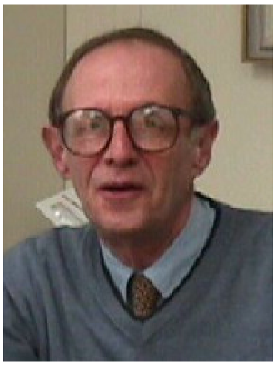
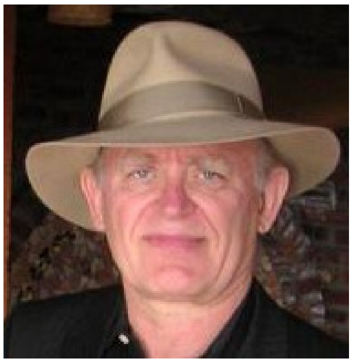
Tema 4. Béns públics

Paul A. Samuelson
(1915)



Edward H. Clarke
(1939)



Theodore Groves
(1942?)

4.1. Provisió eficient d'un bé públic

Definició 4.1.1. Un bé públic és un bé que si està disponible per a un consumidor, està disponible per a tothom, de forma que si un consumidor el consumeix, el poden consumir tots els consumidors.

• En sentit estricte, un bé públic és un bé que no permet excloure del seu consum a cap consumidor: si un consumidor pot consumir una determinada quantitat del bé, la mateixa quantitat la pot consumir qualsevol altre consumidor. Un bé que no és públic s'anomena "privat".
• P.e., les emissions de ràdio o televisió que no estiguin codificades són béns públics: que algú pugui escoltar un programa de ràdio o veure un programa de televisió no impedeix que algú altre els pugui escoltar o veure. En canvi, l'aparell de sintonització que permet escoltar o veure no és un bé públic: quan un veu un programa de televisió a casa seva pot excloure a qui vulgui de veure el programa al seu aparell de televisió.
• Els exteriors d'edificis es poden considerar, fins a cert punt, béns públics: que algú gaudeixi de la visió exterior de la Sagrada Família no impedeix que algú altre també en gaudeixi (sempre i quan no es reuneixin milions de persones al voltant). Per contra, és més difícil considerar els interiors dels mateixos edificis com a béns públics, atesa la seva limitada capacitat.
• En un sentit estricte, un bé públic no es veu afectat per la congestió; això faria que ni interiors ni exteriors d'edificis, carreteres de lliure accés, el coneixement a les biblioteques o Internet es puguessin considerar béns públics. Tanmateix, aquests són béns que, fins que el seu ús no estigui sotmès a congestió, tenen les característiques d'un bé públic; amb la congestió, aquestes característiques es perden.

Remarca 4.1.2. Un bé públic és un cas extrem d'externalitat: els efectes de consumir un bé no s'esgoten en el consumidor que el consumeix, sinó que potencialment s'extenen a tots els consumidors.

Remarca 4.1.3. Com tota externalitat, el béns públics s'enfronten al problema d'un nivell de consum o producció Paretoineficient. A més, els béns públics generen un problemàtica pròpia: el seu finançament. De fet, si un consumidor pot consumir un bé públic només esperant-se a què algun altre consumidor el compri i faci servir, quin incentiu hi ha a pagar per un bé públic? Però si ningú no paga per ell, el bé públic no estarà disponible per a ningú. Com se soluciona aquest dilema?

Definició 4.1.4. Un model de producció i intercanvi amb un bé públic. El següent model es proposa per a analitzar les tres problemàtiques bàsiques associades amb un bé públic: (i) quins són els nivells de producció Paretoeficients del bé?; (ii) quina quantitat del bé públic es produeix si no es fa res per a assolir un nivell Paretoeficient?; i (iii) com es financia aquesta producció?

- Hi ha dos consumidors: el consumidor 1 i el consumidor 2.
- Hi ha dos béns: un bé públic X i un bé privat Y. La variable x representa quantitats d'X i la variable y representa quantitats d'Y.
- El consumidor $i \in \{1, 2\}$ disposa de la quantitat $\tilde{y}_i > 0$ del bé privat Y.
- El bé públic X s'ha de produir a partir del bé privat Y.
- Una funció de producció F especifica la tecnologia productiva que permet obtenir el bé públic a partir del bé privat, de forma que l'equació $x = F(y)$ estableix que la quantitat y del bé privat permet produir la quantitat x del bé públic.
- Per a simplificar, definirem les unitats de mesura del bé públic de forma que una unitat de bé privat permeti produir una unitat de bé públic. Per tant, per a tot y, $F(y) = y$. Això possibilita assumir que els preus d'equilibri dels dos béns siguin iguals. També per a simplificar suposarem que els preus dels dos béns són 1.
- El consumidor $i \in \{1, 2\}$ té una funció d'utilitat quasi-lineal $u_i(x, y_i) = v_i(x) + y_i$, on v_i és una funció creixent, contínua, còncava i derivable tal que $v_i(0) = 0$. La utilitat de cada consumidor i depèn de la quantitat x de bé públic que consumeixen tots dos consumidors (la quantitat x de bé públic apareix a les dues funcions d'utilitat) i de la quantitat y_i de bé privat que el consumidor i, i només ell, consumeix (al consumidor i no li afecta la quantitat que el consumidor $j \neq i$ consumeix del bé privat).

