Fills i producció

1. Descripció de l'economia

• Hi ha un únic bé, que es pot acumular i produir. Inicialment hi ha n individus idèntics.
• Hom viu tres períodes: infantesa, edat adulta i tercera edat. Durant la infantesa s'és econòmicament inactiu, de manera que, en la pràctica, es pot interpretar que hom viu dos períodes.
• Tot adult disposa d'una capacitat productiva (dotació de factor treball), que es normalitza a una unitat. De gran es perd la capacitat productiva (no es té dotació de factor treball).
• La funció de producció agregada cada període és $Y = 2 \cdot K^{1/2} \cdot L^{1/2}$, on K és la quantitat de bé acumulada el període anterior i L és la quantitat total de treball disponible en el període corrent.
• Cada període, els mercats de treball i capital són competitius: el salari ω és la productivitat marginal del factor treball segons la funció de producció agregada i la remuneració σ del capital és la productivitat marginal del factor capital segons la funció de producció agregada.
• Tot adult decideix quants fills tenir. Els fills són infants quan el pare és adult i esdevenen adults el període següent, quan el pare és gran.
• Cada adult té la funció d'utilitat $u = c \cdot c'$, on és c el consum del bé d'adult i c' el consum de gran. Tot individu gran té la funció d'utilitat $u' = c'$.
• Per a cada adult, el cost de tenir un fill és $\gamma > 0$ unitats de bé per fill.
• Cada adult paga la proporció p dels seus ingressos salarials al pare.
• Quina és la trajectòria d'acumulació del capital i la dinàmica de la població?

2. Anàlisi

• **Preus dels factors.** Per la hipòtesi de mercats competitius, per a tot període,

$$\omega = \frac{\partial Y}{\partial L} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot K^{1/2} \cdot L^{-1/2} = \left(\frac{K}{L}\right)^{1/2}$$

$$\sigma = \frac{\partial Y}{\partial K} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot K^{-1/2} \cdot L^{1/2} = \left(\frac{L}{K}\right)^{1/2}.$$

Sigui un període t i sigui m el nombre d'adults en t. Aleshores, l'estoc total K' de capital del període següent serà $m \cdot k'$. Anàlogament, el total d'adults en el període següent serà $m \cdot n'$. Atès que cada adult aporta una unitat de treball, el nombre d'adults del període coincideix amb el volum de treball del període: $L' = m \cdot n'$. En resum, $\frac{K'}{L'} = \frac{m \cdot k'}{m \cdot n'} = \frac{k'}{n'}$. Atès que aquest resultat és vàlid cada període,

$$\omega_t = \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{1/2} = \left(\frac{k_t}{n_t}\right)^{1/2} \tag{1}$$

això és, el salari en el període t depèn del quocient entre el capital que cada adult va acumular en el període anterior i el nombre de fills que cada adult va tenir en el període anterior.

Un argument similar demostra que

$$\sigma_t = \left(\frac{L_t}{K_t}\right)^{1/2} = \left(\frac{n_t}{k_t}\right)^{1/2}. \qquad (2)$$

• **Decisions dels adults.** Tot adult del període t s'enfronta al problema de

$$\begin{array}{lll} \text{maximitzar} & u_t = c_t \cdot c_{t+1} & \\ \text{sotmès a} & c_t + k_{t+1} + \gamma \cdot n_{t+1} + p \cdot \omega_t = \omega_t & \text{(restricció d'adult)} \\ & c_{t+1} = \sigma_{t+1} \cdot k_{t+1} + p \cdot \omega_{t+1} \cdot n_{t+1} & \text{(restricció de gran)} \end{array}$$

on:
c_t és el consum present (d'adult);
c_{t+1} és el consum del període següent (de gran);
k_{t+1} és el volum de capital acumulat en t (i que es farà servir en $t+1$);
n_{t+1} és el nombre de fills que es decideix tenir en t (i que esdevindran adults en $t+1$);
ω_t és el salari en el període t;
ω_{t+1} és el salari en el període $t+1$; i
σ_{t+1} és la remuneració del capital en el període $t+1$.

