Préstecs privats i préstecs públics

1. Descripció de l'economia

• Hi ha un únic bé que no es pot produir ni acumular.

• Cada període neixen dos grups d'individus, G1 i G2, cadascú amb n membres.

• Hom viu dos períodes consecutius.

• Tot consumidor jove té la funció d'utilitat $u = c \cdot c'$, on és c el consum del bé de jove i c' el consum de gran. Tot consumidor gran té la funció d'utilitat $u' = c'$.

• La dotació de cada membre de G1 és $(1, 0)$: una unitat de jove i cap de gran. La dotació de cada membre de G2 és $(2, 2)$: dues unitats de jove i dues de gran.

• Hi ha un govern. Cada període el govern emet bons: títols de deute que, a canvi de pagar un preu de p unitats del bé per bo en el període t, prometen pagar (per cada bo comprat en t) una unitat de bé en el següent període $t+1$. Hom creu que el govern pagarà el seu deute. El govern dilapida els ingressos de la primera emissió de bons i el pagament del deute cada període es fa emetent més bons, sense dèficit ni superàvit (el deute públic es refinança amb més deute).

• El mercat de deute públic coexisteix amb un mercat de préstecs privats: cada individu té llibertat per a decidir quina part del seu estalvi col·loca en el mercat de préstecs privats i quina en el mercat de préstecs públics. Ambdós mercats s'assumeixen competitius.

2. Anàlisi

• **Decisió de prestar/manllevar dels joves.** Tot jove s'enfronta al problema de

$$\begin{array}{rl} \text{maximitzar} & u = c \cdot c' \\ \text{sotmès a} & c + l + p \cdot b = w \\ & c' = w' + R \cdot l + b \end{array}$$

on

c és el consum present de l'individu (de jove),
c' és el consum del període següent (de gran),
l és el volum de préstecs privats (oferts o demandats),
b és la quantitat demandada de bons de deute públic,
p és el preu d'un bo (unitats del bé a pagar per bo),
w és la dotació del bé de jove,
w' és la dotació del bé de gran,
R és la taxa d'interès bruta.

Dividint per R la segona restricció i sumant-ne les dues, el préstecs privats es cancel·len i el problema es redueix a

$$\begin{array}{ll} \text{maximitzar} & u = c \cdot c' \\ \text{sotmès a} & c + \frac{c'}{R} = w + \frac{w'}{R} + b\left(\frac{1}{R} - p\right) \end{array}$$

on la restricció representa ara una restricció pressupostària vital.

En el cas sense mercat de bons, la restricció pressupostària vital és

$$c + \frac{c'}{R} = w + \frac{w'}{R}$$

que estableix que el valor descomptat present $c + \frac{c'}{R}$ del consum total coincideix amb el valor descomptat present $w + \frac{w'}{R}$ de la dotació total. Això és, el valor total del consum és igual al valor total de la dotació quan els dos valors s'expressen en unitats del bé d'un mateix període (en aquest cas, bé del període inicial; si tot es mesurés en unitats del bé del període final, es tindria $cR + c' = wR + w'$, que és la mateixa restricció).

Amb bons hi ha un terme addicional $b\left(\frac{1}{R} - p\right)$ que, aparentment, faria possible una discrepància entre el valor del consum i el valor de la dotació: si $b\left(\frac{1}{R} - p\right) > 0$, el valor del consum supera el valor de la dotació; i si $b\left(\frac{1}{R} - p\right) < 0$ el valor del consum és inferior al valor de la dotació.

La taxa R mesura la rendibilitat bruta d'un préstec privat. La rendibilitat bruta d'un préstec públic (la rendibilitat bruta de comprar bons) seria el pagament del bo al venciment (una unitat del bé) dividit pel cost d'obtenir un bo (el seu preu p). Per tant, la rendibilitat bruta de comprar un bo és $1/p$.