Remarca 4.1.5. Atès que els preus dels dos béns s'assumeixen igual a la unitat, el propòsit inicial del model és determinar el vector (x, y_1, y_2) de quantitats consumides del bé públic i del bé privat.

Definició 4.1.6. El vector (x, y_1, y_2) és factible si, i només si, $x + y_1 + y_2 = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$.

Hipòtesi 4.1.7. L'objectiu del consumidor $i \in \{1, 2\}$ és repartir la seva dotació $\tilde{y}_i$ del bé privat entre consum privat i aportació a la producció del bé públic de manera que es maximitza la seva funció d'utilitat u_i.

Definició 4.1.8. La derivada $dv_i(x)/dx$ de la funció d'utilitat $v_i(x)$ del bé públic del consumidor i és la funció d'utilitat marginal del bé públic del consumidor i i es representa per $v_i'(x)$. El valor $v_i'(x)$ expressa la utilitat obtinguda per i de l'última unitat consumida de bé públic quan la quantitat total consumida de bé públic és x.

Exemple 4.1.9. Sigui $\tilde{y}_1 = 3$, $\tilde{y}_2 = 4$ i, per a tot $x \geq 0$, $v_1(x) = 2\ ln\ (1 + 10x)$ i $v_2(x) = 3\ ln\ (1 + x)$. Aleshores, per a tot $x > 0$, $v_1'(x) = 20/(1 + 10x)$ i $v_2'(x) = 3/(1 + x)$.

Proposició 4.1.10. Condició de Samuelson de provisió Paretoeficient d'un bé públic. La quantitat de bé públic x^* representa un nivell de producció Paretoeficient si, i només si,

$$v_1'(x^*) + v_2'(x^*) = 1. \tag{1}$$

• *Demostració*. Tot vector de consums (x, y_1, y_2) Paretoeficient s'obté resolent el següent problema de maximització, on u_2 es considera un valor arbitràriament fixat:

$$\begin{array}{ll} \underset{\text{respecte d'}x\text{ i }y_1}{\textit{maximitzar}} & u_1(x, y_1) := v_1(x) + y_1 \\ \textit{sotmès a} & x + y_1 + y_2 = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 \\ & v_2(x) + y_2 = u_2 \end{array}$$

De la segona restricció $v_2(x) + y_2 = u_2$, s'obté $y_2 = u_2 - v_2(x)$. Substituint a la primera restricció, resulta $x + y_1 + [u_2 - v_2(x)] = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$. Aïllant y_1 d'aquí, s'obté $y_1 = v_2(x) - x + \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 - u_2$. Substituint aquesta expressió a la funció objectiu $u_1(x, y_1)$, el problema de maximització es redueix a

$$\underset{\text{respecte d'}x}{\textit{maximitzar}} \quad v_1(x) + v_2(x) - x + \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 - u_2.$$

Atès que $\tilde{y}_1$, $\tilde{y}_2$ i u_2 són valors constants (independents d'x), la solució del problema anterior és la mateixa que la solució de

$$\underset{\text{respecte d'}x}{\textit{maximitzar}} \quad v_1(x) + v_2(x) - x.$$

Per la hipòtesi que v_1 i v_2 són derivables i còncaves, el valor que fa màxim $v_1(x) + v_2(x) - x$ és el valor d'x on la derivada de $v_1(x) + v_2(x) - x$ s'anul·la. Per tant, x^* maximitza $v_1(x) + v_2(x) - x$ si, i només si, $v_1'(x^*) + v_2'(x^*) - 1 = 0$. D'aquí, $v_1'(x^*) + v_2'(x^*) = 1$.■

Remarca 4.1.11. La part esquerra $v_1'(x^*) + v_2'(x^*)$ de la condició (1) és la suma de les utilitats marginals del bé públic dels consumidors. La part esquerra és el cost marginal (en termes del bé privat) de produir una unitat de bé públic, ja que cada unitat de bé públic costa (implica perdre) una unitat de bé privat. Així, (1) diu que el nivell de producció Paretoeficient x^* del bé públic és aquell on s'iguala el benefici marginal agregat de consumir x^* i el cost marginal de produir la quantitat x^*.

Remarca 4.1.12. La prova de la condició de Samuelson mostra que el valor Paretoeficient x^* s'obté maximitzant $v_1(x) + v_2(x) - x$, que es pot interpretar com una funció que mesura el benefici agregat net del bé públic.

Exemple 4.1.13. Amb les funcions de l'Exemple 4.1.9, (1) esdevé $\frac{20}{1+10x} + \frac{3}{1+x} = 1$. D'aquí, $10x^2 - 39x - 22 = 0$ i, per tant, $x^* = \frac{39+49}{20} = 4'4$. Aquest resultat pressuposa que hi ha prou estoc de bé privat per a produir la quantitat de bé públic obtinguda. A l'Exemple 4.1.9 l'estoc és suficient, ja que $\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 = 7 > 4'4 = x^*$.

