Tema 1. Creixement d'una economia en el llarg termini

Macroeconomia

- La Macroeconomia és la branca de la teoria econòmica que s'ocupa de l'estudi d'una economia en la seva totalitat.
- Mentre la Microeconomia estudia parts d'una economia (individus, empreses, mercats), la Macroeconomia pren com a objecte d'estudi l'economia considerada com a un tot.

Distinció entre el curt i el llarg termini d'una economia

- Una de les idees que caracteritza l'anàlisi macroeconòmica acceptada avui en dia estableix que el funcionament d'una economia en un període curt de temps és, en gran mesura, diferent del seu funcionament quan es consideren períodes molt llargs de temps.
- La justificació d'aquesta idea és que un canvi que es produeix en una part d'una economia necessita temps per a estendre's a la resta de l'economia, de forma que, amb el transcurs del temps, certs efectes del canvi inicial s'esvaeixen i certs altres es reforcen.
- La dicotomia entre curt i llarg termini pot aplicar-se a tot sistema complex. Per exemple, l'efecte d'un refredat sobre el cos humà és diferent si es consideren uns dies (inflamació de la gola, mal de cap, febre…) que si es consideren anys (al cap d'anys un refredat no deixa efectes i es com si no hagués tingut lloc).

Dualitat d'anàlisis macroeconòmiques

- Un dels problemes fonamentals a què s'enfronta l'anàlisi macroeconòmica consisteix en determinar quins esdeveniments tenen efectes duradors sobre una economia i quins altres només afecten l'economia durant períodes molt curts de temps.
- A la Macroeconomia coexisteixen dos tipus de teories: unes expliquen el funcionament d'una economia en curts períodes de temps (el curt termini d'una economia); les altres expliquen el seu funcionament en períodes més llargs (el llarg termini d'una economia).

"Salut" d'una economia

- Com succeeix amb l'estudi de tot organisme o mecanisme complex, una de les prioritats en l'estudi teòric d'una economia consisteix en entendre el seu funcionament amb l'objectiu últim d'esbrinar fins a quin punt aquest funcionament és "bo" o desitjable i, detectat un "mal funcionament", dissenyar mesures correctores, que s'aplicarien a l'economia en forma de polítiques macroeconòmiques.
- La Macroeconomia és, per tant, com una combinació de Biologia i Medicina per a economies: com la Biologia, estudia l'estructura i el funcionament d'un organisme o mecanisme complex; com la Medicina, aplica el coneixement obtingut del funcionament d'una economia per a preservar la seva "salut" (o "bon funcionament").

Macromagnituds

- Com es determina si una economia pateix alguna malaltia que requereixi intervenció per a neutralitzar-la? El judici sobre la "salut" d'una economia es basa en indicadors macroeconòmics anomenats "macromagnituds" (= magnituds macroeconòmiques).
- Considerant una economia com un organisme viu, el metabolisme d'una economia es coneix com "activitat econòmica agregada". Les macromagnituds són mesures d'algun aspecte de l'activitat econòmica agregada d'una economia. Una selecció apropiada de macromagnituds permetrà fer una avaluació sobre el funcionament d'una economia.

La principal macromagnitud: la producció agregada

- En les economies modernes, l'activitat econòmica agregada s'alimenta principalment d'una activitat: la producció de béns ("béns" abreuja "béns i serveis"). Si una economia deixés de produir (o reduís molt significativament la producció de) béns, es col·lapsaria.
- Aquesta correlació entre producció de béns, d'un costat, i activitat econòmica agregada, d'un altre, suggereix prendre alguna mesura de la producció de béns d'una economia com a indicador de l'activitat econòmica agregada i, per tant, com a indicador del bon funcionament d'una economia.
- La macromagnitud anomenada "producció agregada":
  - és un número que representa la producció total de béns realitzada a una economia durant un cert període de temps; i
  - és un indicador de la dimensió i de l'activitat productiva de l'economia durant aquell període.
- Més endavant es resoldrà el problema de com sumar béns heterogenis (com sumar pomes i taronges). De moment, s'assumirà que hi ha un procediment que permet agregar tota la producció d'una economia i condensar-la en un número.

Creixement d'una economia

- La producció agregada és una mesura de com de gran és una economia. Això fa que generalment s'identifiqui creixement d'una economia (= creixement de l'activitat econòmica agregada) amb creixement de la seva producció agregada.

La més greu malaltia macroeconòmica

- Què és un bon funcionament d'una economia és, en molts aspectes, una qüestió d'opinió. En d'altres, sembla clar què és un mal funcionament.
- En particular, no està clar quin creixement de la producció agregada és el més desitjable, però hi ha consens en què un decreixement de la producció agregada o un creixement molt petit evidencia un greu mal funcionament de l'economia. Hi ha debat sobre si forçar l'economia en el curt termini a augmentar el creixement de la producció agregada, quan el decreixement o el creixement insuficient es manifesten.

1	World	$ 65,820,000,000,000	2007 est.
2	European Union	$ 14,440,000,000,000	2007 est.
3	United States	$ 13,860,000,000,000	2007 est.
4	China	$ 7,043,000,000,000	2007 est.
5	Japan	$ 4,305,000,000,000	2007 est.
6	India	$ 2,965,000,000,000	2007 est.
7	Germany	$ 2,833,000,000,000	2007 est.
8	United Kingdom	$ 2,147,000,000,000	2007 est.
9	Russia	$ 2,076,000,000,000	2007 est.
10	France	$ 2,067,000,000,000	2007 est.
11	Brazil	$ 1,838,000,000,000	2007 est.
12	Italy	$ 1,800,000,000,000	2007 est.
13	**Spain**	$ 1,362,000,000,000	2007 est.
14	Mexico	$ 1,353,000,000,000	2007 est.
15	Canada	$ 1,274,000,000,000	2007 est.
16	Korea, South	$ 1,206,000,000,000	2007 est.

Fig. 1. Rànquing mundial de producció agregada (mesurada en dòlars), 29 de gener de 2008
https://www.cia.gov/library/publications/the-world-factbook/rankorder/2001rank.html

Producció agregada per càpita

- En ocasions no només interessa fer-se una idea sobre el funcionament d'una economia, sinó també fer-se una idea sobre com aquest funcionament es tradueix en benestar dels membres de l'economia. La producció agregada informa sobre com de gran és el pastís però no sobre la porció que toca a cada individu de l'economia.
- La producció agregada per càpita és la producció agregada dividida per la població de l'economia. Per tant, estableix quina part de la producció agregada correspondria a cada individu si la producció es repartís igualitàriament.
- Si la producció agregada és una mesura de la riquesa econòmica que genera una economia durant un cert període de temps, la producció agregada per càpita mesura la riquesa mitjana que un individu de l'economia obté durant aquell mateix període de temps. Aquesta interpretació fa que la producció agregada per càpita es consideri un indicador del benestar o nivell de vida (*standard of living*) a una economia.

L'augment de la producció agregada per càpita com a finalitat d'una economia

- Si més benestar és millor que menys i si la producció agregada per càpita és un bon indicador del benestar, resulta que es considerarà que una economia que té una producció agregada per càpita superior a una altra funciona més bé.

1	Luxembourg	$ 80,800	2007 est.
2	Qatar	$ 75,900	2007 est.
3	Bermuda	$ 69,900	2004 est.
4	Jersey	$ 57,000	2005 est.
5	Norway	$ 55,600	2007 est.
6	Kuwait	$ 55,300	2007 est.
7	United Arab Emirates	$ 55,200	2007 est.
8	Singapore	$ 48,900	2007 est.
9	United States	$ 46,000	2007 est.
10	Ireland	$ 45,600	2007 est.
11	Guernsey	$ 44,600	2005
12	Equatorial Guinea	$ 44,100	2007 est.
13	Cayman Islands	$ 43,800	2004 est.
14	Hong Kong	$ 42,000	2007 est.
15	Switzerland	$ 39,800	2007 est.
16	Iceland	$ 39,400	2007 est.
17	Austria	$ 39,000	2007 est.
18	Andorra	$ 38,800	2005
19	Netherlands	$ 38,600	2007 est.
20	British Virgin Islands	$ 38,500	2004 est.

21	Canada	$ 38,200	2007 est.
22	Gibraltar	$ 38,200	2005 est.
23	Australia	$ 37,500	2007 est.
24	Denmark	$ 37,400	2007 est.
25	Sweden	$ 36,900	2007 est.
26	Belgium	$ 36,500	2007 est.
27	Finland	$ 35,500	2007 est.
28	United Kingdom	$ 35,300	2007 est.
29	Isle of Man	$ 35,000	2005 est.
30	Bahrain	$ 34,700	2007 est.
31	Germany	$ 34,400	2007 est.
32	San Marino	$ 34,100	2004 est.
33	France	$ 33,800	2007 est.
34	Japan	$ 33,800	2007 est.
35	**Spain**	$ 33,700	2007 est.
36	European Union	$ 32,900	2007 est.
37	Faroe Islands	$ 31,000	2001 est.
38	Italy	$ 31,000	2007 est.
39	Greece	$ 30,500	2007 est.
40	Monaco	$ 30,000	2006 est.

Fig. 2. Rànquing mundial de producció agregada per càpita (en dòlars), 29 de gener de 2008, Món= 10000
https://www.cia.gov/library/publications/the-world-factbook/rankorder/2004rank.html

Què s'espera d'una economia en el llarg termini?

- L'èxit d'una economia en el llarg termini es mesura en termes de la seva capacitat d'incrementar la producció agregada per càpita; això és, d'incrementar el nivell de vida dels qui formen part de l'economia.
- Per tant, en el llarg termini, "bon funcionament d'una economia" s'dentifica amb "creixement de la producció per càpita".
- A la inversa, la principal malaltia d'una economia en el llarg termini serà la incapacitat d'aconseguir un creixement sostingut de la producció per càpita. Per això es jutja desitjable aconseguir el creixement de la producció per càpita en el llarg termini.

