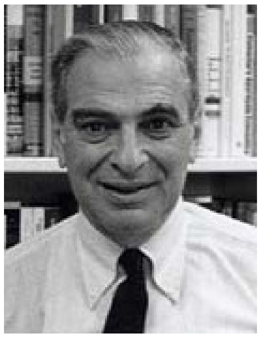
Tema 5. Incertesa

John von Neumann
(1903-1957)

Oskar Morgenstern
(1902-1977)



Kenneth J. Arrow
(1921)

5.1. Teoria de la utilitat esperada

Definició 5.1.1. Sigui X un conjunt no buit els elements del qual s'anomenaran "premis".

• Els membres d'X s'assumeixen pertanyents a una mateixa categoria de premis: X pot ser un conjunt de lots de béns; de notes d'exàmens; de diners; d'objectes…

Definició 5.1.2. Una distribució de probabilitat sobre X és una assignació d'un valor entre 0 i 1 (ambdós inclosos) a cada membre d'X de manera que la suma total dels valors assignats sigui 1.

Definició 5.1.3. Una distribució de probabilitat p sobre X és simple si p assigna una probabilitat positiva a només un subconjunt finit d'X. Sigui $\Delta(X)$ el conjunt de distribucions de probabilitat simple sobre el conjunt X.

Definició 5.1.4. Una loteria sobre X és una distribució de probabilitat simple sobre X.

• Una loteria p sobre X és una funció $p : X \to [0, 1]$ tal que: (i) per a tot $x \in X$, $0 \leq p(x) \leq 1$; i (ii) per a un subconjunt finit X^* d'X, $\sum_{x\in X^*} p(x) = 1$ i, per a tot $x \in X \backslash X^*$, $p(x) = 0$.
• El valor $p(x)$ s'interpreta com la probabilitat de rebre el premi o resultat x.

Exemple 5.1.5. Sigui $X = \{a, b, c\}$, on a = "0 €", b = "10 €" i c = "100 €". Aleshores p tal que $p(a) = p(b) = ½$ i $p(c) = ¼$ no és una distribució de probabilitat sobre X i, així, no és una loteria sobre X (tot i que p és una loteria sobre el conjunt $\{a, b\}$). En canvi, $p \in \Delta(X)$ amb $p(a) = p(b) = ½$ i $p(c) = 0$ és la loteria on es rep 0 € amb probabilitat ½, 10 € amb probabilitat ½ i 100 € amb probabilitat 0.

Remarca 5.1.6. La loteria que assigna probabilitat 1 a un cert premi s'identifica amb rebre el premi amb certesa. P.e., amb $X = \{a, b, c\}$, la loteria p tal que $p(b) = 1$ s'identifica amb (es considera la mateixa cosa que) el premi b.

Remarca 5.1.7. Si els membres d'X que reben probabilitat positiva a la loteria p s'assumeixen llistats en un cert ordre $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, s'expressarà p mitjançant el vector $(p_1, p_2, \dots, p_n)$, on p_i és la probabilitat que la loteria p assigna al premi x_i.

Definició 5.1.8. Una loteria composta, o loteria de loteries, és una distribució de probabilitat sobre un conjunt finit de loteries.

Definició 5.1.9. La loteria reduïda d'una loteria composta és la loteria on cada premi té associada la suma de les probabilitats que rep el premi a cada loteria ponderades per la distribució de probabilitat que defineix la loteria composta.

Exemple 5.1.10. Si X té tres premis, $p = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $q = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ i $r = (1, 0, 0)$, aleshores la loteria reduïda corresponent a la loteria composta c tal que $c(p) = 1/6$, $c(q) = 2/6$ i $c(r) = 3/6$ és la loteria $\frac{1}{6}p + \frac{2}{6}q + \frac{3}{6}q = (\frac{1}{6}\frac{1}{3} + \frac{2}{6}\frac{1}{4} + \frac{3}{6}1,\ \frac{1}{6}\frac{1}{3} + \frac{2}{6}\frac{1}{2} + \frac{3}{6}0,\ \frac{1}{6}\frac{1}{3} + \frac{2}{6}\frac{1}{4} + \frac{3}{6}0) = (\frac{23}{36}, \frac{8}{36}, \frac{5}{36})$.

Definició 5.1.11. Quan els premis s'expressen numèricament, l'esperança o valor esperat $E(p)$ d'una loteria p és la mitjana ponderada dels premis, on les ponderacions són les probabilitats de la loteria: si $X^* = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ és el subconjunt dels membres d'X tals que $p(x) > 0$ i $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, aleshores $E(p) := p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n$.

Exemple 5.1.12. Sigui $X := \{x_1, x_2, x_3\}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 10$ i $x_3 = 100$. Si $p = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ i $q = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ i $r = (1, 0, 0)$, $E(p) = \frac{1}{3}0 + \frac{1}{3}10 + \frac{1}{3}100 = \frac{110}{3}$, $E(q) = \frac{1}{4}0 + \frac{1}{2}10 + \frac{1}{4}100 = 30$ i $E(r) = 1\cdot 0 + 0\cdot 10 + 0\cdot 100 = 0$.

