Préstecs privats i acumulació de capital

1. Descripció de l'economia

• Hi ha un únic bé que es pot produir i acumular.

• Cada període neixen dos grups d'individus, G1 i G2, cadascú amb n membres.

• Hom viu dos períodes consecutius.

• Tot consumidor jove té la funció d'utilitat $u = c \cdot c'$, on és c el consum del bé de jove i c' el consum de gran. Tot consumidor gran té la funció d'utilitat $u' = c'$.

• Hi ha dos factors de producció: 'treball' (el serveis de producció que proporcionen els individus) i 'capital' (bé acumulat que representa mitjans de producció físics). El treball no és acumulable: només es pot fer servir en el període en què se'n disposa. Treball i capital s'intercanvien en mercats competitius. Hi ha mercat de préstecs del bé.

• Els individus tenen una dotació de factor treball. La dotació de cada membre de G1 és (1, 0): una unitat de treball de jove i cap de gran. La dotació de cada membre de G2 és (2, 2): dues unitats de treball de jove i dues de gran.

• Hi ha una funció de producció agregada que indica la quantitat total Y del bé que es produeix durant un període a partir de la quantitat total de treball L disponible en el període i la quantitat total de capital K disponible en el període. L'expressió que defineix la funció de producció en cada període és

$$Y = 2 \cdot K^{1/2} \cdot L^{1/2} .$$

2. Anàlisi

• **Decisió de prestar/manllevar dels joves.** Tot jove s'enfronta al problema de

$$\begin{array}{rl} \text{maximitzar} & u = c \cdot c' \\ \text{sotmès a} & c + l + k' = L \cdot \omega \\ & c' = L' \cdot \omega' + R \cdot l + k' \end{array}$$

on

c és el consum present de l'individu (de jove),
c' és el consum del període següent (de gran),
L és la dotació de treball de jove,
L' és la dotació de treball de gran,
l és el volum de préstecs privats (oferts o demandats),
k' és la quantitat de bé acumulada per al període següent (acumulació de capital),
p és el preu d'un bo (unitats del bé a pagar per bo),
ω és el salari de jove,
ω' és el salari de gran,
σ' és la remumeració del capital de gran,

R és la taxa d'interès bruta.

Dividint per R la segona restricció i sumant-ne les dues, el préstecs privats es cancel·len i el problema es redueix a

$$\begin{array}{rl} \text{maximitzar} & u = c \cdot c' \\ \text{sotmès a} & c + \frac{c'}{R} = L \cdot \omega + \frac{L' \cdot \omega'}{R} + k' \left(\frac{\sigma'}{R} - 1 \right) \end{array}$$

on la restricció representa ara una restricció pressupostària vital.

Si $\sigma' > R$, aleshores no hi ha mercat de préstecs i si $\sigma' < R$ no hi ha acumulació de capital per al futur. Per tant, per a què coexisteixin mercat de préstecs i de capital cal que $\sigma' = R$. En aquest case, la restricció vital es redueix a

$$c + \frac{c'}{R} = w + \frac{w'}{R}$$

on $w = L \cdot \omega$ i $w' = L' \cdot \omega'$. Aquest problema és ja familiar i té com a solució (pel que fa a l'estalvi de jove $s = w - c$)

$$s = \frac{w}{2} - \frac{w'}{2R}.$$

En concret, per a G1,

$$s_1 = \frac{\omega}{2}$$

i, per a G2,

$$s_2 = \omega - \frac{\omega'}{R}.$$

Així doncs, se segueix de la restricció pressupostària de jove que

$$\frac{\omega}{2} = s_1 = l_1 + k_1'$$

$$\omega - \frac{\omega'}{R} = s_2 = l_2 + k_2'.$$

Sumant les equacions,

$$\frac{3\omega}{2} - \frac{\omega'}{R} = s_2 = l_1 + l_2 + k_1' + k_2'.$$

Per la condició d'equibri ($nl_1 + nl_2 = 0$) en el mercat de préstecs i definint $k' = k_1' + k_2'$,