La Macroeconomia del llarg termini

- Considerant-se l'insuficient creixement de la producció per càpita el principal problema a què es pot enfrontar una economia en el llarg termini, l'anàlisi macroeconòmica de llarg termini pren com a qüestió prioritària l'estudi dels factors que determinen el creixement a llarg termini de la producció per càpita.
- La resta d'aquest tema es reserva a la construcció i ús d'un model del creixement de la producció per càpita en el llarg termini: el model de creixement Solow –degut a Robert Solow, premi Nobel d'Economia al 1987, http://en.wikipedia.org/wiki/Solow_model–.

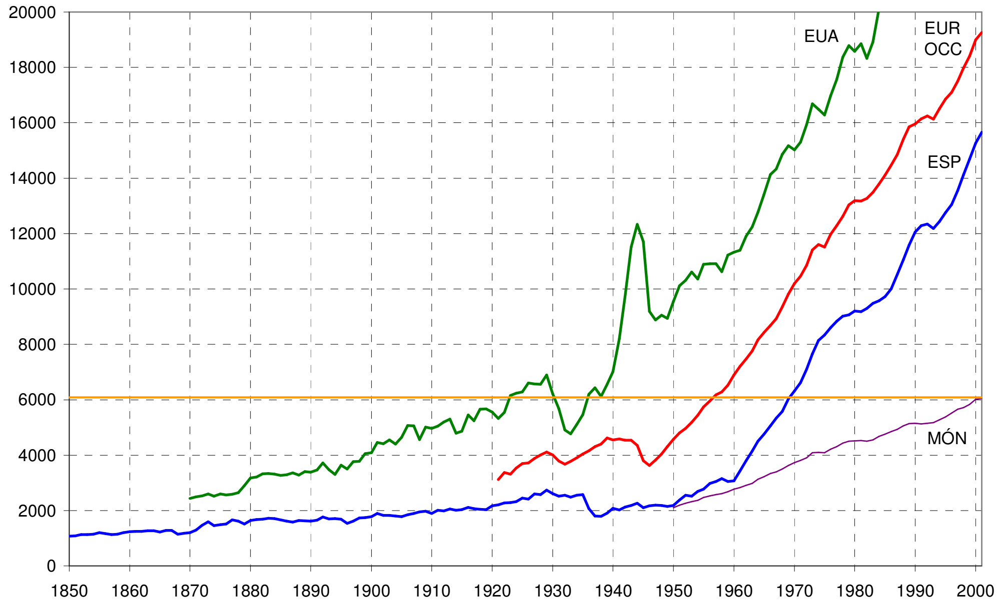


Fig. 3. Producció agregada per càpita en milions de dòlars internacionals de 1990 Geary-Khamis (1850-2001, Estats Units, Europa Occidental, Espanya i el món)
Font: Angus Maddison, *The World Economy: Historical Statistics* (2003, *OECD Development Centre*, www.oecd.org/dev)

Model d'una economia en el llarg termini

- L'economia representada en el model està formada per dos sectors (tal i com s'il·lustra a la Fig. 7):
  - el sector de la producció, que és on es produeixen els béns de l'economia;
  - el sector de la despesa, que és on els béns produïts s'assignen als diferents usos. En el model només hi ha dos usos dels béns: o es consumeixen o s'inverteixen.

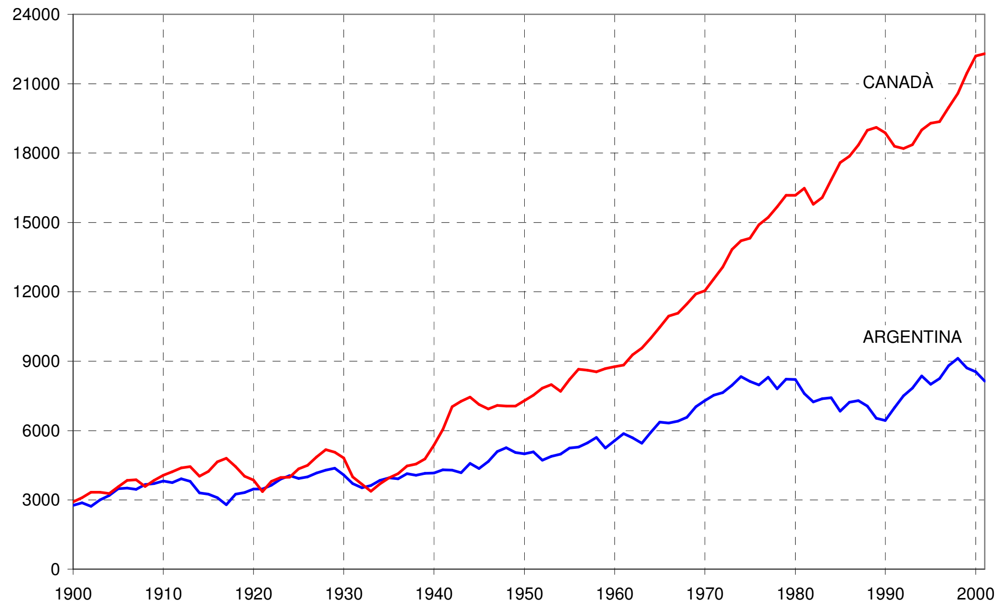


Fig. 4. Producció agregada per càpita, 1900-2001, Argentina i Canadà (font i unitats com a la Fig. 3)

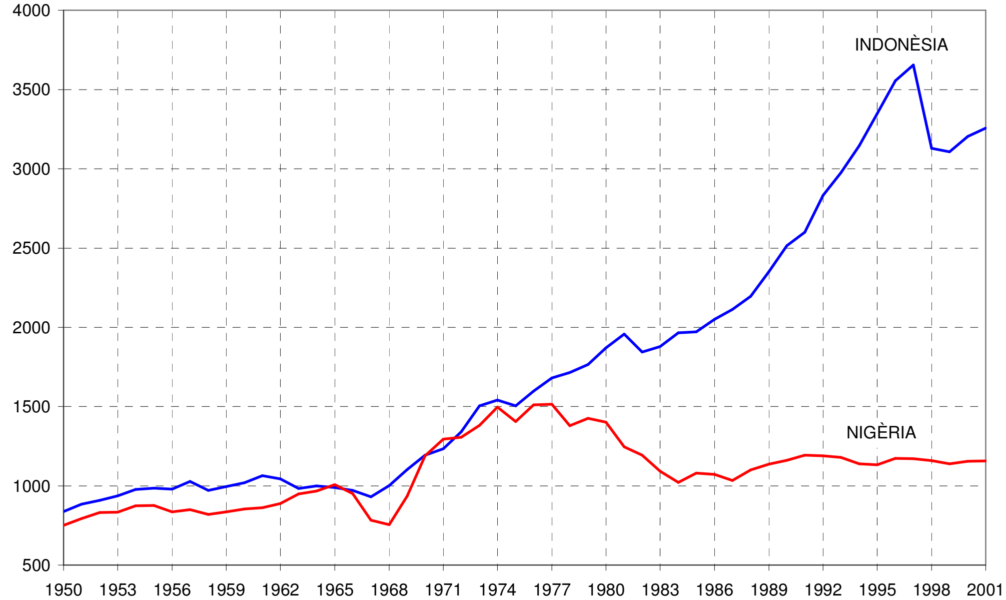


Fig. 5. Producció agregada per càpita, 1950-2001, Nigèria i Indonèsia (font i unitats com a la Fig. 3)

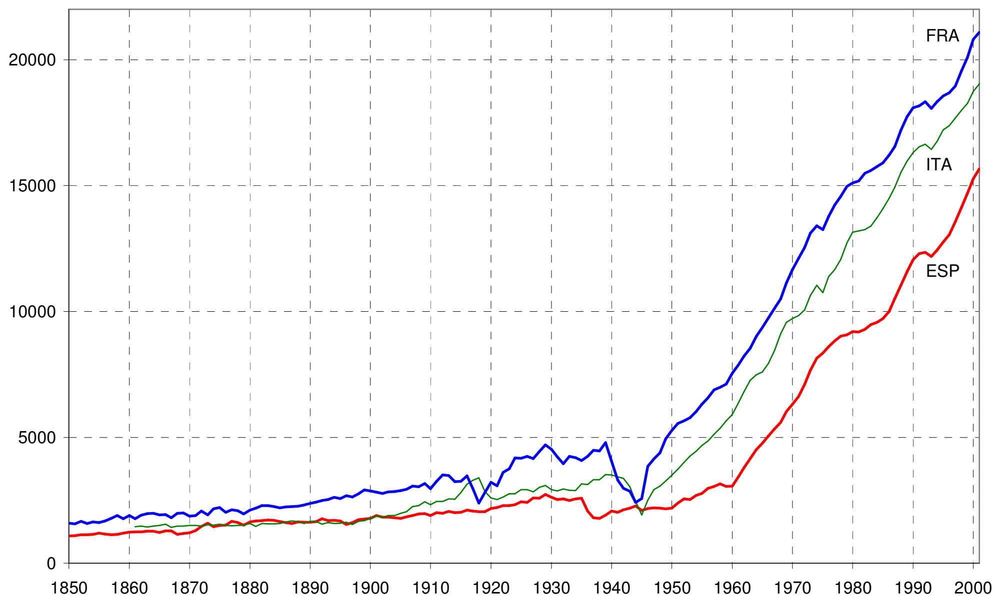


Fig. 6. Producció agregada per càpita, 1850-2001, Espanya, França i Itàlia (font i unitats: Fig. 3)

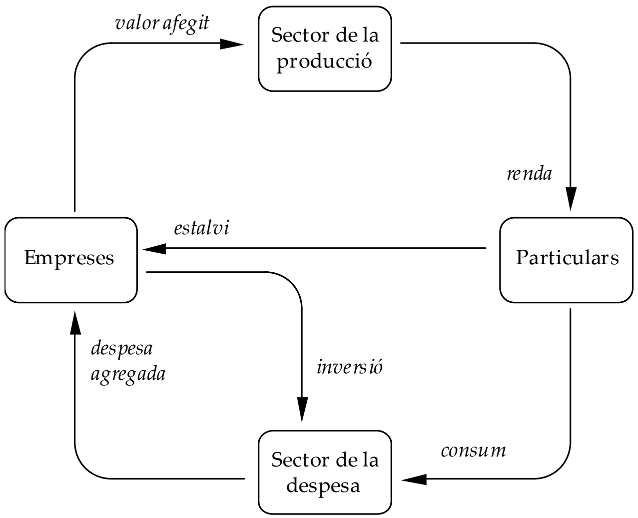


Fig. 7. Estructura de l'economia al model de creixement de Solow

El sector de la producció

- El sector de la producció està representat per dos elements: les dotacions de factors de producció de l'economia i l'estat de la tecnologia productiva.
- Els factors de producció són els béns que s'empren per a produir béns. Els factors de producció s'agrupen en dues categories, anomenades "capital" i "treball".
  - El factor capital agrupa tots els mitjans de producció: eines, maquinària, instal·lacions productives, matèries primeres… El capital es veu afectat per la depreciació: quan s'empra en el procés productiu, el capital pateix desgast i, amb temps suficient, desapareix.
  - El factor treball representa els serveis productius que realitzen les persones.
- L'estat de la tecnologia productiva es representa mitjançant una funció de producció agregada, que especifica quina és la producció agregada que es pot obtenir a partir de determinades quantitats de capital i treball.