Definició 5.1.13. Una relació de preferència P sobre el conjunt de loteries $\Delta(X)$ és asimètrica si, per a tot $p, q \in \Delta(X)$, $p\ P\ q$ implica $q \not{P}\ p$.

Definició 5.1.14. Una relació de preferència P sobre $\Delta(X)$ és negativament transitiva si, per a tot $p, q, r \in \Delta(X)$, se segueix de $p \not{P}\ q$ i $q \not{P}\ r$ que $p \not{P}\ r$.

Definició 5.1.15. Una relació de preferència P sobre $\Delta(X)$ és independent quan, per a tot $p, q, r \in \Delta(X)$ i tot nombre real $\lambda \in (0, 1)$, si $p\ P\ q$ aleshores $\lambda p + (1 - \lambda)r\ P\ \lambda q + (1 - \lambda)r$.

- Quan una preferència sobre el conjunt de loteries és independent, establir si la loteria composta $\lambda p + (1 - \lambda)r$ és preferida o no a la loteria composta $\lambda q + (1 - \lambda)r$ només depèn de la preferència entre p i q, ja que el terme $(1 - \lambda)r$ és comú a totes dues loteries i s'entén que aquest terme no afecta a la decisió sobre quina de les dues loteries compostes és preferida a l'altra.

Definició 5.1.16. Una relació de preferència P sobre $\Delta(X)$ és contínua quan, per a tot $p, q, r \in \Delta(X)$, si $p\ P\ q$ i $q\ P\ r$ llavors hi ha nombres reals $\lambda, \mu \in (0, 1)$ tals que $\lambda p + (1 - \lambda)r\ P\ q\ P\ \mu p + (1 - \pi)r$.

- Quan una preferència sobre el conjunt de loteries és contínua, sempre que es tingui $p\ P\ q\ P\ r$ es poden trobar dues loteries compostes combinant la loteria p més preferida que q i la loteria r menys preferida que q de manera que una de les loteries compostes sigui més preferida que q i que una altra sigui menys preferida que q. Per tant, alguna combinació convexa de p i r serà més preferida que q i alguna combinació convexa de p i r serà menys preferida que q.

• La continuïtat diu que no importa quant menys preferida sigui una loteria r a altra q: per a tota loteria p més preferida que q, hi ha una barreja de les loteries p i r que és més preferida que q. I a la inversa, no importa quant més preferida sigui una loteria p a una altra q: per a tota loteria r menys preferida que q, hi ha una barreja de p i r que és menys preferida que q.

Exemple 5.1.17. Sigui $X := \{x_1, x_2, x_3\}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 10$ i $x_3 = 100$, $p = (0, 0, 1)$, $q = (0, 1, 0)$ i $r = (1, 0, 0)$.

• Sembla natural assumir que $p\ P\ q\ P\ r$. D'una banda, si P és contínua hi ha $\lambda \in (0, 1)$ tal que $\lambda p + (1 - \lambda)r\ P\ q$. Amb λ suficientment proper a 1 (p.e., λ = 0'99), sembla raonable que la loteria composta $\lambda p + (1 - \lambda)r$ = (0'01, 0, 0'99) sigui preferida a $q = (0, 1, 0)$, expressant la idea que rebre 100 € amb una probabilitat del 99% i rebre 0 € amb una probabilitat de l'1% és preferit a rebre 10 € amb seguretat.
• D'altra banda, si P és contínua també hi ha $\mu \in (0, 1)$ tal que $q\ P\ \mu p + (1 - \mu)r$. Amb μ suficientment proper a 0 (p.e., μ = 0'01), sembla raonable que $q = (0, 1, 0)$ sigui preferida a la loteria composta $\mu p + (1 - \mu)r$ = (0'99, 0, 0'01), expressant la idea que rebre 10 € amb seguretat és preferit a rebre 0 € amb una probabilitat del 99% i rebre 100 € amb una probabilitat de l'1%.

Definició 5.1.18. Amb funció d'utilitat $u : X \to R$, la utilitat esperada $u_E(p)$ d'una loteria p es defineix com $u_E(p) := \sum_{x\in X} p(x)u(x)$.

Proposició 5.1.19. Teorema de von Neumann-Morgenstern de representació en forma d'utilitat esperada. Una relació de preferència P sobre el conjunt de loteries $\Delta(X)$ és asimètrica, negativament transitiva, independent i contínua si, i només si, hi ha una funció real $u : X \to R$, que assigna un nombre real a cada premi del conjunt X, tal que, per a tot $p, q \in \Delta(X)$,

$$p\ P\ q \text{ si, i només si, } u_E(p) > u_E(q). \tag{1}$$

• Es diu que la preferència P té una representació en forma d'utilitat esperada o té la propietat de la utilitat esperada si hi ha alguna funció d'utilitat u que satisfaci (1).
• Si u i v són funcions d'utilitat que representen P en forma d'utilitat esperada, hi ha constants $a > 0$ i b tals que, per a tot $x \in X$, $u(x) = av(x) + b$: es pot passar d'una funció a una altra que representa P aplicant una transformació afí positiva. Això implica que tota funció que representa P en forma d'utilitat esperada proporciona informació cardinal. P.e., que $u(x_1) - u(x_2) > 0$ i que $u(x_1) - u(x_3) = 2(u(x_2) - u(x_3))$ significa que la loteria on x_2 es rep amb probabilitat 1 es considera indiferent a la loteria on es rep x_1 amb probabilitat ½ i x_3 amb probabilitat ½.