4.2. Finançament privat d'un bé públic i polissons

Hipòtesi 4.2.1. Mantenint el model de l'epígraf anterior, suposem que el bé públic és adquirit privadament per cada consumidor de manera seqüencial: primer el consumidor 1 compra una quantitat de bé públic i després el consumidor 2 compra una altra quantitat.

- Aquesta hipòtesi consisteix en suposar que la provisió del bé públic es realitza mitjançant un mercat competitiu estàndard. Per tant, els preus de tots dos béns continuaran essent 1.
- En tractar-se d'un bé públic, cada quantitat que compra un consumidor la consumeix també l'altre consumidor. Per a simplificar, suposarem que 1 no anticipa la quantitat que comprarà 2.

Remarca 4.2.2. El problema del consumidor 1 és maximitzar la seva funció d'utilitat sotmès a la seva restricció pressupostària amb renda endògena (assumint que el preu de tots dos béns és 1). Formalment, es tracta de

$$\underset{\text{respecte d'}x\text{ i }y_1}{\textit{maximitzar}} \quad u_1(x, y_1) = v_1(x) + y_1$$
$$\textit{sotmès a} \quad 1{\cdot}x + 1{\cdot}y_1 = 1{\cdot}\tilde{y}_1$$

o, equivalentment, atès que $1{\cdot}x + 1{\cdot}y_1 = 1{\cdot}\tilde{y}_1$ implica $y_1 = \tilde{y}_1 - x$, de

$$\underset{\text{respecte d'}x}{\textit{maximitzar}} \quad u_1(x, y_1) = v_1(x) + \tilde{y}_1 - x$$

o, equivalentment, atès que $\tilde{y}_1$ no depèn d'x, de

$$\underset{\text{respecte d'}x}{\textit{maximitzar}} \quad u_1(x, y_1) = v_1(x) - x. \tag{2}$$

Remarca 4.2.3. El problema del consumidor 2 és maximitzar la seva funció d'utilitat sotmès a la seva restricció pressupostària amb renda endògena i donada la quantitat x_1 del bé públic que el consumidor 1 ha decidit comprar, on x_1 és el valor d'x que soluciona (2). Formalment, es tracta de

$$\underset{\text{respecte d'}x\text{ i }y_2}{\textit{maximitzar}} \quad u_2(x + x_1, y_2) = v_2(x + x_1) + y_2$$
$$\textit{sotmès a} \quad 1{\cdot}x + 1{\cdot}y_2 = 1{\cdot}\tilde{y}_2$$

o, equivalentment, de

$$\underset{\text{respecte d'}x}{\textit{maximitzar}} \quad u_2(x + x_1, y_1) = v_2(x + x_1) - x. \tag{3}$$

Proposició 4.2.4. Si x_1 és la solució de (2) i x_2 és la solució de (3), $v_1'(x_1 + x_2) + v_2'(x_1 + x_2) > 1$.

- *Demostració*. La solució x_1 de (2) s'obté d'igualar la derivada de $v_1(x) - x$ a zero. La derivada és $v_1'(x) - 1$. Per tant, x_1 és tal que $v_1'(x_1) = 1$: el consumidor 1 compra bé públic fins que la utilitat de l'última unitat coincideix amb el cost, en termes del bé privat, d'obtenir aquesta darrera unitat de bé públic. En ser v_1 còncava i passar per l'origen, $x_1 > 0$; vegeu la Fig. 1.

La solució x_2 de (3) s'obté d'igualar la derivada de $v_2(x + x_1) - x$ a zero, on x_1 és el valor que satisfà $v_1'(x_1) = 1$. La derivada és $v_2'(x + x_1) - 1$. Per tant, x_2 és tal que $v_2'(x_2 + x_1) = 1$: el consumidor 2 afegeix a l'estoc de bé públic x_1 comprat pel consumidor 1 fins que la utilitat de l'última unitat coincideix amb el cost, en termes del bé privat, d'obtenir aquesta darrera unitat de bé públic.

Si hi ha un valor positiu d'x_2 tal que $v_2'(x_2 + x_1) = 1$, $v_1'(x_2 + x_1) + v_2'(x_2 + x_1) > 1$, ja que $v_1'(x_2 + x_1) > 0$ per la hipòtesi de concavitat de v_1. Si no hi ha cap valor positiu d'x_2 tal que $v_2'(x_2 + x_1) = 1$, la solució de (3) és $x_2 = 0$; vegeu la Remarca 4.2.6. En aquest cas, $v_1'(x_1) + v_2'(x_1) > 1$, ja que $v_1'(x_1) = 1$ i $v_2'(x_1) > 0$ per la hipòtesi de concavitat de v_2.■

Remarca 4.2.5. Recordant que la quantitat Paretoeficient x^* de bé públic satisfà $v_1'(x^*) + v_2'(x^*)$, la Proposició 4.2.4 diu que si el bé públic es financia <u>privadament</u>, la quantitat total $x_1 + x_2$ de bé públic que s'assoleix <u>no és Paretoeficient</u>.

Remarca 4.2.6. Si $v_2'(x_1) < 1$, el consumidor 2 no comprarà bé públic: serà un "<u>polissó</u>".