El sector de la despesa

- El sector de la despesa determina quina part de la producció va a parar al factor treball i s'acaba consumint i quina part va a parar al factor capital i s'acaba invertint.
- El consum s'entén que permet la reposició del factor treball; la inversió s'entén que permet la reposició del factor capital.

Interacció dels sectors de l'economia

- La Fig. 8 mostra com interactuen els dos sectors de l'economia. L'economia parteix de certs nivells de capital i de treball i d'una determinada tecnologia productiva representada per la funció de producció.
- Quan els factors de producció es combinen amb la funció de producció es genera un determinat volum de producció agregada. Durant el procés de producció, una part del capital es deprecia i es perd.
- La producció agregada entra en el sector de la despesa i es destina a dos usos: al consum i a la inversió. Aleshores l'economia entra en un nou cicle de producció on, si no canvia, la tecnologia productiva és la mateixa que inicialment però les dotacions de capital i treball seran, en principi, diferents: la quantitat de treball dependrà de com el consum ha permès incrementar la població i la quantitat de capital dependrà de la relació entre el capital perdut (la depreciació) i el capital guanyat (la inversió). El model de Solow formalitza matemàticament aquestes idees.

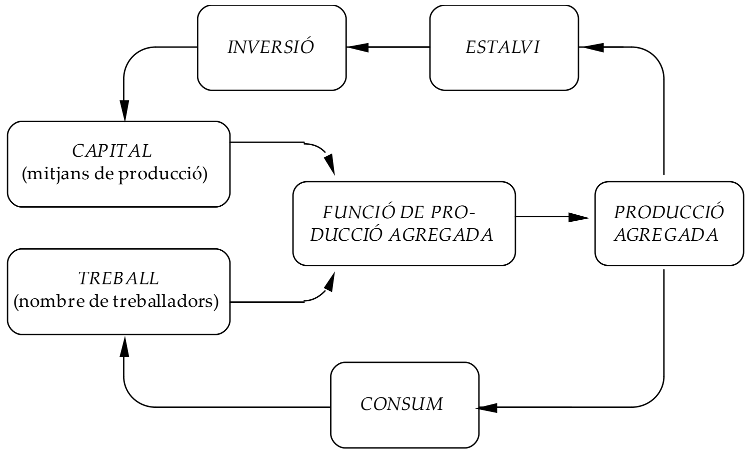


Fig. 8. Estructura del model de creixement de Solow

El model de Solow I. Sector de la producció: factors de producció

- El model de Solow és un model dinàmic. Això vol dir que les variables estan referides a un moment del temps. El temps es mesurarà en períodes discrets: 1, 2, 3…
- Es dessigna per K_t l'estoc de capital de l'economia a l'inici del període t i per L_t el nombre de treballadors de l'economia a l'inici del període t.
- S'assumeix que no hi ha atur: tothom a l'economia col·labora en la producció. Per tant, L és tant el nombre de treballadors com la població de l'economia. També s'assumeix que tot el capital de l'economia s'empra en la producció.
- La població creix a una taxa constant positiva n expressada en tant per u. Així, si a l'inici del període t hi ha L_t treballadors, a l'inici del període següent $t + 1$ hi ha $L_t + nL_t = (1 + n)L_t$ treballadors. Per exemple, $n = 0'02$ significa que la població creix un 2% cada període.
- El capital es deprecia a una taxa constant δ, la taxa de depreciació, que és un nombre entre 0 i 1. Això significa que, si a l'inici del període t hi ha l'estoc K_t de capital, al final del període (quan el procés de producció ha finalitzat), només es disposa de l'estoc de capital $K_t - \delta K_t = (1 - \delta)K_t$ per a poder ser emprat en la producció al període següent $t + 1$. Per exemple, si $\delta = 0'1$, cada període es deprecia un 10% del capital.

El model de Solow II. Sector de la producció: funció de producció agregada

- Es dessigna per Y_t la producció agregada de l'economia al final del període t. Aquesta producció s'obté de combinar el capital K_t i el treball L_t disponibles a l'economia a l'inici del període t segons la tecnologia embotida a una funció de producció agregada.

Funcions de producció agregada Cobb-Douglas

- Una funció de producció agregada tindrà la forma $Y_t = F(K_t, L_t)$. Atès que totes les variables es refereixen al mateix període, es pot abreujar i escriure simplement $Y = F(K, L)$.
- Amb A, α i β essent constants positives, les funcions de producció agregada Cobb-Douglas són aquelles que prenen la forma (on A representa la productivitat dels factors)

$$Y = A\, K^{\alpha} L^{\beta}. \tag{1}$$

Rendiments d'escala d'una funció de producció agregada

- La funció de producció $F(K, L)$ té rendiments creixents d'escala si una variació de tots els factors de producció en una determinada proporció $\lambda > 1$ causa una variació de la producció agregada superior a λ. Això és, per a tot $\lambda > 1$, $F(\lambda K, \lambda L) > \lambda\, F(K, L)$. Quan hi ha rendiments creixents, un augment de, per exemple, un 5% en tots els factors, farà que la producció resultant augmenti més d'un 5%; i una disminució de, per exemple, el 20% en tots els factors, provocarà una reducció de la producció en més d'un 20%.
- La funció de producció $F(K, L)$ té rendiments decreixents d'escala si una variació de tots els factors de producció en una determinada proporció $\lambda > 1$ causa una variació de la producció agregada inferior a λ. Això és, per a tot $\lambda > 1$, $F(\lambda K, \lambda L) < \lambda\, F(K, L)$.
- La funció de producció $F(K, L)$ té rendiments constants d'escala si una variació de tots els factors de producció en una determinada proporció $\lambda > 0$ causa una variació de la producció agregada també en la proporció λ. Això és, per a tot $\lambda > 0$, $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda\, F(K, L)$.

Rendiments d'escala a les funcions de producció agregada Cobb-Douglas

- Sigui $Y = A\, K^{\alpha} L^{\beta}$ una funció de producció agregada Cobb-Douglas. Aleshores la funció té:
  - rendiments creixents d'escala si, i només si, $\alpha + \beta > 1$;
  - rendiments decreixents d'escala si, i només si, $\alpha + \beta < 1$; i
  - rendiments constants d'escala si, i només si, $\alpha + \beta = 1$.
- Per exemple, sigui $Y = F(K, L) = 2KL$. En aquest cas, $A = 2$ i $\alpha = \beta = 1$. Comprovem que els rendiments són creixents. D'una banda, si s'empra el parell (K, L), la producció resultant serà $F(K, L) = 2KL$. D'una altra, si multipliquem per $\lambda > 1$ tots els factors, el parell resultant $(\lambda K, \lambda L)$ generarà la producció $F(\lambda K, \lambda L) = 2\,(\lambda K)\,(\lambda L) = \lambda^2\, 2KL = \lambda^2\, F(K, L) > \lambda\, F(K, L)$. Com a resultat, la funció de producció $Y = 2KL$ té rendiments creixents. Un exemple numèric dóna un indici del resultat. Per exemple, si $K = 3$ i $L = 4$, $F(3, 4) = 2{\cdot}3{\cdot}4 = 24$. Si dupliquem tots els factors (fet que implica considerar el cas $\lambda = 2$), $K = 6$ i $L = 8$, de manera que $F(6, 8) = 2{\cdot}6{\cdot}8 = 96$, que és més del doble de la producció 24 obtinguda abans de duplicar els factors: rendiments creixents.

Productivitat marginal d'un factor de producció segons una funció de producció

- Intuïtivament, la productivitat marginal d'un factor de producció diu quanta producció més s'obté si s'afegeix una unitat més del factor, amb els altres factors constants, i quanta producció es perd si s'elimina una unitat del factor, amb els altres factors constants.
- La productivitat marginal PMg_K del factor K segons la funció de producció agregada $F(K, L)$ és la derivada $\frac{\partial F}{\partial K}$ de la funció de producció F respecte de K.
- La productivitat marginal de K indica què passa amb la producció quan varia només K: en quant varia la producció quan varia l'estoc de capital, mantenint constant el treball.
- La productivitat marginal PMg_L del factor L segons la funció de producció agregada $F(K, L)$ és la derivada $\frac{\partial F}{\partial L}$ de la funció de producció F respecte d'L.
- La productivitat marginal d'L indica què passa amb la producció quan varia només L: en quant varia la producció quan varia el treball, mantenint constant l'estoc de capital.
- En principi, és d'esperar que la productivitat marginal d'un factor sigui positiva: afegir més factor de producció al procés productiu, hauria de fer créixer la producció.
- Però la funció de productivitat marginal d'un factor tant pot ser creixent com decreixent. Productivitat marginal creixent significa que cada unitat addicional del factor fa créixer cada cop més la producció: cada nova unitat del factor, aporta més producció. Productivitat marginal decreixent vol dir que cada unitat addicional del factor fa créixer cada cop menys la producció: cada nova unitat del factor, aporta menys producció.