Remarca 5.1.20. La teoria de la utilitat esperada estableix que un agent que ha de triar una loteria entre un conjunt de loteries disponibles selecciona aquella que tingui una utilitat esperada més alta.

• Per la Proposició 5.1.19, la teoria de la utilitat esperada és d'aplicació a aquells agents que tinguin una relació de preferència sobre el conjunt de loteries que satisfaci les propietats d'asimetria, transitivitat negativa, independència i continuïtat. Com de raonables són aquestes propietats? S'han suggerit diversos exemples (coneguts com a "paradoxes") per a criticar la teoria de la utilitat esperada qüestionant alguna de les condicions de la Proposició 5.1.19.

Exemple 5.1.21. La paradoxa d'Allais (proposada per l'economista francès Maurice Allais, premi Nobel d'Economia al 1998; vegeu http://en.wikipedia.org/wiki/Allais_paradox). Sigui $x_1 = 0$ €, $x_2 =$ 1 milió € i $x_3 = 5$ milions €. Sigui $p = (0, 1, 0)$ la loteria on es rep 1 milió d'euros amb certesa i $q =$ (0'01, 0'89, 0'10) la loteria on es reben 0 euros amb una probabilitat de l'1%, 1 milió d'euros amb una probabilitat del 89% i 5 milions d'euros amb una probabilitat del 10%. Sigui $p' =$ (0'9, 0, 0'1) i $q' =$ (0'89, 0'11, 0). La paradoxa és que molta gent tria p quan cal escollir entre p i q però tria p' quan cal escollir entre p' i q', eleccions que contradiuen la teoria de la utilitat esperada.

- Suposem que P admet una representació en forma d'utilitat esperada. Sigui u la funció utilitat i $u_i = u(x_i)$ la utilitat obtinguda del premi x_i. Aleshores, $u_E(p) = u_2$, $u_E(q) = 0'01u_1 + 0'89u_2 + 0'1u_3$, $u_E(p') = 0'9u_1 + 0'1u_3$ i $u_E(q') = 0'89u_1 + 0'11u_2$. Suposem que $p\ P\ q$ i que $p'\ P\ q'$.
- Per (1), $p\ P\ q$ implica que $u_2 = u_E(p) > u_E(q) = 0'01u_1 + 0'89u_2 + 0'1u_3$; per tant, $0'11u_2 > 0'01u_1 + 0'1u_3$ o, equivalentment, $11u_2 > u_1 + 10u_3$.
- D'altra banda, per (1), $p'\ P\ q'$ vol dir que $0'9u_1 + 0'1u_3 = u_E(p') > u_E(q') = 0'89u_1 + 0'11u_2$; per tant, $0'01u_1 + 0'1u_3 > 0'11u_2$ o, equivalentment, $u_1 + 10u_3 > 11u_2$: contradicció.
- El matemàtic Leonard Savage (1917-1971) va replicar que aquells que trien segons indica la paradoxa raonen malament, de la mateixa manera que es pot cometre una errada calculant una arrel quadrada amb llapis i paper. Savage proposà representar les loteries de la paradoxa mitjançant 100 butlletes on hi ha escrit el premi; vegeu la Fig. 1.

	butlleta 1	*butlletes* 2 *a* 11	*butlletes* 12 *a* 100
loteria p	1 milió €	1 milió €	1 milió €
loteria q	0 €	5 milions €	1 milió €
loteria p'	0 €	5 milions €	0 €
loteria q'	1 milió €	1 milió €	0 €

Fig. 1. L'exemple de la paradoxa d'Allais segons Savage

- En escollir entre p i q, les butlletes de la 12 a la 100 es poden ignorar, perquè donen els mateixos premis. El mateix succeeix en escollir entre p' i q'. Per aquest motiu, la decisió entre p i q, d'un banda, i entre p' i q', d'una altra, només s'haurien de basar en les butlletes 1 a 11 (les dues primeres columnes de la Fig. 1). Però les dues primeres columnes de p i q' són idèntiques; i les dues primeres columnes de q i p' també són idèntiques. En conseqüència, tot el que condueix a triar p quan s'ha d'escollir entre p i q ha de portar a escollir q' quan s'ha d'escollir entre p' i q'.

Exemple 5.1.22. La paradoxa d'Ellsberg (proposada per Daniel Ellsberg, famós al seu dia per lliurar al *New York Times* els *Pentagon papers*, relatius a la intervenció dels EUA a la guerra del Vietnam; vegeu http://en.wikipedia.org/wiki/Ellsberg_paradox). Una urna opaca conté 90 boles, 30 de color gris i les 60 restants de color blanc o negre. S'ofereixen les següents quatre alternatives.

- Alternativa 1: reps 1000 € si extreus una bola de color gris.
- Alternativa 2: reps 1000 € si extreus una bola de color blanc.
- Alternativa 3: reps 1000 € si extreus una bola de color gris o negre.
- Alternativa 4: reps 1000 € si extreus una bola de color blanc o negre.