$$\frac{3\omega}{2} - \frac{\omega'}{R} = k'.$$

Per la condició d'igualtat $R = \sigma'$ entre taxa d'interès i remuneració del capital,

$$\frac{3\omega}{2} - \frac{\omega'}{\sigma'} = k' \, .$$

Per la hipòtesi que els mercat de treball i capital són competitius,

$$\omega = \frac{\partial Y}{\partial \omega} = \left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{nk}{5n}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{k}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega' = \frac{\partial Y'}{\partial \omega'} = \left(\frac{K'}{L'}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{nk'}{5n}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{k'}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sigma' = \frac{\partial Y'}{\partial \sigma'} = \left(\frac{L'}{K'}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{5n}{nk'}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{5}{k'}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En resum,

$$\frac{3}{2}\left(\frac{k}{5}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{k'}{5} = k'$$

o

$$\frac{3}{2}\left(\frac{k}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{6}{5}k'$$

o

$$\boxed{k' = \frac{5^{1/2}}{4} k^{1/2} \, .}$$

Aquesta expressió determina el valor de l'acumulació de capital per càpita (de joves) $k' = k_1' + k_2'$. A banda de l'estat estacionari trivial amb $k = 0$ hi ha un estat estacionari amb acumulació de capital on $k^* = 5/16$.

[L'equació d'acumulació de capital pot emprar-se per a establir la dinàmica dels preus dels factors. Específicament, atès que

$$\omega = \left(\frac{k}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

és vàlida per a tot període,

$$\omega' = \left(\frac{k'}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\frac{5^{1/2}}{4}k^{1/2}}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{5^{1/2}}{4}\frac{k^{1/2}}{5^{1/2}5^{1/2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{4}\left(\frac{k}{5}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\omega}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\omega^{1/2}}{2}$$

és l'equació que traça l'evolució del salari. Segons aquesta relació, el salari d'estat estacionari seria $\omega^* = ¼$. Es tracta del mateix valor obtingut substituint el valor estacionari $k^* = 5/16$ del capital en la funció $\omega = \left(\frac{k}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$ que relaciona salari amb capital. Es deixa com a exercici determinar l'equació que determina l'evolució de la remuneració σ del capital.]

Amb tot, la distribució de l'estalvi entre préstecs i acumulació de capital resta indeterminada: hi ha moltes maneres de distribuir l'estalvi entre préstecs i capital compatibles amb la solució d'estat estacionari. De fet, considerant els valors d'estat estacionari, s'ha de complir que

$$l_1 + k_1 = \frac{\omega}{2} = \frac{1}{8}$$

$$l_2 + k_2 = \omega\left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16}$$

$$k_1 + k_2 = k^* = \frac{5}{16}$$

$$l_1 + l_2 = 0.$$

Combinant la primera i la tercera equacions,

$$l_1 + \left(\frac{5}{16} - k_2\right) = \frac{1}{8}.$$

Fent servir la quarta,

$$-l_2 + \left(\frac{5}{16} - k_2\right) = \frac{1}{8}.$$

Així doncs,

$$\frac{5}{16} - \frac{1}{8} = l_2 + k_2$$

que és la segona equació.

Com a conseqüència, el sistema de quatre equacions no és linealment independent. Això implica que hi ha un continu de vectors (l_1, l_2, k_1, k_2) que satisfan les quatre equacions. Per exemple, triant un valor d'l_1 (fent $l_1 = x$), per la quarta equació s'obtindria $l_2 = -x$; per la primera, $k_1 = \frac{1}{8} - x$; i, per la tercera, $k_2 = \frac{5}{16} - k_1 = x + \frac{3}{16}$.

D'aquesta manera, si els joves de G1 volen prestar més, els joves de G2 compensen el capital que els joves de G1 no acumulen quan presten més.