Hipòtesi del model de Solow sobre la funció de producció agregada

- La funció de producció agregada de l'economia té rendiments constants d'escala. Aquesta hipòtesi té certa plausibilitat: si amb una determinada combinació de factors (K, L) s'obté la producció Y, replicant el parell (K, L) s'hauria de poder tornar a obtenir Y.
- A una funció de producció Cobb-Douglas que tingui rendiments constants les productivitats marginals dels dos factors són decreixents.
- Per exemple, sigui $Y = F(K, L) = 2\,K^{1/2}\,L^{1/2}$. Aquesta funció té rendiments constants: amb $\lambda > 0$, $F(\lambda K, \lambda L) = 2\,(\lambda K)^{1/2}\,(\lambda L)^{1/2} = 2\,\lambda^{1/2}\,K^{1/2}\,\lambda^{1/2}\,L^{1/2} = 2\,\lambda^{1/2}\,\lambda^{1/2}\,K^{1/2}\,L^{1/2} = \lambda\,2\,K^{1/2}\,L^{1/2} = \lambda\,F(K, L)$. Per tant, si tots els factors es multipliquen per λ, la producció també es multiplica per λ. La productivitat marginal de K és $PMg_K = \frac{\partial F}{\partial K} = 2\,L^{1/2}\,\frac{1}{2}\,K^{1/2-1} = L^{1/2}\,K^{-1/2} = \frac{L^{1/2}}{K^{1/2}} = \left(\frac{L}{K}\right)^{1/2}$. Atès que, fixat L, un augment de K redueix $\left(\frac{L}{K}\right)^{1/2}$, la productivitat marginal de K és decreixent.

Fonsts de creixement de la producció agregada

- Fixada una funció de producció agregada $Y = F(K, L)$ amb productivitats marginals de cada factor positives, hi ha tres causes que poden fer créixer Y.
- Primer, el creixement de la població: amb $PMg_L > 0$, més L implica més Y.
- Segon, l'acumulació de capital: amb $PMg_K > 0$, més K implica més Y.
- I tercer, el progrés tecnològic, que vol dir poder produir més amb el mateix (o produir el mateix amb menys factors). El progrés tecnològic es representa mitjançant un canvi de la funció de producció de manera que la nova funció permeti produir més que abans amb les mateixes quantitats de factors. Així, si F' és tal que, per a tot (K, L), $F'(K, L) > F(K, L)$, pot interpretar-se que el pas d'F a F' representa progrés tecnològic.
- Que les productivitats marginals dels dos factors siguin decreixents fa inviable un creixement sostingut de la producció agregada incrementant només un factor.

El model de Solow III. Sector de la despesa: el consum

- Es dessigna per C_t el consum agregat, i per S_t l'estalvi agregat, de l'economia al final del període t. Atès que cada unitat de producció es consumeix o s'estalvia, es té, per a cada període t,

$$Y_t = C_t + S_t. \tag{2}$$

- El model assumeix que cada període s'estalvia una proporció fixa s de la producció del final del període, on s és un nombre entre 0 i 1 anomenat "taxa d'estalvi". Per tant, per a cada període t,

$$S_t = s \cdot Y_t. \tag{3}$$

- Combinant (2) i (3),

$$C_t = (1 - s)\,Y_t, \tag{4}$$

que significa que, cada període, es consumeix la proporció fixa $(1 - s)$ de la producció.

El model de Solow IV. Sector de la despesa: la inversió

- Es dessigna per I_t la inversió agregada de l'economia al final del període t. Atès que cada unitat de producció es consumeix o s'inverteix, resulta que, per a cada període t,

$$Y_t = C_t + I_t. \tag{5}$$

- Combinant (2) i (5),

$$I_t = S_t\,, \tag{6}$$

que significa que, cada període, s'inverteix tot el que s'estalvia.

- Al model, el factor capital es mesura de forma que una unitat d'inversió equival a una unitat de capital.

L'acumulació de capital

- El procés d'acumulació de capital està sotmès a dues forces oposades. La primera prové de la depreciació, que fa que, en el pas d'un període a l'altre, hi hagi una reducció de l'estoc de capital per desgast.
- La segona prové de la inversió, que fa que, en el pas d'un període a l'altre, hi hagi un augment de l'estoc de capital per l'estalvi de producció que no es consumeix.
- Construïm ara l'equació que permet determinar com s'acumula el capital. Sigui $\Delta K_t = K_{t+1} - K_t$ la variació que experimenta l'estoc de capital en el pas del període t al període següent $t + 1$. Per definició, K_{t+1} és l'estoc de capital $(1 - \delta)K_t$ que no s'ha depreciat al període t (l'estoc romanent) més el nou estoc I_t creat mitjançant la inversió. Així, $\Delta K_t = K_{t+1} - K_t = (1 - \delta)K_t + I_{t+1} - K_t = I_t - \delta K_t$. Per tant,

$$\Delta K_t = I_t - \delta K_t \,. \tag{7}$$

- L'equació (7) no diu més que el capital que s'acumula cada període és el capital creat (mitjançant la inversió) menys el capital perdut (per causa de la depreciació).
- Combinant (3) i (6), s'obté $I_t = s{\cdot}Y_t$. Substituint a (7) resulta

$$\Delta K_t = s{\cdot}Y_t - \delta K_t \,. \tag{8}$$

Variables per càpita

- El fet que la funció de producció agregada té rendiments constants permet expressar el model amb variables per càpita, això és, amb les variables dividides per L.
- Emprant lletres minúscules per a dessignar variables per càpita, $y_t = \frac{Y_t}{L_t}$ és la producció agregada per càpita en el període t, $c_t = \frac{C_t}{L_t}$ és el consum per càpita en el període t, $i_t = \frac{I_t}{L_t}$ és la inversió per càpita en el període t i $k_t = \frac{K_t}{L_t}$ és el capital per càpita en el període t.

La funció de producció agregada en termes per càpita

- Que la funció $Y = F(K, L)$ tingui rendiments constants vol dir que, per a tot $\lambda > 0$, $\lambda Y = F(\lambda K, \lambda L)$. En particular, això serà vàlid per a $\lambda = \frac{1}{L}$. Per tant, $\frac{1}{L}Y = F(\frac{1}{L}K, \frac{1}{L}L)$.
- Així, s'obté $\frac{Y}{L} = F(\frac{K}{L}, 1)$ o, de manera equivalent, $y = f(k)$, on f és la funció tal que $f(k) = F(k, 1)$.
- Poder passar de la funció $Y = F(K, L)$ a $y = f(k)$ indica que la producció per càpita pot expressar-se directament en termes del capital per càpita: el que produeix cada treballador és funció del capital de què disposa cada treballador.
- Com a il·lustració d'aquest resultat, sigui $Y = 6\,K^{1/3}\,L^{2/3}$. Dividint tots dos costats per L, resulta $\frac{Y}{L} = \frac{6K^{1/3}L^{2/3}}{L} = 6K^{1/3}\frac{L^{2/3}}{L} = 6K^{1/3}\frac{1}{L^{1/3}} = 6\left(\frac{K}{L}\right)^{1/3} = 6k^{1/3}$. En resum, $y = 6k^{1/3}$.

Expressant l'acumulació de capital en termes per càpita

- Considerem el cas on $n = 0$: la població no creix. Aleshores, (8) resumeix tot el model de Solow, que es redueix a especificar 3 elements: una funció de producció agregada $Y = F(K, L)$ amb rendiments constants, una taxa d'estalvi s i una taxa de depreciació δ.
- Provem ara d'expressar (8) en termes per càpita. Primer dividim els dos costats de (8) per L_t. Atès que $\Delta K_t = K_{t+1} - K_t$ i que $L_{t+1} = (1 + n)L_t = (1 + 0)L_t = L_t$, a l'esquerra tenim

$$\frac{\Delta K_t}{L_t} = \frac{K_{t+1} - K_t}{L_t} = \frac{K_{t+1}}{L_t} - \frac{K_t}{L_t} = \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} - \frac{K_t}{L_t} = k_{t+1} - k_t = \Delta k_t.$$

- Atès que $Y_t = F(K_t, L_t)$ i que F té rendiments constants, $y_t = f(k_t)$, on $f(k_t) = F(k_t, 1)$. Així que

$$\frac{sY_t - \delta K_t}{L_t} = \frac{sY_t}{L_t} - \frac{\delta K_t}{L_t} = s\frac{Y_t}{L_t} - \delta\frac{K_t}{L_t} = s{\cdot}y_t - \delta k_t = s{\cdot}f(k_t) - \delta k_t.$$

- En resum, quan tots dos costats de (8) es divideixen per L_t, s'obté (9), que és l'equació que descriu la dinàmica de l'acumulació del capital per càpita (o capital per treballador).

$$\Delta k_t = s{\cdot}f(k_t) - \delta k_t \tag{9}$$

Representació gràfica del model de Solow quan $n = 0$

- El model de Solow quan $n = 0$ es redueix a l'equació (9). Obviant els subíndexs temporals, (9) esdevé $\Delta k = s{\cdot}f(k) - \delta k$.
- Les dues funcions $s{\cdot}f(k)$ i δk depenen de k. La segona funció és lineal. La primera és còncava perquè $f(k)$ és còncava i $f(k)$ és còncava perquè $f(k) = F(k, 1)$ i la productivitat marginal del factor K segons F és decreixent (això fa que el valor d' $F(k, 1)$ creixi cada cop menys a mesura que k augmenta). La Fig. 9 representa $f(k)$, $s{\cdot}f(k)$ i δk.