• La raó que $v_2'(x_1) < 1$ impliqui $x_2 = 0$ és que, en ternir-se $\partial u_2/\partial y_2 = 1$, la utilitat marginal del bé privat per al consumidor 2 és 1. En conseqüència, si la utilitat marginal per al consumidor 2 de la quantitat ja comprada pel consumidor 1 és inferior a 1, al consumidor 2 no li surt a compte renunciar a bé privat per a comprar bé públic: renunciar a una unitat de bé privat implica perdre 1 unitat d'utilitat; en canvi, la unitat de bé públic que aquella unitat de bé privat permet adquirir fa incrementar la utilitat en menys d'1 unitat d'utilitat, ja que la utilitat que aporta aquesta unitat depèn de la utilitat obtinguda per la quantitat x_1 comprada pel consumidor 1 (i aquesta quantitat fa que $v_2'(x_1) < 1$).

• En el context dels béns públics, es parla de "polissó" (*free rider*, en anglès) d'un agent que se n'aprofita d'un altre sense compensar al segon agent pel benefici que obté. <u>Un polissó és qui gaudeix de beneficis sense pagar els costs que cal assumir per a generar aquells beneficis</u>.

• Imaginem que tots dos consumidors tenen la mateixa funció d'utilitat v del bé públic. Aleshores, el consumidor 1 compra la quantitat x de bé públic tal que $v'(x) = 1$. Quan li toca el torn al consumidor 2 de decidir quina quantitat de bé públic comprar, es troba davant el mateix problema que el consumidor 1 amb la diferència que el consumidor 1 ja ha comprat la quantitat de bé públic que voldria comprar el consumidor 2. Resultat: 2 no compra bé públic, sinó que consumeix la quantitat de bé públic comprada pel consumidor 1 sense pagar per ella.

Remarca 4.2.7. El resultat $v_1'(x_1 + x_2) + v_2'(x_1 + x_2) > 1$ de la Proposició 4.2.4 significa que la suma d'utilitat marginals està per damunt del cost marginal del bé públic i que <u>la producció del bé públic és insuficient</u>: si el benefici total que genera l'última unitat produïda del bé públic està per sota del seu cost, en termes de benestar col·lectiu net, surt a compte produir una unitat més del bé públic.

• Produir x tal que $v_1'(x) + v_2'(x_2) > 1$ no és Paretoeficient perquè produint més bé públic es pot augmentar la utilitat d'un dels consumidors sense reduir la de l'altre.

Exemple 4.2.8. Amb les funcions d'utilitat de l'Exemple 4.1.9 i recordant que $v_1'(x) = 20/(1 + 10x)$, el consumidor 1 tria x_1 tal que $20/(1 + 10x_1) = 1$. D'aquí, $x_1 = 1'9$. Amb $\tilde{y}_1 = 3$, resulta $y_1 = 1'1$. Així, de les 3 unitats de bé privat de què 1 disposa, dedica 1'9 a adquirir bé públic i la quantitat restant 1'1 la consumeix com a bé privat. Sabent que 1 ha adquirit $x_1 = 1'9$ de bé públic, i donat que $v_2'(x) = 3/(1 + x)$, el consumidor 2 tria x_2 tal que $3/(1 + 1'9 + x_2) = 1$. D'aquí, $x_2 = 0'1$ i, recordant que $\tilde{y}_2 = 4$, $y_2 = 3'9$. La quantitat total de bé públic és $x_1 + x_2 = 2$. El vector de consum resultant és $(x, y_1, y_2) = (2, 1'1, 3'9)$. A més, $v_1'(2) + v_2'(2) = 20/21 + 1 = 41/21 > 1$. La quantitat Paretoeficient x^* de bé públic és $x^* = 4'4$ (Exemple 4.1.13), d'on resulta $v_1'(4) + v_2'(4) = 20/45 + 3/5'4 = 1$.

- El vector de consums $a = (x, y_1, y_2) = (2, 1'1, 3'9)$ no és Paretoeficient, perquè hi ha el vector $b = (x, y_1, y_2) = (4, 0'5, 3'5)$, on la utilitat de tots dos consumidors és superior. A a, $u_1(2, 1'1) = v_1(2) + 1'1 = 2\ ln\ 21 + 1'1 \approx 7'18$; a b, $u_1(4, 0'5) = v_1(4) + 0'5 = 2\ ln\ 41 + 0'5 \approx 7'92$. A a, $u_2(2, 3'9) = v_2(2) + 3'9 = 3\ ln\ 3 + 3'9 \approx 7'19$; a b, $u_2(4, 3'5) = v_2(4) + 3'5 = 3\ ln\ 4 + 3'5 \approx 7'65$.

Remarca 4.2.9. Tampoc no està garantit que s'assoleixi un nivell de producció Paretoeficient del bé públic si els consumidors seleccionessin <u>simultàniament</u> la quantitat de bé públic que voldrien adquirir; vegeu l'Exemple 4.2.10.

Exemple 4.2.10. Amb les funcions d'utilitat de l'Exemple 4.1.9, suposem que tots dos consumidors trien simultàniament la quantitat de bé públic que volen adquirir.