Si la rendibilitat R del préstec privat és superior a la rendibilitat $1/p$ del préstec públic, resulta $R > \frac{1}{p}$; o, equivalentment, $p > \frac{1}{R}$. Però essent més rendible el préstec privat, ningú no faria préstecs públics, de manera que $b = 0$. Per tant, tot i que $\frac{1}{R} - p < 0$, el fet que $b = 0$ implica que el terme $b\left(\frac{1}{R} - p\right)$ s'anul·li (cap sorpresa: $c + \frac{c'}{R} = w + \frac{w'}{R}$ és la restricció quan només hi ha préstecs privats).

Si la rendibilitat R del préstec privat és inferior a la rendibilitat $1/p$ del préstec públic, resulta $R < \frac{1}{p}$; o, equivalentment, $p < \frac{1}{R}$. Però essent més rendible el préstec públic, ningú no faria préstecs públics, de manera que $l = 0$ i, en conseqüència, es tractaria de

$$\begin{array}{ll} \text{maximitzar} & u = c \cdot c' \\ \text{sotmès a} & c + p \cdot b = w \\ & c' = w' + b \end{array}$$

o, multiplicant la segona restricció per p i sumant-les,

$$\begin{array}{cl} \text{maximitzar} & u = c \cdot c' \\ \text{sotmès a} & c + c' \cdot p = w + w' \cdot p. \end{array}$$

En aquest cas, tot i que no hi ha un mercat de préstecs privats, es pot definir una taxa d'interès a partir de la rendibilitat del bons. Atès que la rendibilitat dels bons és $1/p$, es pot definir $\tilde{R} = \frac{1}{p}$ com la taxa d'interès bruta de l'economia. D'aquesta definició es conclouria que la restricció vital és

$$c + \frac{c'}{\tilde{R}} = w + \frac{w'}{\tilde{R}}$$

de manera que l'individu continua fent un consum total equivalent en valor a la seva dotació total.

S'analitza a continuació la tercera possibilitat (rendibilitat R del préstec privat igual a la rendibilitat $1/p$ del préstec públic) perquè és l'única on tots dos mercats poden coexistir. Una implicació de la igualtat $R = \frac{1}{p}$ (o el que és el mateix, $p = \frac{1}{R}$) és que

$$c + \frac{c'}{R} = w + \frac{w'}{R} + b\left(\frac{1}{R} - p\right)$$

es redueix a

$$c + \frac{c'}{R} = w + \frac{w'}{R}.$$

En resum, assumint $p = \frac{1}{R'}$, des de la perspectiva de tot jove es tracta de

$$\begin{array}{cl} \text{maximitzar} & u = c \cdot c' \\ \text{sotmès a} & c + \frac{c'}{R} = w + \frac{w'}{R} \end{array}$$

que és el mateix problema que es tindria si només hi hagués el mercat de préstecs. La solució:

$$c = \frac{1}{2}\left(w + \frac{w'}{R}\right)$$

$$c' = cR = \frac{1}{2}(wR + w').$$

Segons la restricció de jove

$$c + l + p \cdot b = w$$

hi ha dues formes d'estalviar: comprant bons al govern o fent préstecs privats. Així, es pot definir l'estalvi s com la dotació no consumida:

$$s = w - c = l + p \cdot b.$$

Com a conseqüència,

$$s = w - c = w - \frac{1}{2}\left(w + \frac{w'}{R}\right) = \frac{1}{2}\left(w - \frac{w'}{R}\right).$$

En particular, la funció d'estalvi d'un jove de G1 és

$$s_1 = \frac{1}{2}\left(w_1 - \frac{w_1{}'}{R}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{0}{R}\right) = \frac{1}{2}$$

i la funció d'estalvi d'un jove de G2 és

$$s_2 = \frac{1}{2}\left(w_2 - \frac{w_2{}'}{R}\right) = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{2}{R}\right) = 1 - \frac{1}{R}.$$

És destacable que aquestes funcions són les mateixes que les obtingudes quan només hi havia mercat de préstecs privats, atès que, en aquell cas, $b = 0$ i la funció d'estalvi es redueix a la funció que determina els préstecs: amb $b = 0$, $s = l + p \cdot b$ esdevé $s = l$ (l'única forma d'estalvi és mitjançant préstecs privats).