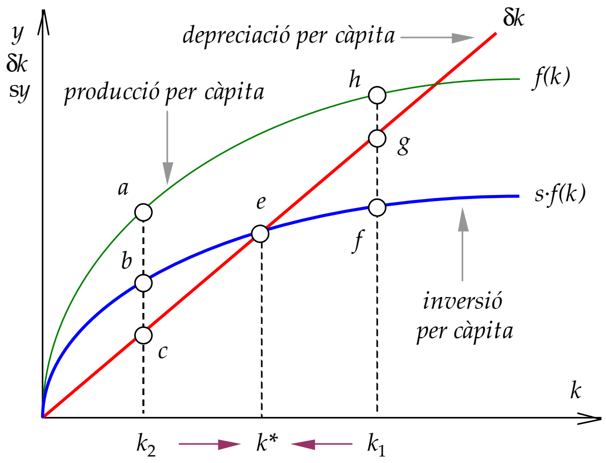


Fig. 9. Representació gràfica del model de Solow quan $n = 0$ (la població no creix)

Solució del model de Solow quan $n = 0$

- Si $s{\cdot}f(k_t) > \delta k_t$, la inversió per càpita és superior a la depreciació per càpita al període t i, per tant, $\Delta k_t > 0$: al període t hi ha <u>acumulació de capital per càpita</u> i, així, $k_{t+1} > k_t$.
- Això passa, per exemple, quan $k = k_2$. En aquest cas, l'alçada fins al punt b és la inversió per càpita i l'alçada fins al punt c és la depreciació per càpita. Per tant, si el capital per càpita de l'economia a un determinat període és k_2, al període següent serà superior a k_2 perquè s'acumula capital per càpita.
- Com a conseqüència de l'acumulació de capital, la producció per càpita creix i l'economia passa del punt a a un punt a la dreta d'a sobre la funció $y = f(k)$.
- Si $s{\cdot}f(k_t) < \delta k_t$, la inversió per càpita és inferior a la depreciació per càpita al període t i, per tant, $\Delta k_t < 0$: al període t hi ha <u>desacumulació de capital per càpita</u> i, així, $k_{t+1} < k_t$.
- Això passa, per exemple, quan $k = k_1$. En aquest cas, l'alçada fins al punt f és la inversió per càpita i l'alçada fins al punt g és la depreciació per càpita. Per tant, si el capital per càpita de l'economia a un determinat període és k_1, al període següent serà inferior a k_2 perquè es desacumula capital per càpita.
- Com a conseqüència de la desacumulació de capital, la producció per càpita decreix i l'economia passa del punt h a un punt a l'esquerra d'h sobre la funció $y = f(k)$.
- Així que l'economia no es troba en una situació estable quan $\Delta k_t > 0$ ni quan $\Delta k_t < 0$. <u>Només quan $\Delta k_t = 0$ no hi ha tendència al canvi</u>: la inversió coincideix amb la depreciació i ni s'acumula ni es desacumula capital per càpita. Atès que no canvia el capital per càpita, no canvia la producció per càpita i l'economia assoleix un estat que s'anomena <u>estat estacionari de l'economia</u>.

L'estat estacionari al model de Solow

- L'estat estacionari de l'economia al model de Solow és l'<u>estat de l'economia on $\Delta k = 0$</u>: l'economia ni acumula ni desacumula capital per càpita.
- A la Fig. 9, l'estat estacionari el determina la <u>intersecció</u> de la funció d'inversió (i estalvi) per càpita $s{\cdot}f(k)$ i la funció de depreciació per càpita δk. El valor k^* és el capital per càpita de l'estat estacionari.
- <u>L'economia convergeix al capital per càpita k^* de l'estat estacionari</u>: si $k < k^*$, $\Delta k > 0$ i k augmenta; i si $k > k^*$, $\Delta k < 0$ i k disminueix.

Exemple de càlcul de l'estat estacionari al model de Solow

- Sigui una economia amb funció de producció agregada, expressada en termes per càpita, $y = 2k^{1/2}$, amb taxa d'estalvi $s = 0'4$ i amb taxa de depreciació $\delta = 0'2$. L'estat estacionari s'obté resolent l'equació $s{\cdot}f(k) = \delta k$. Així, $0'4 \cdot 2k^{1/2} = 0'2k$. Per tant, $4 = k^{1/2}$ i, d'aquí, $k^* = 16$.
- <u>Coneixent k a l'estat estacionari, es poden determinar la resta de variables a l'estat estacionari</u>. Primer, la producció per càpita és $f(k^*) = 2(16)^{1/2} = 8$. Segon, la depreciació per càpita és $\delta k^* = 0'2{\cdot}16 = 3'2$. Tercer, l'estalvi per càpita és $s{\cdot}f(k^*) = 0'4{\cdot}8 = 3'2$. Quart, per la igualtat entre estalvi per càpita i la inversió per càpita, la inversió per càpita és 3'2. Cinquè, atès que la producció per càpita és la suma del consum per càpita i la inversió per càpita, el consum per càpita és $8 - 3'2 = 4'8$.
- La Fig. 10 il·lustra numèricament la convergència de l'economia a l'estat estacionari.

període	k	y	c	i	δk	Δk
1	9	6	3'6	2'4	1'8	0'6
2	9'6	6'196	3'718	2'478	1'92	0'558
3	10'158	6'374	3'824	2'549	2'031	0'518
4	10'676	6'535	3'921	2'614	2'135	0'478
5	11'155	6'679	4'007	2'671	2'231	0'440
15	14'200	7'536	4'521	3'014	2'840	0'174
30	15'619	7'904	4'742	3'161	3'123	0'037
70	15'994	7'998	4'799	3'199	3'198	0'0005
100	15'999	7'999	4'799	3'199	3'199	0'00002
∞	16	8	4'8	3'2	3'2	0

Fig. 10. Convergència a l'estat estacionari al model de Solow amb $y = 2\,k^{1/2}$, $s = 0'4$, $\delta = 0'2$ i $k_1 = 9$

Identificació gràfica del valor de les macromagnituds

- A la Fig. 9, <u>cada valor de k identifica un possible estat de l'economia</u>. Quan, per exemple, $k = k_2$, la producció per càpita la dóna l'alçada fins al punt a: quan el capital per càpita és k_2, <u>el punt a determina quina és la producció per càpita a l'economia</u>.

- A la mateixa Fig. 9, <u>l'alçada fins al punt c és la depreciació per càpita</u> quan el capital per càpita és k_2. <u>L'alçada fins al punt b és l'estalvi per càpita</u> quan el capital per càpita és k_2.

- Per la igualtat entre estalvi per càpita i inversió per càpita, <u>l'alçada fins al punt b també és la inversió per càpita</u> quan el capital per càpita és k_2.

- Atès que el consum per càpita és la producció per càpita menys l'estalvi per càpita, la diferència vertical entre les funcions $f(k)$ i $s{\cdot}f(k)$ és el consum per càpita. Així, quan el capital per càpita és k_2, <u>la distància entre a i b és el consum per càpita</u>.

- Finalment, <u>la distància entre b i c representa l'acumulació de capital per càpita</u> que té lloc a l'economia quan es parteix del nivell k_2 de capital per càpita. Es tracta d'un increment perquè, quan el capital per càpita és k_2, la inversió per càpita supera la depreciació per càpita (quan $k = k_2$, la funció $s{\cdot}f(k)$ queda per damunt de la funció δk). Per tant, la distància entre b i c representa l'augment de capital per càpita disponible per al període següent, període per al qual l'economia disposarà de k_2 més la distància entre b i c.

- La Fig. 11 il·lustra com identificar gràficament aquests valors, al període inicial $t = 1$, a l'economia on $y = 2k^{1/2}$, $s = 0'4$ i $\delta = 0'2$. Les dades per a $t = 1$ impliquen una acumulació de capital per càpita $\Delta k_1 = 0'6$, de forma que $k_2 = k_1 + \Delta k_1 = 9'6$. Gràficament, s'observa que l'acumulació Δk_2 al període $t = 2$ (la diferència entre les funcions d'estalvi i depreciació) és més petita, de forma que l'acumulació s'esmorteeix fins a anul·lar-se quan s'assoleix l'estat estacionari.

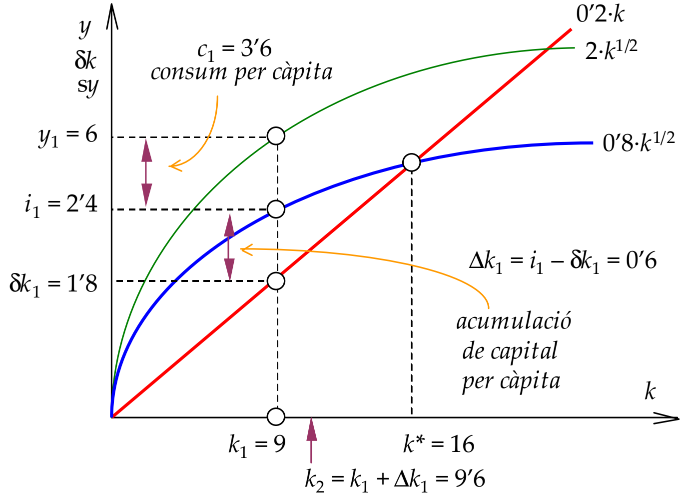


Fig. 11. Representació gràfica del model de Solow amb $y = 2\,k^{1/2}$, $s = 0'4$, $\delta = 0'2$ i $k_1 = 9$

Lliçons del model de Solow quan $n = 0$

- Totes les lliçons del model es redueixen a una: a la llarga, quan s'arriba a l'estat estacionari, <u>l'economia deixa de créixer</u>. Les raons d'aquesta conclusió són les següents:
  - a l'estat estacionari, k és constant;
  - atès que $k = \dfrac{K}{L}$ és constant i atès que L és constant (ja que $n = 0$), K és constant;
  - amb K i L constants, $Y = F(K, L)$ també és constant;
  - amb Y constant, l'estalvi agregat $S = sY$ també és constant;
  - amb S constant, i donat que $I = S$, la inversió agregada I també és constant;
  - amb Y i S constants, $C = Y - S$ també és constant;
  - i, atès que Y, C, S i I són constants, les respectives variables per càpita també ho són.

Aplicabilitat del model de Solow quan $n = 0$

- Quina mena de model de creixement és un que prediu que, a la llarga, no hi creixement?

- Considerem l'<u>economia mundial entre els anys –1000 i 0</u>. Definim cada període t com un període de 25 anys, de manera que el mil·lenni considerat cobreix 40 períodes (a la Fig. 10, noteu com de propers són els valors al període 30 als valors de l'estat estacionari).

- El creixement de la població durant cada 25 anys era tan baix, que assumir-lo 0 és una aproximació raonable. També sembla una relativament bona aproximació considerar que el progrés tecnològic durant el mil·lenni no va ser significativament important, raó per la qual es pot assumir fixada una funció de producció agregada durant tot el mil·leni. A més, el fet que gairebé tota la producció la generés l'activitat agrícola, fa molt plausible que la productivitat marginal del capital fos decreixent. Això fa plausible considerar una funció de producció agregada $y = f(k)$ còncava (com la representada a la Fig. 9).