- Amb $i \in \{1, 2\}$, sigui x_i la quantitat que tria el consumidor i amb l'objectiu de maximitzar la seva funció d'utilitat.
- Per tant, $i \in \{1, 2\}$ tria x_i per a maximitzar $v_i(x_i + x_j) - y_i$ sotmès a $x_i + y_i = \tilde{y}_i$, on x_j és la quantitat de bé públic que tria l'altre consumidor $j \neq i$. Equivalentment, $i \in \{1, 2\}$ tria x_i per a maximitzar $v_i(x_i + x_j) - x_i$.
- Així, 1 tria x_1 per a maximitzar $2\ ln\ (1+ 10(x_1 + x_2)) - x_1$. En conseqüència, assumint $dx_2/dx_1 = 0$, el consumidor 1 tria x_1 tal que $20/(1 + 10x_1 + 10x_2) - 1 = 0$. D'aquí, $x_1 = 1'9 - x_2$ (funció similar a la funció de reacció al duopoli de Cournot). Atès que $x_2 = 0$ implica $x_1 = 1'9$, el màxim que 1 compraria del bé públic és 1'9.
- De manera anàloga, 2 tria x_2 per a maximitzar $3\ ln\ (1+ (x_1 + x_2)) - x_2$. Assumint $dx_1/dx_2 = 0$, el consumidor 2 tria x_2 tal que $3/(1 + x_1 + x_2) - 1 = 0$. D'aquí, $x_2 = 2 - x_1$. Donat que $x_1 \leq 1'9$, resulta que $x_2 \geq 0'1$. Però, per $x_1 = 1'9 - x_2$, $x_2 \geq 0'1$ implica $x_1 \leq 1'8$. Per $x_2 = 2 - x_1$, $x_1 \leq 1'8$ fa que $x_2 \geq 0'2$. Continuant aquesta progressió, x_1 es va reduint i x_2 va augmentant. Quan $x_1 = 0$, $x_2 = 2$; i donat $x_2 = 2$, el millor per a 1 és $x_1 = 0$ (ja que 1 en té prou amb 1'9 unitats de bé públic). En resum, l'únic equilibri de Nash del joc simultani és tal que $x_1 = 0$ i $x_2 = 2$, que dóna una quantitat total $x_1 + x_2 = 2$ que no és Paretoeficient.

4.3. Finançament públic d'un bé públic

Hipòtesi 4.3.1. <u>Una autoritat central estableix quina proporció del cost de producció del bé públic ha d'assumir cada consumidor</u>. Sigui τ_1 la proporció que paga el consumidor 1 i $\tau_2 := 1 - \tau_1$ la proporció que paga el consumidor 2.

Remarca 4.3.2. Les proporcions τ_1 i τ_2 es poden interpretar com taxes impositives. Si els preus dels béns es continuen assumint iguals a 1, x representa tant la quantitat de bé públic com la despesa feta en el bé públic (despesa que seria $1 \cdot x$). Per tant, si la despesa en bé públic és x, $\tau_1 \cdot x$ seria l'impost que paga el consumidor 1 per a finançar la provisió de la quantitat x de bé públic i $\tau_2 \cdot x$ seria l'impost que paga el consumidor 2 per a finançar la provisió de la quantitat x de bé públic.

Remarca 4.3.3. La taxa τ_i carregada sobre el consumidor i altera el preu del bé públic que efectivament paga el consumidor i. Imposar diferents taxes sobre els consumidors equival, en la pràctica, a què el preu del bé públic sigui diferent per a cada consumidor.

Exemple 4.3.4. Amb les dades de l'Exemple 4.1.9, suposem que $\tau_1 = ¼$. La restricció pressupostària del consumidor 1 seria $x/4 + y_1 = \tilde{y}_1$. Per tant, $y_i = \tilde{y}_1 - x/4$ i maximitzar $u_1(x, y_1)$ equival a maximitzar $v_1(x) + y_1 - x/4$, que equival a maximitzar $v_1(x) - x/4$. Igualant la derivada a zero, resulta $20/(1 + 10x) - ¼ = 0$ i, d'aquí, $x = 7'9$. Això diu que si el consumidor 1 ha de pagar la quarta part del cost del bé públic, desitjaria que es produissin 7'9 unitats del bé públic.

Exemple 4.3.5. Amb les dades de l'Exemple 4.1.9, suposem que $\tau_1 = ½$. Maximitzar $u_1(x, y_1)$ equival ara maximitzar $v_1(x) - x/2$. Igualant la derivada a zero, resulta $20/(1 + 10x) - ½ = 0$ i, d'aquí, $x = 3'9$. Com era d'esperar, si la proporció del cost del bé públic que ha de pagar el consumidor 1 augmenta (el preu efectiu per al consumidor 1 del bé públic augmenta), la quantitat del bé públic que vol que es produeixi disminueix: si la proporció passa d'¼ a ½, el consumidor 1 passa de demandar $x = 7'9$ a demandar $x = 3'9$.

Exemple 4.3.6. Continuant amb l'Exemple 4.3.4, $\tau_1 = ¼$ implica $\tau_2 = ¾$. En aquest cas, la quantitat d'x que el consumidor 2 vol que es produeixi resulta de maximitzar $v_2(x) - 3x/4$. Aquest valor és $x = 3$. Com a conseqüència, establir les taxes impositives $\tau_1 = ¼$ i $\tau_2 = ¾$ fa que els consumidors no es posin d'acord en la quantitat de bé públic que s'ha de proveir.