De la restricció d'adult,

$$c_t = (1-p) \cdot \omega_t - k_{t+1} - \gamma \cdot n_{t+1}.$$

Inserint aquesta equació i la restricció de gran en la funció objectiu, el problema esdevé

$$\text{maximitzar} \quad u_t = ((1-p) \cdot \omega_t - k_{t+1} - \gamma \cdot n_{t+1}) \cdot (\sigma_{t+1} \cdot k_{t+1} + p \cdot \omega_{t+1} \cdot n_{t+1})$$

respecte de k_{t+1} i n_{t+1}. Un cop es descomponen els parèntesis i simplificant la notació, es tracta de

$$\text{maximitzar} \quad u = (1-p)\omega\sigma'k' + (1-p)p\omega\omega'n' - \sigma'(k')^2 - k'p\omega'n' - \gamma n'\sigma'k' - \gamma p\omega'(n')^2.$$

Les condicions de primer ordre (assumint que l'adult pren els preus com a paràmetres):

$$0 = \frac{\partial u}{\partial k'} = (1-p)\omega\sigma' - 2\sigma'k' - p\omega'n' - \gamma n'\sigma'$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial n'} = (1-p)p\omega\omega' - k'p\omega' - \gamma\sigma'k' - 2\gamma p\omega'n'.$$

Segons la primera equació,

$$k' = \frac{(1-p)\omega - \gamma n'}{2} - \frac{p\omega' n'}{2\sigma'}\,. \tag{3}$$

Per la segona,

$$k' = \frac{(1-p)p\omega\omega' - 2\gamma p\omega' n'}{p\omega' + \gamma\sigma'}\,.$$

Igualant-les,

$$\frac{(1-p)\omega\sigma' - n'(p\omega' + \gamma\sigma')}{2\sigma'} = \frac{(1-p)p\omega\omega' - 2\gamma p\omega' n'}{p\omega' + \gamma\sigma'}$$

o

$$(1-p)\omega\sigma'(p\omega' + \gamma\sigma') - n'(p\omega' + \gamma\sigma')^2 = 2(1-p)p\omega\omega'\sigma' - 4\gamma p\omega'\sigma' n'$$

o

$$(1-p)\omega\sigma'(p\omega' + \gamma\sigma' - 2p\omega') = n'((p\omega' + \gamma\sigma')^2 - 4\gamma p\omega'\sigma')$$

o

$$(1-p)\omega\sigma'(\gamma\sigma' - p\omega') = n'((\gamma\sigma')^2 + (p\omega')^2 - 2\gamma p\omega'\sigma'). \tag{4}$$

El costat dret de (4) pot expressar-se com

$$n'(\gamma\sigma' - p\omega')^2$$

o com

$$n'(p\omega' - \gamma\sigma')^2.$$

Si $\gamma\sigma' < p\omega'$ fos el cas, llavors el costat esquerre $(1-p)\omega\sigma'(\gamma\sigma' - p\omega')$ de (4) seria negatiu però el costat dret $n'(p\omega' - \gamma\sigma')^2$ seria positiu. D'aquesta contradicció es conclou que

$$\gamma\sigma' \geq p\omega'.$$

• Cas 1: $\gamma\sigma' > p\omega'$. Això significa que de l'expressió (4) pot cancel·larse el terme positiu $\gamma\sigma' - p\omega'$ per a obtenir

$$(1-p)\omega\sigma' = n'(\gamma\sigma' - p\omega')$$

o

$$\boxed{n' = \frac{(1-p)\omega\sigma'}{\gamma\sigma' - p\omega'}\,.}$$

Així, recuperant els resultats (1) i (2) sobre els preus dels factors,

$$n' = \frac{(1-p)\omega}{\gamma - p\dfrac{\omega'}{\sigma'}} = \frac{(1-p)\omega}{\gamma - p\dfrac{k'}{n'}}$$