- D'altra banda, atès que el consum per càpita estaria no gaire per damunt del nivell de subsistència, la taxa d'estalvi seria aproximadament constant (i baixa). Per últim, el fet que pràcticament tot el capital consistís en terres de cultiu, animals domèstics i eines rudimentàries, suggereix que la taxa de depreciació seria relativament constant (i reduïda). Si adoptem aquestes hipòtesis, <u>el model de Solow amb $n = 0$ és una representació versemblant de l'economia</u>.

- Durant aquest mil·lenni, el creixement de tant la producció per càpita com del consum per càpita van ser gairebé menyspreables, la qual cosa és consistent amb el que prediu el model de Solow amb $n = 0$: convergència a un estat on no hi ha creixement apreciable.

- Certes economies (des de la Revolució Industrial) i l'economia mundial (almenys des de mitjans del segle XIX) han experimentat creixement, ja sigui de magnituds absolutes (com la producció agregada) o de magnituds relatives (com la producció agregada per càpita). Què pot explicar aquest canvi? Retornem al model de Solow i analitzem quins canvis són susceptibles d'evitar el destí de l'estagnació.

Estàtica comparativa al model de Solow quan $n = 0$

- Els exercicis d'estàtica comparativa consisteixen en determinar com canvia la solució d'un model quan es modifiquen els elements exògens del model (aquells elements que el model no explica sinó que pren com a donats). Per exemple, a Microeconomia, un exercici d'estatàtica comparativa consisteix en determinar com varia l'equilibri de mercat si augmenta la renda dels consumidors o si es redueix el nombre de productors.
- Al model de Solow quan $n = 0$, els elements exògens (o paràmetres del model) són tres: la funció de producció, la taxa de depreciació i la taxa d'estalvi.
- Per què no comptar com a element exogen el valor inicial del capital per càpita? De fet ho és, però tots els valors inicials possibles porten al mateix estat estacionari. I atès que el que interessa és la solució del model (l'estat estacionari), és irrelevant quin valor inicial del capital per càpita es prengui. La situació és anàloga a la que es produeix al mercat competitiu: interessa l'equilibri de mercat, no d'on parteix inicialment el mercat, perquè sigui quin sigui el preu de mercat inicial, s'acabava convergint al preu d'equilibri. És identificar aquest preu d'equilibri el que interessa. Al model de Solow, el que interessa és identificar el capital per càpita de l'estat estacionari (ja que k determina totes les altres variables del model).

Efectes sobre l'estat estacionari d'una variació de la taxa d'estalvi

- Sigui el model de Solow representat a la Fig. 12, on s'assumeix $n = 0$. L'anàlisi feta fins ara porta a la conclusió que l'economia, comenci amb el capital per càpita k que comenci, acabarà amb el capital per càpita k^*_1 (determinat pel punt a), amb la producció per càpita y^*_1 (determinada pel punt c) i amb un consum per càpita igual a la distància entre a i c.
- Suposem que la taxa d'estalvi augmenta, d's a s'. Això desplaça la funció d'estalvi per càpita cap amunt, com il·lustra la Fig. 12. El desplaçament no pot superar la funció de producció per càpita perquè la taxa d'estalvi és inferior a 1: no es pot estalviar més del que es produeix.
- Produït el canvi en la taxa d'estalvi, l'economia continua inicialment amb un estoc de capital per càpita igual a k^*_1. Però, amb la nova taxa d'estalvi, l'estalvi per càpita que correspon a k^*_1 és l'alçada fins a e, en tant que la depreciació és inferior, l'alçada fins a a. Així que, al període on es produeix el canvi de la taxa d'estalvi, s'acumula capital per càpita i k^*_1 augmenta per al següent període.
- El procés d'acumulació de capital per càpita s'aturarà al nou estat estacionari, que el determina el punt b. L'estoc de capital per càpita al nou estat estacionari és $k^*_2 > k^*_1$. La producció per càpita al nou estat estacionari és $y^*_2 > y^*_1$.
- Per tant, l'augment de la taxa d'estalvi engega un procés de creixement de la producció per càpita, en tant que l'economia és desplaça al llarg de la funció $y = f(k)$, des de c fins a d.
- Inconvenients? Com a resultat de l'augment de la taxa d'estalvi, el consum per càpita al nou estat estacionari (la distància entre b i d) és més petit que el consum per càpita a l'estat estacionari inicial (la distància entre a i c). A més, el procés de creixement no és sostingut sinó que és merament transitori: quan s'arriba al nou estat estacionari que correspon al punt b, l'economia torna al repòs, perquè cap variable no creix.
- La conclusió és que l'augment de la taxa d'estalvi pot fer créixer l'economia només transitòriament i que el cost que es paga és una reducció permanent del consum per càpita: l'augment de la inversió per càpita necessari per a sostenir un nivell de capital per càpita més elevat obliga a una reducció en el consum per càpita. Així que cada treballador produeix amb més capital però al preu d'haver de consumir menys permanentment.
- L'anàlisi anterior mostra una relació positiva entre inversió i producció per càpita. La Fig. 13 mostra evidència empírica a favor d'aquesta predicció. La Fig. 14 mostra la connexió empírica entre inversió i estalvi.

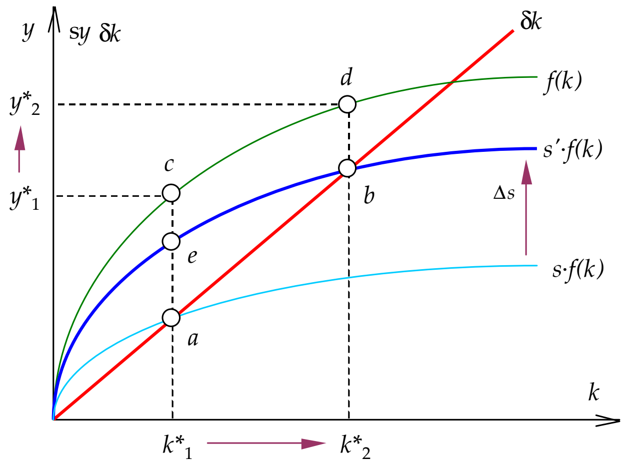


Fig. 12. Efecte sobre l'estat estacionari d'un augment de la taxa d'estalvi

Efectes sobre l'estat estacionari d'una variació de la taxa de depreciació

- Sigui el model de Solow representat a la Fig. 15, on $n = 0$. L'economia es troba a l'estat estacionari determinat pel punt a, amb capital per càpita k^*_1 i producció per càpita y^*_1.
- Suposem que la taxa de depreciació augmenta, de δ a δ'. Això fa rodar la funció de depreciació sobre l'origen i cap amunt, tal i com il·lustra la Fig. 14. El nou estat estacionari el determina el punt b. Al nou estat estacionari, $k^*_2 < k^*_1$ i $y^*_2 < y^*_1$ (què passa amb c?).
- L'augment de la taxa de depreciació genera un procés de decreixement temporal. El decreixement s'atura quan s'assoleix el nou estat estacionari. Arribada a aquest estat, l'economia s'estagna i res no creix ni decreix.

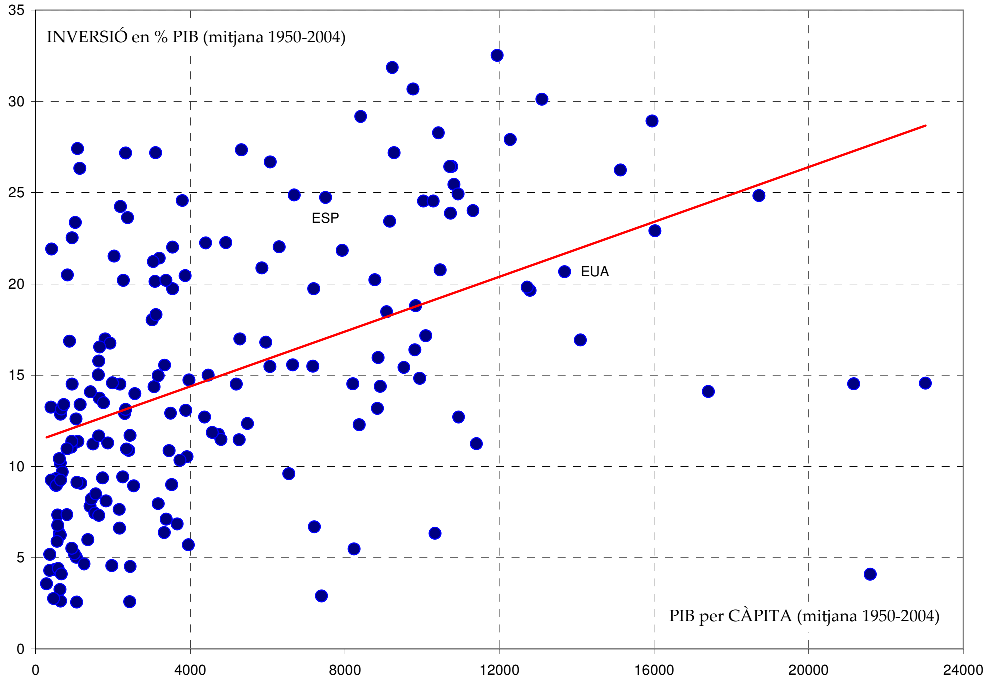
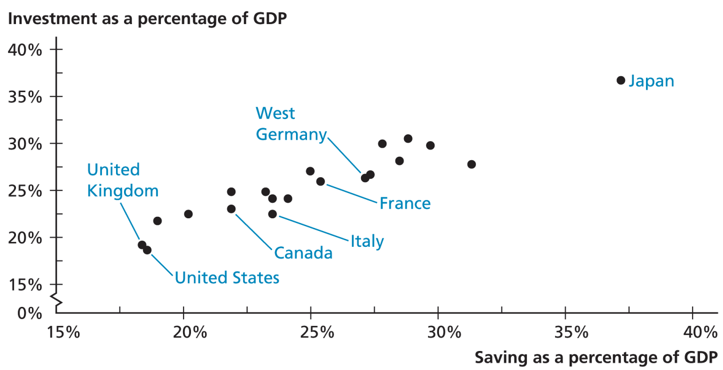


Fig. 13. Relació entre la inversió (en % sobre la producció agregada) i la producció agregada per càpita per a gairebé tots els 188 països presents a la *Penn World Table*, PWT 6.2
http://pwt.econ.upenn.edu/php_site/pwt62/pwt62_form.php

FIGURE 11.5
Saving and Investment Rates of Industrialized Countries, 1960–1974



Source: Feldstein and Horioka (1980).