Definició 4.3.7. Un equilibri de Lindahl (en honor d'Erik Robert Lindahl (1891-1960), economista suec) és un triple (τ_1, τ_2, x_L) consistent en una taxa impositiva τ_1 per al consumidor 1, una taxa impositiva τ_2 per al consumidor 2 i una quantitat de bé públic x_L tal que, per a tot consumidor $i \in \{1, 2\}$, x_L maximitza $u_i(x, y_i) = v_i(x) + y_i$ sotmès a la restricció pressupostària $\tau_1 \cdot x + y_i = \tilde{y}_i$.

Remarca 4.3.8. Maximitzar $v_i(x) + y_i$ sotmès a $\tau_i \cdot x + y_i = \tilde{y}_i$ és equivalent a maximitzar $v_i(x) + \tilde{y}_i - \tau_1 \cdot x$, que és equivalent a maximitzar $v_i(x) - \tau_i \cdot x$.

- Com de fet ha succeït a l'epígraf 4.1, la decisió del consumidor i consistent en triar x i y_i en realitat es redueix a triar x: un cop determinat x, la restricció pressupostària $\tau_1 \cdot x + y_i = \tilde{y}_i$ determina y_i mitjançant la fórmula $y_i = \tilde{y}_i - \tau_1 \cdot x$. Així, els consumidors trien la quantitat de bé públic que desitgen i el consum de bé privat és el residu que resta després de pagar el bé públic.

Proposició 4.3.9. (τ_1, τ_2, x_L) és un equilibri de Lindahl si, i només si, $\tau_1 = v_1'(x_L)$ i $\tau_2 = v_2'(x_L)$.

- *Demostració*. Per la Remarca 4.3.8, el triple (τ_1, τ_2, x_L) és un equilibri de Lindahl si, i només si: (i) x_L maximitza $v_1(x) - \tau_1 \cdot x$; i (ii) x_L maximitza $v_2(x) - \tau_2 \cdot x$. Per (i), $v_1'(x_L) - \tau_1 = 0$; això és, $\tau_1 = v_1'(x_L)$. Per (ii), $v_2'(x_L) - \tau_2 = 0$; això es, $\tau_2 = v_2'(x_L)$.■

Remarca 4.3.10. La Proposició 4.3.9 estableix que, a un equilibri de Lindahl, cada consumidor ha de contribuir al finançament de la quantitat x_L de bé públic d'acord amb la utilitat marginal que obté de la quantitat subministrada de bé públic: qui obtingui una utilitat més gran per l'última unitat de bé públic (qui valori marginalment més el bé públic), paga una part més gran del cost de proveir-lo.

- L'equilibri de Lindahl expressa una idea de distribució justa de la càrrega impositiva per a finançar el bé públic, en tant que relaciona la contribució marginal de cada consumidor amb el benefici marginal que n'obté. Aquest esquema neutralitza els polissons: com més gran sigui el benefici marginal de la quantitat de bé públic que obté un consumidor, més gran haurà de ser la seva contribució marginal al finançament de la quantitat de bé públic proveïda.

Proposició 4.3.11. La quantitat de bé públic x_L a un equilibri de Lindahl és Paretoeficient.

- *Demostració*. Sigui x_L la quantitat de bé públic a l'equilibri de Lindahl. Per a què x_L sigui Paretoeficient, s'ha de satisfer (1): $v_1'(x_L) + v_2'(x_L) = 1$. Per la Proposició 4.3.9, $v_1'(x_L) = \tau_1$ i $v_2'(x_L) = \tau_2$. Per tant, $v_1'(x_L) + v_2'(x_L) = \tau_1 + \tau_2$. I $\tau_1 + \tau_2$ és igual a 1 per definició.■

Exemple 4.3.12. Càlcul de l'equilibri de Lindahl a l'Exemple 4.1.9. Per la Proposició 4.3.9, $\tau_1 = v_1'(x_L) = 20/(1 + 10x_L)$ i $\tau_2 = v_2'(x_L) = 3/(1 + x_L)$. Atès que $\tau_2 = 1 - \tau_1$, $3/(1 + x_L) = 1 - 20/(1 + 10x_L)$. De manera equivalent, $20/(1 + 10x_L) + 3/(1 + x_L) = 1$. Aquesta és l'equació que determina la quantitat Paretoeficeint de bé públic, calculada a l'Exemple 4.1.13. Així doncs, $x_L = 4'4$. D'aquí, $\tau_1 = 20/(1 + 10x_L) = 20/45$ i $\tau_2 = 3/(1 + x_L) = 3/5'4 = 25/45$.

Remarca 4.3.13. L'equilibri de Lindahl no és immune a la manipulació estratègica: pot ser profitós per a algun dels consumidors revelar informació falsa sobre la utilitat que obtenen del bé públic.