• Quan cal triar entre les alternatives 1 i 2, l'alternativa 1 tendeix a ser l'escollida, ja que el nombre de boles de color blanc pot ser petit i, en canvi, se sap que el nombre de boles de color gris és 30 (fet que assegura que la probabilitat d'extreure una bola de color gris sigui del 33'33%). Per contra, quan cal triar entre les alternatives 3 i 4, el raonament és que el nombre de boles de color negre pot ser petit i que, sabent que hi ha 60 boles de color blanc o negre, la probabilitat d'extreure una de color blanc o negre és del 66'66%. La conclusió és que la preferència sembla mostrar-se a favor de les alternatives amb probabilitats clarament definides.

• Aquestes decisions no són consistents amb la teoria de la utilitat esperada: si extreure una bola de color gris és més probable que extreure una bola blanca aleshores extreure una de color gris o negre és més probable que extreure una de color blanc o negre. Per tant, si l'alternativa 1 és preferida a la 2, l'alternativa 3 ha de ser preferida a la 4: el nombre de boles negres és irrellevant per a decidir entre 1 i 2, d'una banda, i entre 3 i 4, d'una altra.

Exemple 5.1.23. La paradoxa de Sant Petersburg (proposada per Nicollas Bernoulli al 1713; vegeu http://en.wikipedia.org/wiki/St._Petersburg_Paradox). A un hipòtetic casino de Sant Petersburg, un individu llença una moneda sense biaix fins que surt cara. Si surt cara al llençament que fa n, l'individu rep un premi equivalent a 2^n de les seves unitats d'utilitat. La utilitat esperada del joc és $\frac{1}{2}2 + \frac{1}{4}2^2 + \frac{1}{8}2^3 + \frac{1}{16}2^4 + \ldots + \frac{1}{2^n}2^n + \ldots = 1 + 1 + 1 + \ldots$ Aquesta utilitat és infinita. La paradoxa és que jugar el joc té una utilitat esperada infinita per a l'individu i que, per tant, hauria d'estar disposat a pagar qualsevol premi per a jugar-lo. Però, a la pràctica, qui pagaria aquest preu?

• La paradoxa de Sant Petersburg afecta a la teoria de la utilitat esperada amb loteries infinites i no tant a la teoria presentada aquí on les loteries són finites.

Exemple 5.1.24. La paradoxa del predictor (proposada pel físic William Newcomb; vegeu http://en.wikipedia.org/wiki/Newcomb%27s_paradox). Hi ha un ésser amb poders absoluts de clarividència que et presenta dues capses, A i B, i t'ofereix dues opcions. Opció 1: triar la capsa B. Opció 2: triar ambdues capses. Abans de plantejar-te les dues opcions, l'ésser ha predit quina opció n'agafaràs i ha omplert les capses. La capsa A conté 1000 €. La capsa B conté 1 milió € si l'ésser ha predit que triaràs l'opció 1 i no conté res si ha predit que triaràs l'opció 2. Què tries?

• La paradoxa prové del fet que dos principis de la teoria de la decisió entren en conflicte. El primer principi és el principi de dominància, que en aquest cas recomana triar les dues capses perquè, predigui el que predigui l'ésser, la suma dels diners que contenen les dues capses serà al menys tan gran com els diners de només una d'elles.

• Així, si l'ésser prediu que tries l'opció 1, la capsa B conté 1 milió € i la capsa A conté 1000; i si prediu que tries l'opció 2, la capsa B conté 0 € i la capsa A conté 1000. En ambdós casos, triar ambdues capses (opció 2) proporciona més euros que només triar la capsa B: al primer cas, l'opció 2 porta a aconseguir 1 milió i mil € i l'opció 1 porta a 1 milió €; al segon cas, l'opció 2 porta a aconseguir 1000 €, en tant que l'opció 1 porta a no aconseguir res.

• El principi de la maximització de la utilitat esperada diu, però, una cosa diferent. Atès que l'ésser prediu l'opció triada, triar l'opció 1 implica aconseguir 1 milió € mentre que triar l'opció 2 implica aconseguir 1000 €. Conclusió: és millor l'opció 1 (no és possible obtenir 0 € o 1 milió i mil €, perquè això implicaria que l'ésser ha predit incorrectament).

Definició 5.1.25. Sigui P la relació de preferència P d'un individu sobre el conjunt de loteries $\Delta(X)$. L'individu és <u>avers al risc</u> si, per a tota loteria $p \in \Delta(X)$, la loteria que dóna el valor esperat de la loteria $E(p)$ amb probabilitat 1 és preferida, segons P, a la loteria p.

- <u>Un individu és avers al risc si sempre prefereix obtenir amb certesa la utilitat esperada d'una loteria a la loteria mateixa</u>. P.e., si $x = 12$ i $y = 0$ són dos premis i p és la loteria tal que $p(x) = 1/3$ i $p(y) = 2/3$, un individu avers al risc prefereix el premi $z = E(p) = 12/3 + 0\cdot 2/3 = 4$ (això és, la loteria on es rep 4 amb probabilitat 1) a rebre 12 amb probabilitat 1/3 i 0 amb probabilitat 2/3.
- Si la relació de preferència P té la propietat de la utilitat esperada i u representa P, aleshores l'individu és avers al risc si, i només si, u és <u>còncava</u> (té la forma de la funció de la Fig. 2).