Fig. 14. Relació entre estalvi i inversió
http://wps.aw.com/aw_weil_econgrowth_1/24/6169/1579312.cw/content/index.html

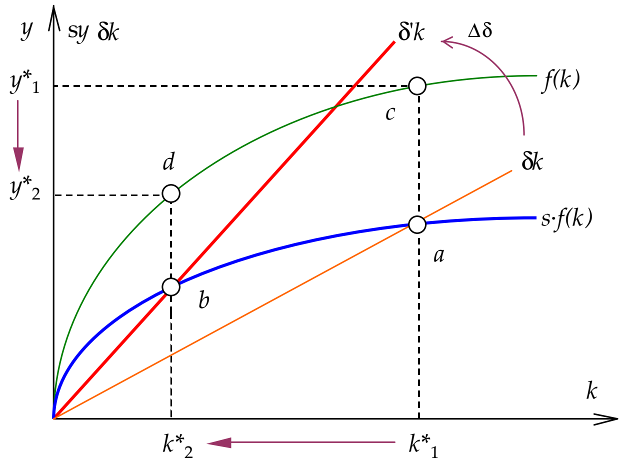


Fig. 15. Efecte sobre l'estat estacionari d'un augment de la taxa de depreciació

Efectes sobre l'estat estacionari del progrés tecnològic

- Sigui el model de Solow representat a la Fig. 16, on s'assumeix $n = 0$. D'inici, l'economia es troba a l'estat estacionari determinat pel punt a, amb capital per càpita k^*_1 i producció per càpita y^*_1.
- Suposem que la funció de producció per càpita es desplaça cap amunt (fruit d'un progrés tecnològic que té lloc només a un únic període), des d'$f(k)$ fins a $f'(k)$. Com a conseqüència, la funció d'estalvi també es desplaça cap amunt, des d'$s{\cdot}f(k)$ fins a $s{\cdot}f'(k)$.
- El nou estat estacionari el determina el punt b. Al nou estat estacionari, $k^*_2 > k^*_1$ i $y^*_2 > y^*_1$. La conclusió és que el progrés tecnològic que té lloc en un únic període engega un procés temporal de creixement de l'economia. Aquest creixement té lloc mentre l'economia es desplaça de l'estat estacionari inicial fins a l'estat final. A canvi, hi ha efectes d'aquest creixement temporal que són permanents: la producció per càpita i el capital per càpita són superiors als que hi havia a l'anterior estat estacionari.

Creixement temporal per recuperació del capital per càpita perdut

- Encara assumint $n = 0$, el model de Solow també prediu un procés de creixement temporal en casos on l'economia perd, de manera relativament sobtada, capital per càpita (com succeeix durant els conflictes bèl·lics).
- Per exemple, suposem a la Fi.g 9 que l'economia inicialment disposa del capital per càpita k^* de l'estat estacionari. Si, per algun motiu, el capital per càpita es redueix al següent període fins a k^*_1 (mantenint-se la funció de producció i les taxes d'estalvi i depreciació), l'economia entrarà en una dinàmica de creixement que la portarà de nou a assolir k^*.

- L'experiència d'Alemanya i del Japó la dècada posterior a la finalització de la 2a Guerra Mundial és consistent amb aquesta predicció. Atès que el Japó tenia més capital per càpita a recuperar que, per exemple, els EUA, el model suggereix que l'economia japonesa hauria de créixer més ràpidament que l'estatunidenca. Les dades confirmen aquesta predicció: la taxa mitjana de creixement del la producció per càpita al Japó entre 1951 i 1961 està al voltant del 8%; l'estatunidenca, al voltant del 2'5% (font: PWT 6.2).

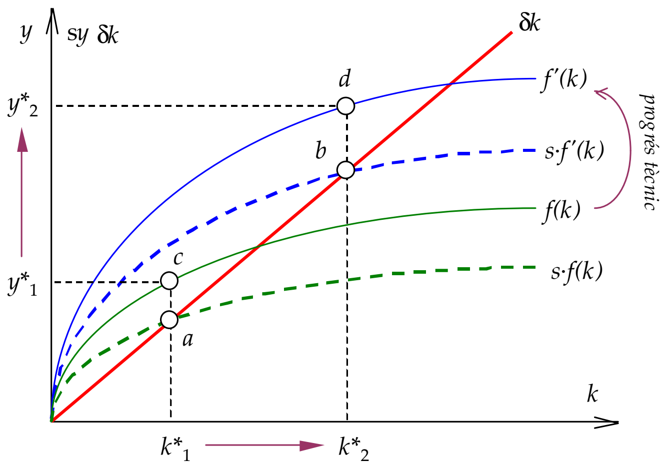


Fig. 16. Efecte sobre l'estat estacionari del progrés tecnològic no continuat

Es pot créixer indefinidament al model de Solow quan $n = 0$?

- L'evidència empírica mostra que les economies són susceptibles de créixer indefinidament (la Fig. 18 il·lustra la magnitud del creixement i quines taxes són més comunes).
- El model de Solow mostra que variacions només a un període de la taxa d'estalvi, de la taxa de depreciació o de la funció de producció són susceptibles d'induir creixement en la producció per càpita. Però el procés de creixement és temporal (en el cas de la taxa de depreciació, cal una reducció de la taxa per generar creixement) i és un efecte secundari del pas d'un estat estacionari a un altre.
- Les anàlisis anteriors, però, suggereixen una qüestió: podrien canvis continuats de la taxa d'estalvi, la taxa de depreciació o la funció de producció sostenir un creixement indefinit de la producció per càpita?
- En el cas de la taxa d'estalvi, la resposta és no: la funció d'estalvi no pot ultrapassar la funció de producció. Per tant, l'estratègia de créixer basada en la frugalitat és incapaç d'engegar un procés de creixement continuat i sostingut.
- La Fig. 17 il·lustra el cas de la reducció de la taxa de depreciació. En principi, una reducció continuada de la taxa de depreciació pot fer créixer sense límit immediat el capital per càpita (seguint el valor de k als punts a, b, c, d…) i, per consegüent, la producció per càpita.
- Però aquest creixement aparentment indefinit té dues limitacions. Una, atès que la funció de producció per càpita és còncava, el creixement de la producció per càpita s'esmorteeix. És molt versemblant que, a partir d'un cert valor de k, la productivitat marginal sigui zero. Això significaria que $f(k)$ es tornaria plana a partir d'un cert valor de k, de forma que unitats addicionals de k no aconseguirien augmentar la producció per càpita.
- I dues, la reducció de la taxa de depreciació és difícil d'aconseguir perquè la depreciació respon a la naturalesa física del capital: és versemblant no poder reduir la depreciació del capital per sota un cert nivell. Tot (capital inclòs) desapareix almenys a un ritme mínim que no pot ser reduït més.
- Resta, per últim, el cas del progrés tecnològic (de fet, és previsible que calgui progrés tecnològic per a reduir de manera continuada la taxa de depreciació). La Fig. 16 suggereix que un progrés tecnològic continuat (i no merament puntual com és el cas de la Fig. 16) és capaç de provocar un creixement continuat i indefinit de la producció per càpita.
- De fet, la història de la humanitat és expressió d'un progrés tecnològic (aplicat a les activitats productives) continuat. El que és novedós des de la Revolució Industrial és el ritme al qual es produeix aquest progrés. L'evolució de la producció per càpita i del capital per càpita a l'economia mundial en els últims 3 segles és consistent amb la predicció que fa el model de Solow quan el progrés tecnològic és continu.
- El progrés tecnològic en gran mesura es manifesta en augments de la productivitat dels factors. La Fig. 19 mostra com el creixement de la producció per càpita a la Gran Bretanya durant la Revolució Industrial va estar lligat a augments de la productivitat.

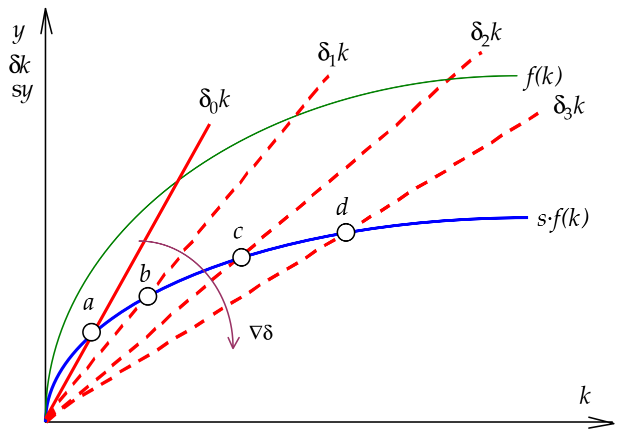
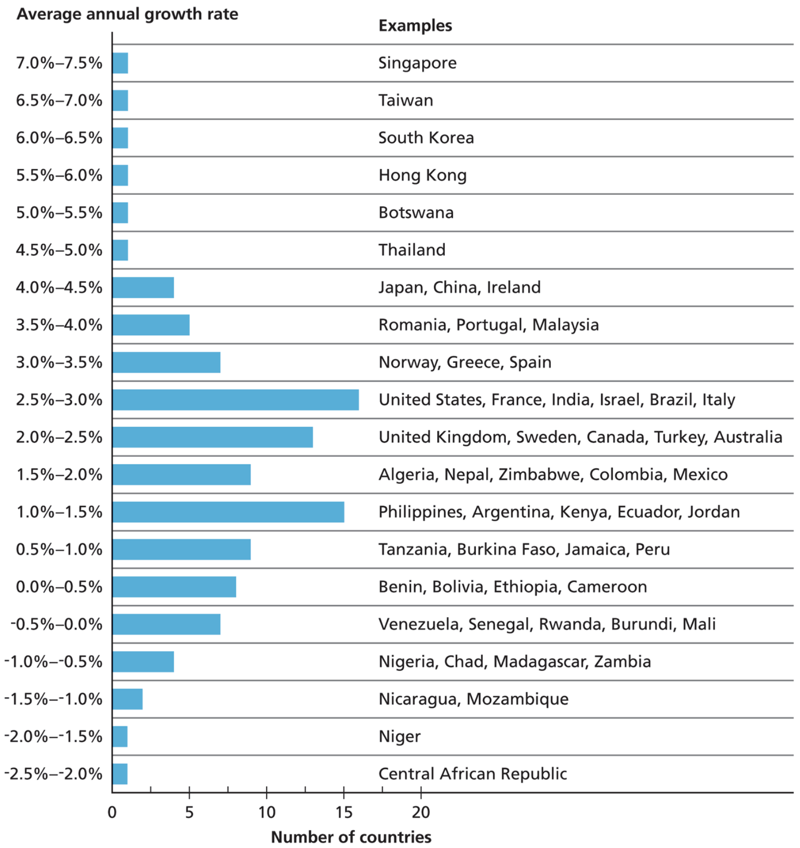