Tot recordant la hipòtesi $p = \frac{1}{R}$, n'hi ha prou amb calcular una de les dues variables (per exemple, p). Per a calcular-la, cal recórrer a les condicions d'equilibri competitiu dels dos mercats, de préstecs privats i de bons.

En l'equilibri del mercat de préstecs privats (en la mesura que tota unitat prestada comporta una unitat manllevada i, per tant, el valor agregat de les transaccions és nul)

$$n \cdot l_1 + n \cdot l_2 = 0,$$

on l_1 són els préstecs de cada jove del grup G1 i l_2 són els préstecs de cada jove del grup G2.

En l'equilibri del mercat de bons, la demanda total de bons coincideix amb l'ofertat total B:

$$n \cdot b_1 + n \cdot b_2 = B,$$

on b_1 és la demanda de bons de cada jove del grup G1 i b_2 és la demanda de bons de cada jove del grup G2.

Multiplicant per p la segona condició i sumant-ne-les,

$$n \cdot l_1 + n \cdot l_2 + n \cdot p \cdot b_1 + n \cdot p \cdot b_2 = p \cdot B.$$

Reordenant,

$$n \cdot (l_1 + p \cdot b_1) + n \cdot (l_2 + p \cdot b_2) = p \cdot B$$

o

$$n \cdot s_1 + n \cdot s_2 = p \cdot B.$$

Aquesta condició estableix que el valor de l'emissió de bons coincideix amb el valor de l'estalvi agregat dels joves: l'estalvi dels joves finança l'emissió de bons.

Per la hipòtesi d'equilibri pressupostari, el deute B_{-1} generat en el període anterior es paga amb el valor $p \cdot B$ de l'emissió present de bons. Formalment,

$$p \cdot B = B_{-1}.$$

En suma,

$$n \cdot s_1 + n \cdot s_2 = B_{-1}.$$

Així doncs,

$$n \cdot \frac{1}{2} + n \cdot \left(1 - \frac{1}{R}\right) = B_{-1}.$$

Conclusió:

$$\boxed{R = \frac{2n}{3n - 2B_{-1}}.}$$

D'aquesta fórmula s'obtindria, com a cas particular, la taxa $R = 2/3$ que es va obtenir quan no hi havia mercat de bons ($B_{-1} = 0$). Atès que la fórmula val per a tot període,

$$R' = \frac{2n}{3n - 2B}. \qquad (1)$$

Com que també és cert que

$$n \cdot s_1 + n \cdot s_2 = p \cdot B = \frac{B}{R},$$

resulta que

$$n \cdot \frac{1}{2} + n \cdot \left(1 - \frac{1}{R}\right) = \frac{B}{R}.$$

Això és,

$$B = \frac{3nR}{2} - n.$$

Combinat aquesta equació amb (1),

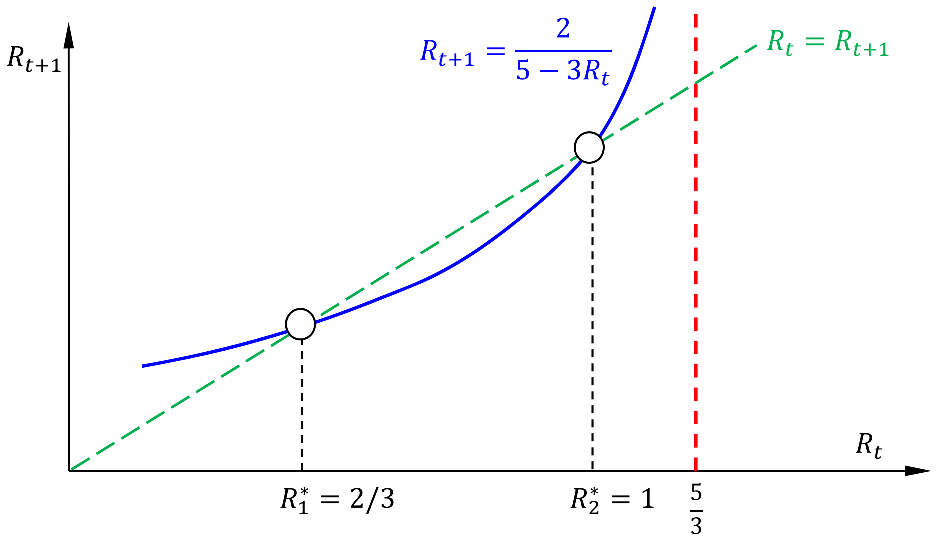
$$R' = \frac{2n}{3n - 2B} = \frac{2n}{3n - 2\left(\frac{3nR}{2} - n\right)} = \frac{2}{5 - 3R}.$$