Definició 5.1.26. Sigui P la relació de preferència P d'un individu sobre el conjunt de loteries $\Delta(X)$. L'individu és <u>amant del risc</u> si, per a tota loteria $p \in \Delta(X)$, la loteria que dóna el valor esperat de la loteria $E(p)$ amb probabilitat 1 és menys preferida, segons P, a la loteria p.

- <u>Un individu és amant del risc si sempre prefereix una loteria a obtenir amb certesa la utilitat esperada de la loteria</u>. P.e., si $x = 12$ i $y = 0$ són dos premis i p és la loteria tal que $p(x) = 1/3$ i $p(y) = 2/3$, un individu amant del risc prefereix la loteria p al premi $z = E(p) = 12/3 + 0\cdot 2/3 = 4$.
- Si la relació de preferència P té la propietat de la utilitat esperada i u representa P, aleshores l'individu és amant del risc si, i només si, u és <u>convexa</u>.

Definició 5.1.27. Sigui P la relació de preferència P d'un individu sobre el conjunt de loteries $\Delta(X)$. L'individu és <u>neutral envers el risc</u> si, per a tota loteria $p \in \Delta(X)$, la loteria que dóna el valor esperat de la loteria $E(p)$ amb probabilitat 1 és indiferent, segons P, a la loteria p.

- <u>Un individu és neutral envers el risc si és indiferent entre una loteria i obtenir amb certesa la utilitat esperada de la loteria</u>. P.e., si $x = 12$ i $y = 0$ són dos premis i p és la loteria tal que $p(x) = 1/3$ i $p(y) = 2/3$, un individu neutral envers el risc és indiferent entre p i el premi $z = E(p) = 12/3 + 0\cdot 2/3 = 4$.
- Si la relació de preferència P té la propietat de la utilitat esperada i u representa P, aleshores l'individu és neutral al risc si, i només si, u és <u>lineal</u>.

Definició 5.1.28. Un <u>equivalent cert d'una loteria</u> p amb funció d'utilitat esperada u és un premi $C(p)$ que proporciona la mateixa utilitat que la utilitat esperada $u_E(p)$ de la loteria p.

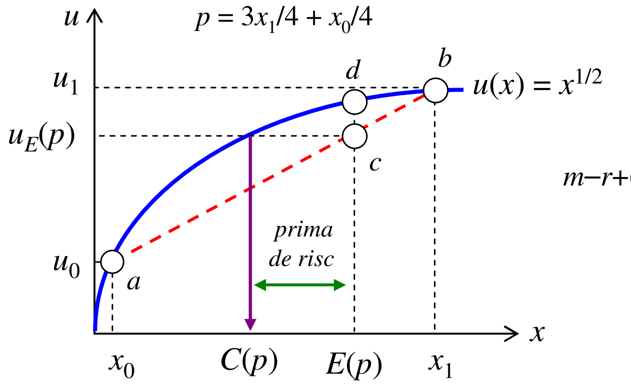


Fig. 2. Equivalent cert d'una loteria

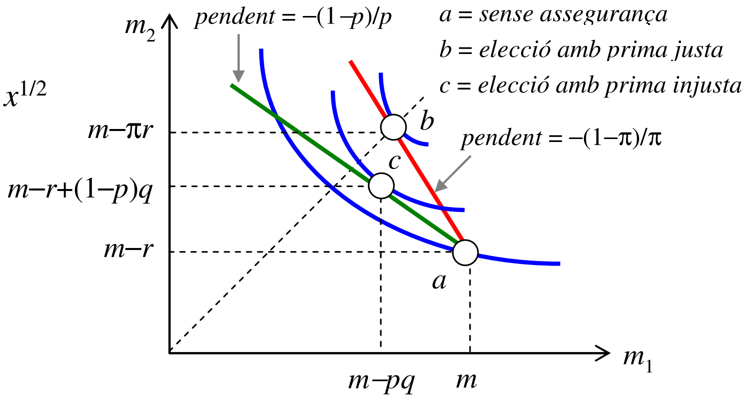


Fig. 3. Cobertura amb prima justa i injusta

Remarca 5.1.29. Sigui R el conjunt de nombres reals no negatius i $u : R \to R$ una funció d'utilitat contínua i creixent. Aleshores tota loteria té un únic equivalent cert.

Definició 5.1.30. Si p té un únic equivalent cert $C(p)$, la prima de risc de la loteria p és $E(p) - C(p)$.

- La prima de risc d'una loteria p fa que un individu sigui indiferent entre la loteria p i rebre, amb certesa, tant la prima de risc de p com l'equivalent cert $C(p)$; vegeu la Fig. 2.
- La prima de risc d'una loteria p es pot entendre com la compensació que cal donar a un individu avers al risc per a què estigui disposat a escollir la loteria.

Exemple 5.1.31. Sigui R el conjunt de nombres reals no negatius i $u : R \to R$ la funció d'utilitat d'un individu tal que, per a tot $x \in X$, $u(x) = x^{1/2}$; vegeu la Fig. 2.