o

$$\gamma n' - pk' = (1-p)\omega. \tag{5}$$

Recordant la condició (3),

$$2k' = (1-p)\omega - \gamma n' - pn'\frac{\omega'}{\sigma'}.$$

Per (1) i (2),

$$2k' = (1-p)\omega - \gamma n' - pn'\frac{k'}{n'}.$$

Per tant,

$$\gamma n' + (2+p)k' = (1-p)\omega.$$

Combinat la darrera equació i (5) s'arriba a una contradicció:

$$-p = 2 + p > 0.$$

La conclusió final és que $\gamma\sigma' > p\omega'$ no és possible.

• Cas 2: $\gamma\sigma' = p\omega'$. Això és,

$$\frac{\omega'}{\sigma'} = \frac{\gamma}{p}.$$

Per (1) i (2),

$$\frac{k'}{n'} = \frac{\gamma}{p}.$$

Per (3), (1) i (2), continua sent certa la conclusió

$$\gamma n' + (2+p)k' = (1-p)\omega.$$

Atès que $\frac{k'}{n'} = \frac{\gamma}{p}$,

$$\gamma n' + \frac{\gamma(2+p)}{p}n' = (1-p)\omega.$$

Gràcies a (1),

$$\gamma n' + \frac{\gamma(2+p)}{p}n' = (1-p)\left(\frac{k}{n}\right)^{1/2}.$$

Emprant $\frac{k}{n} = \frac{\gamma}{p}$

$$\gamma n' + \frac{\gamma(2+p)}{p}n' = (1-p)\left(\frac{\gamma}{p}\right)^{1/2}.$$

D'aquí,

$$n' = \frac{(1-p)\left(\frac{\gamma}{p}\right)^{1/2}}{\gamma\left(1 + \frac{2+p}{p}\right)} = \frac{p(1-p)}{2(p\gamma)^{1/2}(1+p)}.$$

Com a conclusió,

$$\boxed{n' = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{\gamma}\right)^{1/2}\frac{1-p}{1+p}.}$$

En paral·lel,

$$k' = \frac{\gamma}{p}n' = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{p}\right)^{1/2}\frac{1-p}{1+p}.$$

• **Mort de l'economia.** Segons l'anàlisi anterior cada període cada adult té $n' = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{\gamma}\right)^{1/2}\frac{1-p}{1+p}$ fills. La viabilitat de l'economia requereix que $n' \geq 1$, ja que $n' < 1$ significa una població contínuament minvant. El cas del col·lapse poblacional té lloc quan

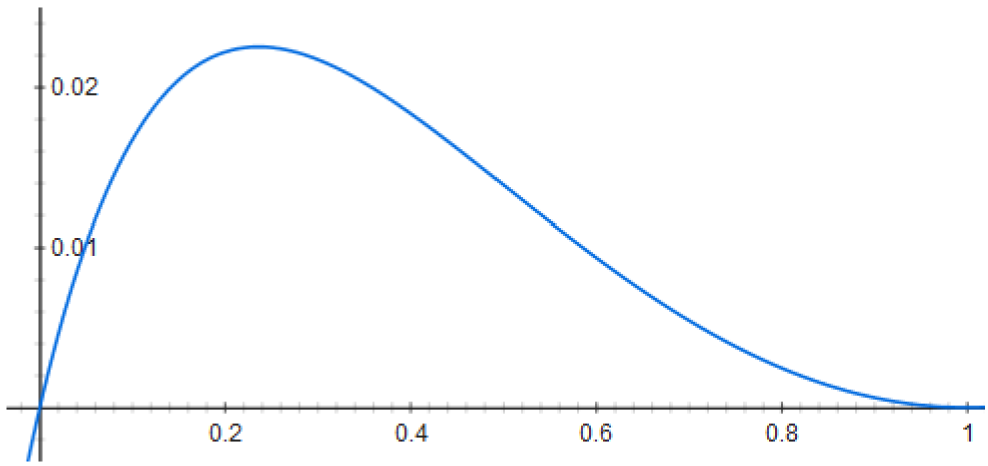
$$\frac{1}{2}\left(\frac{p}{\gamma}\right)^{1/2}\frac{1-p}{1+p} < 1$$