En notació convencional,

$$\boxed{R_{t+1} = \frac{2}{5 - 3R_t}.}$$

Aquesta equació en diferències traça la dinàmica de la taxa d'interès bruta (i del preu del bo, ja que $p_t = 1/R_t$).

Com a funció que relaciona R_{t+1} amb R_t, és creixent i (per a valors d'R inferiors a 5/3) convexa; vegeu la figura a continuació.



N'hi ha dos de valors estacionaris d'R: $R_1^* = 2/3$ i $R_2^* = 1$. Només $R_1^* = 2/3$ és estable (comprova-ho). A més, només $R_1^* = 2/3$ equilibra el mercat de préstecs privats.

La interpretació és que <u>el deute públic inicial (si no supera certs límits) s'acaba liquidant amb el refinançament del deute, de manera que, eventualment, el mercat del bo desapareix i només queda el mercat de préstecs privats</u> (que té $R = 2/3$ com a taxa perpètua d'equilibri).

Si la taxa d'interès ultrapassés el valor $R = 1$ el deute públic no s'eixagaria amb el refinançament. Ben al contrari, el deute públic s'acumularia fins a superar la capacitat de l'economia de finançar-lo. El resultat seria el col·lapse del mercat de bons: en un cert període el deute públic no es podria pagar.

3. Indeterminació de la distribució de l'estalvi

L'anàlisi anterior determina el volum d'estalvi s_1 i s_2 de cada jove. Es demostra a continuació que no hi ha una única manera de distribuir l'estalvi s_i entre préstecs privats l_i i compra de bons b_i.

Per la definició d'estalvi de cada jove i per la hipòtesi $p = \frac{1}{R}$:

$$s_1 = l_1 + p \cdot b_1 = \frac{1}{2} \tag{2}$$

$$s_2 = l_2 + p \cdot b_2 = 1 - \frac{1}{R} = 1 - p. \tag{3}$$

Per la definició d'equilibri en el mercat de préstecs:

$$n \cdot l_1 + n \cdot l_2 = 0. \tag{4}$$

Per la definició d'equilibri en el mercat de bons:

$$n \cdot b_1 + n \cdot b_2 = B. \tag{5}$$

Sabent p i B, les equacions (2)-(5), en principi, haurien de determinar els valors dels préstecs, l_1 i l_2, i els valors de la demanda de bons, b_1 i b_2. El cas, però, és que les equacions (2)-(5) no són linealment independents, de manera que els valors l_1, l_2, b_1 i b_2, no queden unívocament determinats. Com a resultat, hi haurà, en equilibri, un continu de solucions l_1, l_2, b_1 i b_2.

Per a demostrar que les equacions (2)-(5) no són linealment independents n'hi ha prou amb comprovar que (2), (3) i (5) impliquen (4).

D'entrada, fent servir la condició d'equilibri pressupostari $pB = B_{-1}$, (5) equival a

$$p \cdot n \cdot b_1 + p \cdot n \cdot b_2 = pB = B_{-1}.$$

Això és,

$$p \cdot b_1 + p \cdot b_2 = \frac{B_{-1}}{n}. \tag{6}$$

Sumant (2) i (3),

$$l_1 + p \cdot b_1 + l_2 + p \cdot b_2 = \frac{3}{2} - p.$$

Emprant (6),

$$l_1 + l_2 + \frac{B_{-1}}{n} = \frac{3}{2} - p. \tag{7}$$

Com s'ha obtingut en la secció anterior, en equilibri,

$$R = \frac{2n}{3n - 2B_{-1}}$$

que equival a

$$p = \frac{3}{2} - \frac{B_{-1}}{n}.$$

Combinat aquesta expressió amb (7) s'obté (4).