- La funció u és còncava i, per tant, l'individu és avers al risc. P.e., amb premis $x_0 = 4$ i $x_1 = 36$, sigui p la loteria tal que $p(x_0) = ¼$ i $p(x_1) = ¾$. El valor esperat de la loteria p és $E(p) = p(x_0)\cdot x_0 + p(x_1)\cdot x_1 = ¼\cdot 4 + ¾\cdot 36 = 28$. La utilitat esperada de la loteria p és $u_E(p) = p(x_0)\cdot u(x_0) + p(x_1)\cdot u(x_1) = ¼\cdot 4^{1/2} + ¾\cdot 36^{1/2} = 5$. Atès que $u(E(p)) = u(28) = 28^{1/2} > 5 = u_E(p)$, l'individu prefereix el premi cert de 28 a una loteria amb valor esperat 28.
- A la Fig. 2, el punt c indica la utilitat esperada de la loteria p on x_0 es rep amb probabilitat ¼ i x_1 es rep amb probabilitat ¾. El punt d indica la utilitat que obté l'individu d'obtenir amb certesa el valor esperat de p. Que d es trobi per damunt c expressa l'aversió al risc de l'individu.
- Amb $x_0 = 4$, $x_1 = 36$ i p tal que $p(x_0) = ¼$ i $p(x_1) = ¾$, l'equivalent cert de p és el valor x tal que $u(x) = u_E(p)$. D'aquí que x és l'equivalent cert de p si $x^{1/2} = 5$. Per tant, l'equivalent cert de p és $C(p) = 25$: l'individu és indiferent entre rebre 25 amb certesa i la loteria p tal que $p(4) = ¼$ i $p(36) = ¾$. Això fa que la prima de risc $R(p)$ de p sigui $E(p) - C(p) = 28 - 25 = 3$: davant d'un premi cert de 25 (que proporciona l'individu una utilitat igual a la utilitat esperada de la loteria p), cal com a mínim un premi addicional cert de 3 per a què l'individu estigui disposat a renunciar a 25 i acceptar la loteria p; vegeu la Fig. 2.

Definició 5.1.32. El coeficient d'Arrow-Pratt d'aversió absoluta al risc d'una funció d'utilitat $u : R \to R$, on R és el conjunt de nombres reals no negatius, és $r(x) = -u''(x)/u'(x)$, on u' és la derivada d'u i u'' és la derivada d'u'.

- La corbatura d'u determina el grau d'aversió al risc: més corbatura, més aversió. Per tant, la derivada segona d'u es podria adoptar com a mesura de l'aversió al risc. El problema és que si una funció d'utilitat representa una relació de preferència que té la propietat de la utilitat esperada, tota transformació afí positiva també la representa. Per això cal una mesura que sigui immune a transformacions afins positives. El coeficient d'Arrow-Pratt és una d'elles.

5.2. El mercat d'assegurances

Aquest epígraf considera el següent problema: en quines circumstàncies un individu avers al risc escollirà eliminar un risc (o part d'ell) al que s'enfronta comprant una assegurança?

Exemple 5.2.1. Un individu avers al risc s'enfronta a la possibilitat que un cert esdeveniment (p.e., un accident) li causi una pèrdua monetària r. La probabilitat que tingui lloc l'esdeveniment (i que, per tant, es produeixi la pèrdua) és $\pi \in (0, 1)$ i no depèn de l'individu. Sigui l'estat 1 aquell on no es produeix l'esdeveniment i l'estat 2 aquell on es produeix. A l'estat 1, la renda de l'individu és m. A l'estat 2, la renda de l'individu és $m - r$. Una companyia d'assegurances (neutral envers el risc, competitiva i sense costs d'administració) ofereix cobertura de la pèrdua a canvi d'una prima d'assegurança $p \in (0, 1)$. L'individu tria la cobertura q (si passa l'esdeveniment, la companyia li paga q) i paga per la cobertura pq (succeeixi o no l'esdeveniment). Quina cobertura q tria l'individu?

• Amb l'assegurança, la renda de l'individu m_1 a l'estat 1 és la renda m que tindria l'individu a l'estat 1 sense assegurança més el cost pq de l'assegurança; això és,

$$m_1 = m - pq. \tag{2}$$

• La renda de l'individu m_2 a l'estat 2 és la renda m menys la pèrdua r (ja que a l'estat 2 es produeix l'esdeveniment que genera la pèrdua) menys l'import pq de l'assegurança (que es paga a tots dos estats) més la cobertura q (que la companyia paga a l'estat 2 perquè s'ha produït la pèrdua). En símbols, $m_2 = m - r - pq + q$ o, de manera equivalent,

$$m_2 = m - r + q(1 - p). \tag{3}$$

• La renda m a l'estat 1 sense assegurança és superior a la renda $m - pq$ a l'estat 1 amb assegurança. A la inversa, la renda $m - r$ a l'estat 2 sense assegurança és inferior a la renda $m - r + q(1 - p)$ a l'estat 2 amb assegurança. Assegurar-se és una manera de transferir renda entre estats.

• La renda esperada de l'individu sense assegurança és $R_S := (1 - \pi)m + \pi(m - r) = m - \pi r$.
• La renda esperada de l'individu amb assegurança és $R_A := (1 - \pi)m_1 + \pi m_2 = m - \pi r - q(p - \pi)$.