que equival a

$$\boxed{\gamma > \frac{p}{4}\left(\frac{1-p}{1+p}\right)^2.}$$

En conseqüència, un cost de tenir fills suficientment elevat comporta la mort de l'economia.

Atès que p és una proporció (un valor entre 0 i 1), $\frac{1-p}{1+p}$ és inferior a 1. El quadrat de $\frac{1-p}{1+p}$ encara fa el resultat més petit. D'altra banda, $\frac{p}{4}$ representa el 25% de la prestació que cada fill fa al seu pare. Tot plegat suggereix que, en el cas més favorable per a la viabilitat de l'economia n'hi ha prou que el cost de tenir un fill superi el 25% de la prestació (com a proporció dels ingressos) que el fill farà com per a la població declivi sense aturador i l'economia tendeixi a desaparèixer. En realitat, el llindar és força més inferior al 25%: la gràfica a continuació representa (de manera distorsionada) la funció $p \to \frac{p}{4}\left(\frac{1-p}{1+p}\right)^2$, que assoleix un màxim al voltant del 2% del valor màxim de p.



Així doncs, la continuïtat de l'economia requereix que el cost γ de tenir un fill no superi el dos per cent i un escaig del que representa una unitat del bé en l'economia.

Per exemple, si els fills paguen un delme als pares (el 10% dels seus ingressos o $p = \frac{1}{10}$), la població col·lapsa si

$$\gamma > \frac{0.1}{4}\left(\frac{0.9}{1.1}\right)^2 \approx 0.0167.$$

Per tant, si el cost de tenir un fill supera aproximadament l'1,67% del que representa una unitat del bé, la població minva contínuament. Intuïtivament sembla un valor molt petit i, per aquest motiu, fàcil de superar. Com a resultat, la supervivència de l'economia exigiria una inversió suficientment petita en pujar els fills (una implicació aparentment relacionada amb la *conclusió repugnant* d'en Derek Parfit).

3. Extensions

• L'anàlisi anterior assumeix que els individus consideren que les seves decisions no afecten els preus dels factors. Què passaria si entenguessin que aquest no és el cas? La diferència seria el moment en què es fan servir les condicions (1) i (2). En l'anàlisi de la secció anterior, primer es maximitza

$$u_t = ((1-p)\cdot\omega_t - k_{t+1} - \gamma\cdot n_{t+1})\cdot(\sigma_{t+1}\cdot k_{t+1} + p\cdot\omega_{t+1}\cdot n_{t+1})$$

considerant les remuneracions ω_t, ω_{t+1}, σ_{t+1} com a fixes (independents de la pròpia decisió sobre capital i fills) i després s'introdueixen les condicions (1) i (2) que defineixen les retribucions. Si, en canvi, hom és conscient que les remuneracions depenen de les decisions sobre capital i fills, aleshores el procés s'inverteix: primer s'introdueixen les equacions (1) i (2) en la funció objectiu

$$u_t = ((1-p)\cdot\omega_t - k_{t+1} - \gamma\cdot n_{t+1})\cdot(\sigma_{t+1}\cdot k_{t+1} + p\cdot\omega_{t+1}\cdot n_{t+1})$$

i després es maximitza respecte de capital k_{t+1} i fills n_{t+1}.

• L'anàlisi precedent assumeix que els mercats són competitius. Què passaria si es postulessin mecanismes no competitius de formació de les retribucions dels factors? Per exemple, que la remuneració total que reben els factors són un proporció fixa de la producció total.