- L'autoritat que determini les taxes impositives τ_1 i τ_2 d'un equilibri de Lindahl ha de conèixer les funcions v_1 i v_2 (o es funcions v_1' i v_2'), que només són conegudes pels consumidors. Per tant, obtenir l'equilibri de Lindahl requereix que els consumidors revelin a l'autoritat les seves funcions d'utilitat del bé públic (o les seves funcions d'utilitat marginal del bé públic).
- L'equilibri de Lindahl és manipulable en el sentit que hi ha casos en què algun consumidor augmenta la seva utilitat declarant una funció d'utilitat (o d'utilitat marginal) del bé públic falsa.

Exemple 4.3.14. Continuant amb l'Exemple 4.3.12, suposem que els consumidors informen l'autoritat central encarregada de computar l'equilibri de Lindahl de les seves funcions d'utilitat marginal v_i' del bé públic. Comprovem què succeeix si el consumidor, en comptes de declarar la seva autèntica funció $v_1'(x) = 20/(1 + 10x)$, manifesta que és $w_1'(x) = 1/(1 + x)$.

- Per la Proposició 4.3.11, la quantitat de bé públic x_L de l'equilibri de Lindahl és Paretoeficient. Per tant, x_L satisfà $w_1'(x_L) + v_2'(x_L) = 1$. Així doncs, $1/(1 + x) + 3/(1 + x) = 1$, d'on tenim que $x_L = 3$. Per la Proposició 4.3.9, $\tau_1 = w_1'(x_L) = ¼$ i $\tau_2 = v_2'(x_L) = ¾$. Això fa que el consumidor 1 consumeixi $x_L = 3$ unitats de bé públic, contribueixi $\tau_1 \cdot x_L = 0'75$ al finançament del bé públic i destini $y_1 = \tilde{y}_1 - \tau_1 \cdot x_L = 3 - 0'75 = 2'25$ al consum privat.
- Com a conseqüència de revelar informació falsa, la utilitat del consumidor 1 és, d'acord amb la seva autèntica funció d'utilitat, $u_1(3, 2'25) = v_1(3) + 2'25 = 2\ ln\ 31 + 2'25 \approx 9'11$. En canvi, si declarés informació certa sobre la seva funció d'utilitat marginal del bé públic, s'obtindria el

resultat de l'Exemple 4.3.12, on $x_L = 4'4$, $\tau_1 \cdot x_L = (20/45) \cdot 4'4 = 88/45 \approx 1'95$ i $y_1 = \tilde{y}_1 - \tau_1 \cdot x_L = 3 - 88/45 = 47/45 \approx 1'05$. Dir la veritat faria que la utilitat del consumidor 1 fos $u_1(4'4, 47/45) = v_1(4'4) + 47/45 = 2 \ln 45 + 47/45 \approx 8'65$.

• En resum, el consumidor 1 té incentius a no revelar informació autèntica sobre la utilitat que li proporciona el bé públic: declarant $w_1'(x) = 1/(1 + x)$ en comptes de $v_1'(x) = 2/(1 + 10x)$, el resultat de l'equilibri de Lindahl li és més avantatjós.

Qüestió 4.3.15. Pot dissenyar-se un sistema impositiu que compleixi les dues propietats següents? Primer, que generi un nivell de producció del bé públic que sigui Paretoeficient. I segon, que sigui compatible amb incentius (*incentive-compatible* en anglès), això és, que no doni incentiu a cap consumidor a revelar informació falsa sobre la utilitat que obté del bé públic.

• A continuació es desenvolupa un mecanisme de revelació de la utilitat que proporciona el bé públic que dóna resposta afirmativa a la qüestió. El mecanisme es coneix com a mecanisme de Clarke-Groves, en honor als economistes Edward H. Clarke i Theodore Groves que, a la dècada de 1970, el van proposar de manera independent.

• Un dels dos premis Nobel d'Economia de 1996, William S. Vickrey, va desenvolupar anteriorment un mecanisme similar per a descoratjar l'especulació als mercats de béns privats.

Definició 4.3.16. El mecanisme de Clarke-Groves.

• Primer, cada consumidor anuncia a l'autoritat central una funció d'utilitat w_i del bé públic. Cada consumidor pot revelar qualsevol funció d'utilitat: o bé la seva autèntica funció d'utilitat v_i o bé una de falsa. Però si un consumidor no té incentiu a revelar una funció diferent de l'autèntica, s'assumeix que revela l'autèntica.

• Segon, l'autoritat computa les funcions d'utilitat marginal a partir de les funcions d'utilitat w_1 i w_2 declarades pels consumidors i determina la quantitat de bé públic x^* que satisfà la condició de Paretoeficiència (1) de Samuelson.

• I tercer, donades les funcions w_1 i w_2 anunciades pels consumidors, l'autoritat imposa sobre el consumidor $i \in \{1, 2\}$ l'impost $T_i := x - w_j(x)$, on j és el consumidor diferent d'i.

Hipòtesi 4.3.17. El consumidors subjectes al mecanisme de Clarke-Groves tenen com a objectiu maximitzar la seva autèntica funció d'utilitat sotmès a la restricció pressupostària.