Definició 5.2.2. La prima d'assegurança p és actuarialment justa (o, simplement, justa) si la renda esperada de l'individu és la mateixa amb i sense assegurança.

• A l'Exemple 5.2.1, per a què p sigui justa cal que $R_S = R_A$; això és, $m - \pi r = m - \pi r - q(p - \pi)$. D'aquí resulta que p és actuarialment justa si, i només si, $p = \pi$: la prima d'assegurança coincideix amb la probabilitat que succeeixi l'esdeveniment.

Hipòtesi 5.2.3. L'individu tria la cobertura q amb l'objectiu de maximitzar la seva utilitat esperada.

• A l'Exemple 5.2.1, sigui u la funció d'utilitat de l'individu definida sobre valors de la renda m, on u és derivable. La seva utilitat esperada amb assegurança és $u_E := (1 - \pi)\, u(m_1) + \pi\, u(m_2)$.
• L'individu tria q per a maximitzar $u_E := (1 - \pi)\, u(m_1) + \pi\, u(m_2)$, on $m_1 = m - pq$ i $m_2 = m - r + q(1 - p)$. La condició de 1r ordre és $0 = du_E / dq = -(1 - \pi)\, p\, u'(m_1) + \pi\, (1 - p)\, u'(m_2)$, on u' és la derivada d'u respecte d'm. D'aquí resulta que

$$\frac{1-\pi}{\pi}\frac{u'(m_1)}{u'(m_2)} = \frac{1-p}{p}. \tag{4}$$

• La part esquerra de (4) és el pendent, en valor absolut, de la corba d'indiferència que passa pel punt (m_1, m_2) a l'espai on es representa la renda a l'estat 1 a abscisses i la renda a l'estat 2 a ordenades; vegeu la Fig. 3. La part dreta de (4) és el pendent, en valor absolut, de la restricció pressupostària intertemporal a què s'enfronta l'individu: per (2), $q = (m - m_1)/p$; substituint q a (3), s'obté $m_2 = m/p - r - m_1(1 - p)/p$, que expressa la restricció pressupostària intertemporal de l'individu. L'expressió és equivalent a $(1 - p)m_1 + pm_2 = (1 - p)m + p(m - r)$, on la part dreta pot interpretar-se com el valor de la dotació intertemporal inicial i on p pot interpretar-se com el preu de transferir renda d'un estat a un altre mitjançant l'assegurança. Resumint, (4) no és més que la familiar condició de tangència entre corba d'indiferència i restricció pressupostària.

• La condició de 2n ordre és $0 > \frac{d^2 u_E}{dq^2} = (1 - \pi)\, p^2\, u''(m_1) + \pi\, (1 - p)^2\, u''(m_2)$, on u'' és la derivada segona d'u respecte d'm. Per la concavitat d'u, $u''(m_1) < 0$ i $u''(m_2) < 0$. Això fa que la condició de 2n ordre es compleixi, ja que π i p són nombre positius entre 0 i 1.

• Cas 1: p és justa. Aleshores, (4) esdevé $u'(m_1) = u'(m_2)$. Per l'aversió al risc de l'individu, u és còncava, de manera que no hi ha dos valors diferents d'm on el valor de la derivada sigui el mateix. Com a resultat, $u'(m_1) = u'(m_2)$ implica $m_1 = m_2$: a la combinació òptima de renda en els dos períodes l'individu té la mateixa renda. D'aquí que $m_1 = m_2$ impliqui $m - pq = m - r + q(1 - p)$ i, en conclusió, $q = r$. Això significa que, si la prima és actuarialment justa, l'individu s'assegura completament contra la pèrdua: la cobertura q és igual a la pèrdua r. L'individu tria el punt b de la Fig. 3, on hi ha tangència entre una corba d'indiferència de la funció u_E i la recta amb pendent $-(1 - \pi)/\pi$ que passa pel punt a (que es on es trobaria l'individu sense assegurança).

• Cas 2: p no és justa. Considerem el cas $p > \pi$ (què passaria si $p < \pi$?). Si $p > \pi$, $1 - \pi > 1 - p$ i, en conseqüència, $p(1 - \pi) > \pi(1 - p)$. Per (4), $\frac{u'(m_1)}{u'(m_2)} = \frac{1-p}{p}\frac{\pi}{1-\pi} < 1$. Per tant, $u'(m_1) < u'(m_2)$. La concavitat d'u fa que el pendent es redueixi a mesura que augmenta m. Així, $u'(m_1) < u'(m_2)$ implica $m_1 > m_2$. Comparant (2) i (3), $m_1 > m_2$ fa que $m - pq > m - r + q(1 - p)$; això és, $q < r$. Resultat: si la prima no és justa (amb $p > \pi$), l'individu s'assegura parcialment contra la possible pèrdua: la cobertura q és inferior a la pèrdua r i es tria un punt com ara el c a la Fig. 3.

Exemple 5.2.4. Continuem l'anàlisi de l'Exemple 5.2.1 assumint que $u(m) = m^{1/2}$. L'objectiu és determinar com afecten canvis dels paràmetres (la renda m, la pèrdua r, la prima p i la probabilitat π de l'esdeveniment) a la cobertura q que demanda l'individu (quan p no és justa, amb $p > \pi$).

