Despesa pública en la funció de producció

1. Descripció de l'economia

• Hi ha un únic bé que es pot produir i acumular.

• Cada període neixen n individus idèntics.

• Hom viu dos períodes consecutius.

• Tot consumidor jove té la funció d'utilitat $u = c \cdot c'$, on és c el consum del bé de jove i c' el consum de gran. Tot consumidor gran té la funció d'utilitat $u' = c'$.

• La dotació de cada individu és una unitat de treball de jove i cap de gran.

• Hi ha un govern que cada període recapta imposts: cada jove paga al govern τ unitats de bé.

• Cada període la producció Y del bé la determina la funció de producció $Y = G \cdot K^{1/2} \cdot L^{1/2}$, on K és la quantitat de bé acumulada el període anterior, L és la quantitat total de treball disponible en el període corrent i G és la despesa pública que fa el govern.

• Cada període el pressupost del govern està equilibrat: $n \cdot \tau = G$.

• El mercat de treball i el mercat de capital són competitius: el salari ω és igual a la productivitat marginal $\frac{\partial Y}{\partial L}$ del treball i el preu σ del capital és igual a la productivitat marginal $\frac{\partial Y}{\partial K}$ del capital.

2. Anàlisi

• **Decisió d'acumular bé dels joves.** Tot jove s'enfronta al problema de

$$\begin{array}{rl} \text{maximitzar} & u = c \cdot c' \\ \text{sotmès a} & c + k' + \tau = \omega \\ & c' = \sigma' \cdot k' \end{array}$$

on

c és el consum present de l'individu (de jove),
c' és el consum del període següent (de gran),
k' és el volum de capital acumulat (i emprat en el període següent),
τ són els imposts a pagar,
ω és el salari corrent i
σ' és el preu del capital en el període següent (que s'assumeix correctament anticipat).

Inserint les dues restriccions en la funció objectiu es tracta de

$$\begin{array}{rl} \text{maximitzar} & u = (\omega - k' - \tau) \cdot \sigma' \cdot k'. \\ \text{respecte de } k' & \end{array}$$

El resultat:

$$k' = \frac{\omega - \tau}{2} \tag{1}$$

que estableix que cada jove acumula en forma de capital la meitat de la quantitat de bé disponible un cop paga l'impost.

• **Dinàmica de l'acumulació de capital.** Per la hipòtesi que el mercat de treball és competitiu

$$\omega = \frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{1}{2} \cdot G \cdot K^{1/2} \cdot L^{-1/2} = \frac{G}{2} \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^{1/2}$$

on $K = n \cdot k$ és el capital total del període, $L = n \cdot 1$ és el treball total del període i G és la despesa pública del període. Per la hipòtesi d'equilibri pressupostari, $G = n \cdot \tau$, i, per tant,

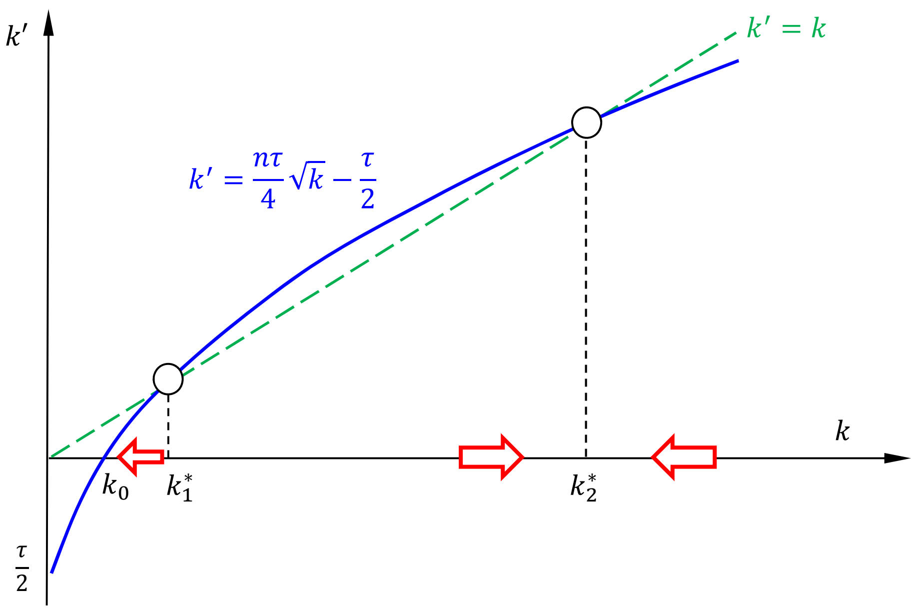
$$\omega = \frac{n \cdot \tau}{2} \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^{1/2} = \frac{n \cdot \tau}{2} \cdot \left(\frac{n \cdot k}{n}\right)^{1/2} = \frac{n \cdot \tau}{2} \cdot k^{1/2}.$$

Inserint l'equació anterior en (1),

$$\boxed{k' = \frac{n \cdot \tau}{4} \cdot k^{1/2} - \frac{\tau}{2}} \tag{2}$$

que és l'equació que traça la dinàmica d'acumulació del capital (per càpita).

La gràfica a continuació representa (2), per a n suficientment gran en relació amb τ.



De (2) és interessant que, donat l'impost τ, cal un volum de població n de joves suficientment gran com per a què hi hagi algun estat estacionari. A més, per a ser viable, l'economia requereix un capital per càpita mínim de k_0.

Si n és prou gran, hi ha dos valors del capital per càpita d'estat estacionari, k_1^* i k_2^* (calcula les expressions que defineixen aquests valors). D'aquests, només el segon (el valor més gran) és estable.

També és destacable el paper positiu que juga la despesa pública. Per la condició d'equilibri pressupostari $n \cdot \tau = G$, (2) equival a

$$k' = \frac{G}{4} \cdot k^{1/2} - \frac{G}{2 \cdot n} = G \cdot \left(\frac{k^{1/2}}{4} - \frac{1}{2 \cdot n} \right)$$

que implica que el capital per càpita (i, per tant, la producció per càpita) depèn positivament de la despesa pública (si es compleix l'aparentment feble condició que $k \cdot n^2 > 4$ o $n > 2/k^{1/2}$).

Per exemple, sense govern (ni impost ni despesa pública) la trajectòria d'acumulació de capital estaria definida per

$$k' = \frac{1}{4} \cdot k^{1/2}$$

amb un valor (positiu) del capital per càpita d'estat estacionari

$$k^* = \frac{1}{16}.$$

En canvi, amb una despesa pública de (per exemple), $G^2 = 32$ el valor (estable) del capital per càpita d'estat estacionari seria superior:

$$k^* = \frac{1}{2}.$$

Aquesta il·lustració mostra que, en el model anterior, el sector públic té una influència positiva en la producció total (i en la producció per càpita).