuroh hy c_1 ehl conshumo pressenteh dhe thodoh mihemvro deh G1. Qkalkqúlah hélh hekilúvrioh jhenherál qompetytýboh.

53. Fills

Hi ha un únic bé. El bé pot ser produït fent servir emprant el factor de producció treball. La funció de producció agregada en el període t és $Y_t = A \cdot L_t{}^{\alpha}$, on Y_t és la quantitat de bé produïda en el període t; L_t és la quantitat de treball emprada en la producció del bé en el període t; α és un número entre 0 i 1; i A representa la contribució d'altres factors a la producció.

Els agents que aporten treball, i duen a terme la producció, s'anomenen camperols. La producció y_t per camperol en el període t és $y_t = Y_t / L_t$. Tots els camperols són idèntics i viuen tres períodes consecutius.

En el seu primer període de vida un camperol és econòmicament inactiu i ha de ser sostingut pel seu progenitor.

En el segon període de vida cada camperol decideix quants fills tenir (les famílies són monoparentals); tot camperol esdevé econòmicament actiu i empra tota la seva dotació de treball (una unitat de treball), amb independència de la renda que n'obtingui; la renda d'un camperol en el període t és igual a la producció y_t per camperol en el període t; la renda de cada camperol només es pot destinar a consumir i a criar fills, on el cost associat amb la tinença i criança de fills és un valor fix de $\gamma > 0$ unitats de bé per fill.

En el seu tercer període de vida un camperol només consumeix i la seva font de renda és una pensió de p unitats del bé que li paga cadascun dels fills que va tenir en el segon període de vida.

La funció d'utilitat de cada camperol en el seu segon període t de vida és $u_t = c_t \cdot c_{t+1} \cdot n_t$, on c_t és la quantitat de bé que consumeix el camperol en el període t, c_{t+1} és la quantitat de bé que consumeix el camperol en el període $t+1$ (el darrer període de vida del camperol) i n_t és el nombre de fills que el camperol ha triat tenir en el període t.

Respon almenys una de les següents preguntes.

(i) Determina la trajectòria de creixement de la població i els estats estacionaris d'aquesta trajectòria.

(ii) Determina la trajectòria de creixement de la producció per càpita i els estats estacionaris d'aquesta trajectòria.

(iii) Determina la trajectòria de creixement de la producció per càpita i els estats estacionaris d'aquesta trajectòria si, en comptes de rebre una pensió dels fills, els camperols poden acumular renda en el segon període per a ser emprada en el tercer període.

(iv) Determina la trajectòria de creixement de la població i els estats estacionaris d'aquesta trajectòria si els camperols també poden tenir fills en el tercer període de vida i la seva funció d'utilitat en el tercer període és $u_{t+1} = c_{t+1} \cdot n_{t+1}$, on n_{t+1} és el nombre de fills tinguts en el darrer període de vida $t + 1$.

54. Acumulació de capital

Hi ha un únic bé, que pot produir-se i acumular-se. Cada període neixen n d'individus idèntics. Cada individu viu dos períodes consecutius.

Hom té les mateixes funcions d'utilitat: en el primer període t de vida, $u_t = (c_t)^\beta \cdot c_{t+1}$, on β és una constant positiva, c_t és el consum en el primer període i c_{t+1} és el consum en el segon període de vida; en el segon període $t+1$, la funció és $u_{t+1} = c_{t+1}$.

Tot individu disposa, com a dotació, d'una unitat de treball en el seu primer període i de cap en el segon. La funció de producció agregada en el període t és $Y_t = {K_t}^\alpha \cdot {L_t}^{1-\alpha}$, on α és un número entre 0 i 1, L_t és la quantitat total de treball en t i K_t és la quantitat total del bé acumulada en el període anterior (capital).

Cada període, tota la producció es destina a retribuir treball i capital, de manera que la retribució total del treball (salari multiplicat per la quantitat de treball) és α vegades la retribució total del capital (preu del capital per la quantitat de capital).

Respon almenys una de les següents preguntes.

(i) Determina la trajectòria d'acumulació del capital i els estats estacionaris d'aquesta trajectòria.

(ii) Determina la trajectòria d'acumulació del capital i els estats estacionaris d'aquesta trajectòria si la retribució total del capital és α vegades la retribució total del treball.

(iii) Determina la trajectòria d'acumulació del capital i els estats estacionaris d'aquesta trajectòria si la retribució total del capital és $1 - \alpha$ vegades la retribució total del treball.

(iv) Determina la trajectòria d'acumulació del capital i els estats estacionaris d'aquesta trajectòria si la retribució total del treball és $1 - \alpha$ vegades la retribució total del capital.

(v) Determina la trajectòria d'acumulació del capital i els estats estacionaris d'aquesta trajectòria si la retribució total del capital és β vegades la retribució total del treball.

(vi) Determina la trajectòria d'acumulació del capital i els estats estacionaris d'aquesta trajectòria si la retribució total del treball és β vegades la retribució total del capital.

(vii) Determina la trajectòria d'acumulació del capital i els estats estacionaris d'aquesta trajectòria si la retribució total del capital és $\frac{\alpha}{1-\alpha}$ vegades la retribució total del treball.

55. Treball, capital públic i deute

Hi ha un únic bé, que pot produir-se però no acumular-se. Hi ha un govern. Cada període neixen n d'individus idèntics, cadascun dels quals viu dos períodes consecutius.

Hom té les mateixes funcions d'utilitat: en el primer període t de vida, $u_t = (c_t)^\beta \cdot c_{t+1}$, on β és una constant positiva, c_t és el consum en el primer període i c_{t+1} és el consum en el segon període de vida; en el segon període $t + 1$, la funció és $u_{t+1} = c_{t+1}$.

Tot individu disposa, com a dotació, d'una unitat de treball en el seu primer període i de cap en el segon. Hi ha un mercat de treball competitiu, de manera que els individus ofereixen el seu treball a canvi d'un salari igual a la productivitat marginal del treball que correspon a la funció de producció agregada.

La funció de producció agregada en el període t és $Y_t = {K_t}^\alpha \cdot {L_t}^{1-\alpha}$, on α és un número entre 0 i 1, L_t és la quantitat total de treball en t i K_t és la quantitat total del bé que fa de capital.

El capital només el proveeix el govern, que aplega el bé que fa de capital mitjançant l'emissió de títols de deute. Cada període, el govern emet títols que prometen pagar una unitat del bé en el període següent. Els individus poden comprar títols pagant el preu de p unitats del bé per títol. El mercat de deute públic és competitiu: p és un preu que iguala oferta i demanda de títols.

La recaptació (en bé) de cada emissió es dedica a pagar el deute del període anterior i a crear una quantitat fixa K de capital, que s'empra en la producció del bé.

Respon almenys una de les següents preguntes.

(i) Determina la trajectòria d'acumulació del deute públic i els estats estacionaris d'aquesta trajectòria si la pensió es paga als joves de G2.

(ii) Calcula el consum de cada jove i cada gran si l'estoc de capital que proveeix el govern no es finança amb deute públic sinó amb un impost τ que paguen els joves.

(iii) Respon la pregunta (ii) si el govern tria τ per a maximitzar la utilitat dels joves (el valor K es manté constant: és un paràmetre del model).