• Per tant, el consumidor 1 pretén

$$\underset{\text{respecte d'}x\text{ i }y_1}{\textit{maximitzar}} \quad u_1(x, y_1) = v_1(x) + y_1 \qquad \textit{sotmès a} \quad T_1 + y_1 = \tilde{y}_1$$

i el consumidor 2 pretén

$$\underset{\text{respecte d'}x\text{ i }y_2}{\textit{maximitzar}} \quad u_2(x, y_1) = v_2(x) + y_2 \qquad \textit{sotmès a} \quad T_2 + y_2 = \tilde{y}_2$$

o, equivalentment,

$$\underset{\text{respecte d'}x}{\textit{maximitzar}} \quad v_1(x) + \tilde{y}_1 - [(x - w_2(x)] \qquad\qquad \underset{\text{respecte d'}x}{\textit{maximitzar}} \quad v_2(x) + \tilde{y}_2 - [(x - w_1(x)]$$

o, equivalentment,

$$\underset{\text{respecte d'}x}{\textit{maximitzar}} \quad v_1(x) + w_2(x) - x \qquad\qquad \underset{\text{respecte d'}x}{\textit{maximitzar}} \quad v_2(x) + w_1(x) - x. \tag{4}$$

Proposició 4.3.18. El mecanisme de Clarke-Groves no és manipulable: cap dels consumidors no té incentiu a declarar una funció d'utilitat diferent de la seva autèntica funció d'utilitat.

• *Demostració*. Sigui w_i la funció d'utilitat que declara el consumidor $i \in \{1, 2\}$. Sigui v_i la funció d'utilitat del consumidor $i \in \{1, 2\}$. Per la Remarca 4.1.12, a la segona etapa del mecanisme, l'autoritat tria el valor d'x que maximitza $w_1(x) + w_2(x) - x$. Per (4), el consumidor 1 vol maximitzar $v_1(x) + w_2(x) - x$. Per tant, declarant $w_1 = v_1$ el consumidor 1 aconsegueix que l'autoritat maximitzi la mateixa funció que ell vol maximitzar. Això fa que 1 no tingui cap incentiu a declarar una funció diferent de v_1 i, així, $w_1 = v_1$.

El mateix raonament s'aplica al consumidor 2. Per la Remarca 4.1.12, a la segona etapa del mecanisme, l'autoritat tria el valor d'x que maximitza $w_1(x) + w_2(x) - x$. Per (4), el consumidor 2 vol maximitzar $w_1(x) + v_2(x) - x$. Per tant, declarant $w_2 = v_2$ el consumidor 2 aconsegueix que l'autoritat maximitzi la mateixa funció que ell vol maximitzar. Això fa que 2 no tingui cap incentiu a declarar una funció diferent de v_2 i, així, $w_2 = v_2$.■

Proposició 4.3.19. La quantitat de bé públic al mecanisme de Clarke-Groves és Paretoeficient.

• *Demostració*. Per la Proposició 4.3.17, el consumidor 1 no té incentiu a declarar una funció d'utilitat del bé públic diferent de la seva autèntica funció d'utilitat i el mateix s'aplica al consumidor 2. Així, a la primera etapa del mecanisme, ambdós revelen les seves autèntiques funcions d'utilitat del bé públic. Siguin v_1 i v_2 aquestes funcions. A la segona etapa del mecanisme, l'autoritat tria la quantitat de bé públic x^* tal que $v_1'(x^*) + v_2'(x^*) = 1$. Atès que v_1 i v_2 són les funcions d'utilitat autèntiques, x^* és Paretoeficient.■

Remarca 4.3.20. El mecanisme de Clarke-Groves no garanteix un pressupost equilibrat, això és, que la suma $T_1 + T_2$ dels imposts recaptats per l'autoritat sigui igual al cost x d'adquisició de la quantitat de bé públic que selecciona l'autoritat.

• De fet, no existeix cap mecanisme basat en la revelació de les funcions d'utilitat del bé públic i en l'establiment d'imposts T_1 i T_2 que, per a qualsevol parell de funcions d'utilitat (v_1, v_2) del bé públic, acompleixi les tres següents condicions. Primer, Paretoeficiència: la quantitat x_M de bé públic que genera el mecanisme és Paretoeficient. Segon, no manipulabilitat: cap consumidor no té incentiu a revelar una funció d'utilitat diferent de l'autèntica. I tercer, pressupost equilibrat: la suma total $T_1 + T_2$ dels imposts recaptats mitjançant el mecanime és igual al cost d'adquirir la quantitat x_M de bé públic seleccionada.

Exemple 4.3.21. Amb les dades de l'Exemple 4.1.9, el mecanisme de Clarke-Groves selecciona la quantitat Paretoeficient $x^* = 4'4$. El consumidor 1 paga l'impost $T_1 := x^* - v_2(x^*) = 4'4 - 3\ ln\ 5'4 \approx -0'65$, en tant que el consumidor 2 paga l'impost $T_2 := x^* - v_1(x^*) = 4'4 - 2\ ln\ 45 \approx -3'21$. Això significa que ambdós consumidors reben una transferència i no pas paguen un impost.

Remarca 4.3.22. El mecanisme de Clarke-Groves pot modificar-se per a què el saldo pressupostari no sigui neagatiu, això és, per a què $T_1 + T_2 \geq x$, on x és la quantitat de bé públic que selecciona el mecanisme. Però justificar aquesta observació és part d'una altra història.