• Per (2), $u'(m_1) = ½\, m_1^{-1/2} = ½\, (m - pq)^{-1/2}$. Per (3), $u'(m_2) = ½\, m_2^{-1/2} = ½\, (m - r + q(1 - p))^{-1/2}$. Atès que, per (4), $\frac{u'(m_1)}{u'(m_2)} = \frac{1-p}{p}\frac{\pi}{1-\pi}$, s'obté $\frac{\frac{1}{2}(m - r + q(1-p))^{1/2}}{\frac{1}{2}(m - pq)^{1/2}} = \frac{1-p}{p}\frac{\pi}{1-\pi}$.

Definint $k = \frac{1-p}{p}\frac{\pi}{1-\pi}$, resulta

$$q = \frac{m(k^2 - 1) + r}{p(k^2 - 1) + 1}. \qquad (5)$$

• L'equació (5) determina la cobertura que maximitza la utilitat esperada de l'individu en funció dels quatre paràmetres del model: m, r, p i π. Derivant (5) respecte de cada paràmetre es podrà establir l'efecte sobre la cobertura de canvis en la renda, la prima, la pèrdua i la probabilitat π.

• Efecte d'm sobre q. La derivada parcial de q respecte d'm és $\frac{\partial q}{\partial m} = \frac{k^2 - 1}{p(k^2-1)+1}$. El denominador és $(1 - p) + pk^2$, que és positiu. Així que el signe de $\frac{\partial q}{\partial m}$ depèn de si k^2 és més gran o més petit que 1. Per hipòtesi, $p > \pi$. D'aquí, $p - p\pi > \pi - p\pi$. Això equival a $p(1 - \pi) > \pi(1 - p)$ i, això, a $1 > k$. Per tant, $k^2 < 1$ i $\frac{\partial q}{\partial m} < 0$: un augment de la renda, redueix la cobertura que l'individu sol·licita a la companyia d'assegurances.

• Efecte d'r sobre q. La derivada parcial de q respecte d'r és $\frac{\partial q}{\partial r} = \frac{1}{p(k^2-1)+1}$. El denominador és $(1 - p) + pk^2$, que és positiu. Per tant, $\frac{\partial q}{\partial r} > 0$: un augment de la pèrdua provoca un augment de la cobertura que l'individu sol·licita a la companyia d'assegurances.

• Efecte de p sobre q. Per la regla de la cadena, la derivada parcial de q respecte de p és $\frac{\partial q}{\partial p} =$

$$= \frac{2km\frac{\partial k}{\partial p}(p(k^2-1)+1) - 2kp\frac{\partial k}{\partial p}(m(k^2-1)+r)}{(p(k^2-1)+1)^2} = \frac{2k\frac{\partial k}{\partial p}(mp(k^2-1)+m-mp(k^2-1)-rp)}{(p(k^2-1)+1)^2} =$$

$= \frac{2k\frac{\partial k}{\partial p}(m-rp)}{(p(k^2-1)+1)^2}$. Atès que $k := \frac{1-p}{p}\frac{\pi}{1-\pi}$, $\frac{\partial k}{\partial p} = \frac{-\pi p(1-\pi) - \pi(1-p)(1-\pi)}{p^2(1-\pi)^2} < 0$. El terme rp representa el cost per a l'individu de la cobertura completa. Si $m > rp$, es tindrà $\frac{\partial q}{\partial p} < 0$: un augment de la prima d'assegurança provoca una disminució de la cobertura. Si $m < rp$ (cas de pèrdua catastròfica) es tindrà $\frac{\partial q}{\partial p} > 0$: un augment de la prima d'assegurança provoca un augment de la cobertura. I si $m = rp$, una variació de p no té efectes sobre la cobertura.

• Efecte de π sobre q. Per la regla de la cadena, la derivada parcial de q respecte de π és $\frac{\partial q}{\partial \pi} =$

$$= \frac{2km\frac{\partial k}{\partial \pi}(p(k^2-1)+1) - 2kp\frac{\partial k}{\partial \pi}(m(k^2-1)+r)}{(p(k^2-1)+1)^2} = \frac{2k\frac{\partial k}{\partial \pi}(mp(k^2-1)+m-mp(k^2-1)-rp)}{(p(k^2-1)+1)^2} =$$

$= \frac{2k\frac{\partial k}{\partial \pi}(m-rp)}{(p(k^2-1)+1)^2}$. Atès que $k := \frac{1-p}{p}\frac{\pi}{1-\pi}$, $\frac{\partial k}{\partial \pi} = \frac{(1-p)p(1-\pi) + p\pi(1-p)}{p^2(1-\pi)^2} > 0$. Si $m > rp$, es tindrà $\frac{\partial q}{\partial \pi} > 0$: un augment de la probabilitat de l'esdeveniment provoca un augment de la cobertura. Si $m < rp$, es tindrà $\frac{\partial q}{\partial \pi} < 0$: un augment de la probabilitat de l'esdeveniment provoca una reducció de la cobertura. I si $m = rp$, una variació de π no té efectes sobre la cobertura.