Fig. 17. Reducció continuada de la taxa de depreciació

FIGURE 1.6
The Distribution of Growth Rates, 1960–2000

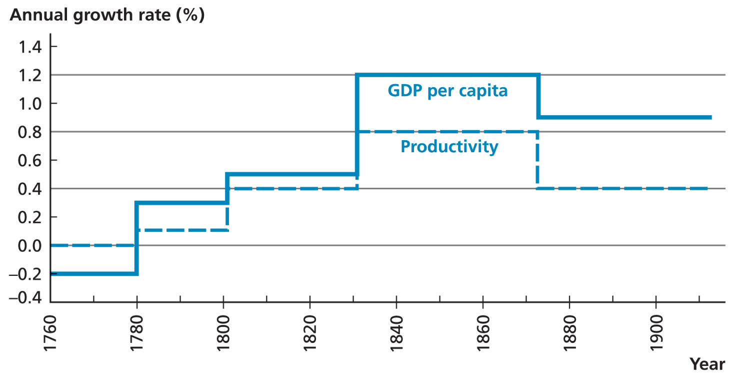


Source: Heston, Summers, and Aten (2002).

Fig. 18. Taxes de creixement, 1960-2000

http://wps.aw.com/aw_weil_econgrowth_1/24/6169/1579312.cw/content/index.html

FIGURE 9.2
British Output and Productivity Growth, 1760–1913

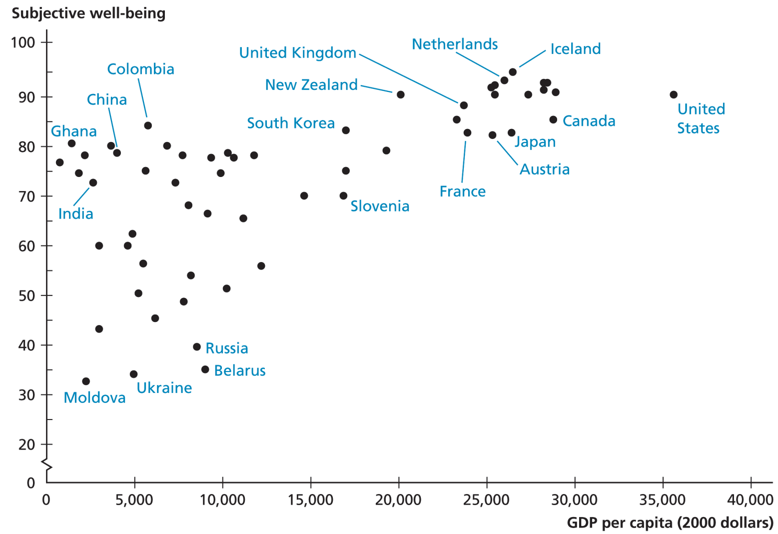


Source: Crafts (1996).

Fig. 19. Relació entre la producció per càpita i la productivitat a la Gran Bretanya

http://wps.aw.com/aw_weil_econgrowth_1/24/6169/1579312.cw/content/index.html

FIGURE 17.2
Relationship Between Income and Happiness in a Cross-Section of Countries



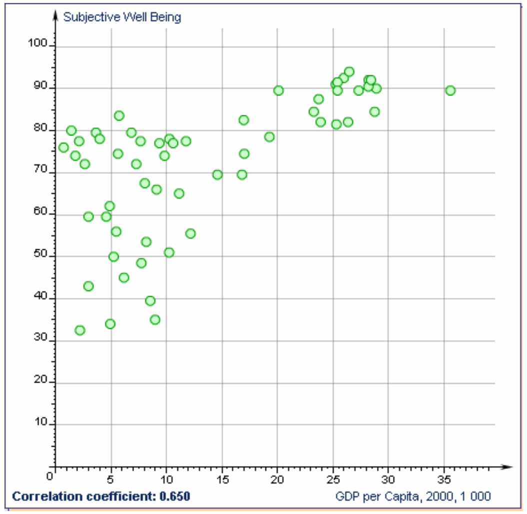
Source: Inglehart and Klingerman (2000), Table 7.1.

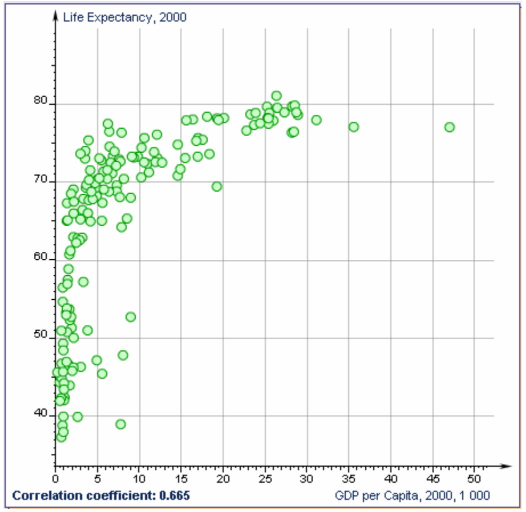
Fig. 20. Correlació positiva entre la producció per càpita i el benestar subjectiu

http://wps.aw.com/aw_weil_econgrowth_1/24/6169/1579312.cw/content/index.html

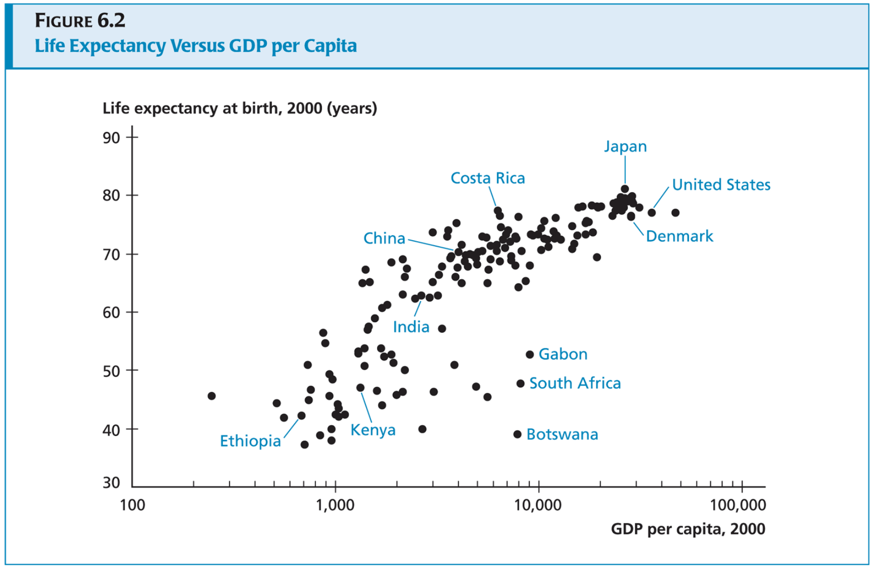
Comparació d'estats estacionaris quan $n = 0$

- La producció per càpita y d'una economia s'ha pres fins ara com a indicador del nivell de vida (*standard of living*) a una economia. Aquesta elecció és justificable si el que interessa és traçar l'augment o disminució del nivell de vida, ja que la variació d'aquest nivell està correlacionat positivament amb la variació de la producció per càpita. De fet, les economies on més creix la producció per càpita són aquelles amb un més alt nivell de vida. Les Figs. 20, 21, 22 i 23 mostren evidència empírica que avala aquesta correlació positiva.





Figs. 21 i 22. Correlació positiva entre producció per càpita i tant benestar subjectiu com esperança de vida (fet amb *Data Plotter*, http://wps.aw.com/aw_weil_econgrowth_1/22/5638/1443513.cw/index.html)



Source: Heston et al. (2002), World Bank (2003b).

Fig. 23. Correlació positiva entre la producció per càpita i l'esperança de vida
http://wps.aw.com/aw_weil_econgrowth_1/24/6169/1579312.cw/content/index.html

- Però si el que interessa és mesurar el nivell de vida, i no tant establir si augmenta o disminueix, el consum per càpita és un indicador més acurat del nivell de vida que la producció per càpita. Ara analitzarem el consum per càpita que genera una economia a llarg.

Consum per càpita a l'estat estacionari quan $n = 0$

- En vista que l'economia tendeix a un estat estacionari, el consum per càpita rellevant és el de l'estat estacionari. Per definició, a l'estat estacionari la inversió per càpita i coincedeix amb la depreciació per càpita δk. D'altra banda, per definició, $c = y - i$. Per tant, sabent que $i = \delta k$ i que $y = f(k)$, el consum per càpita a l'estat estacionari és

$$c = f(k) - \delta k. \tag{10}$$

- L'equació (10) s'ha construït suposant que ni la funció de producció f ni la taxa de depreciació δ canvien. Per tant, atès que el valor de k a (10) és un valor d'estat estacionari, l'únic que pot causar una variació de l'estat estacionari és la variació de la taxa d'estalvi. Així que (10) assenyala quin és el capital per càpita de l'economia que resulta a mesura que varia la taxa d'estalvi.

- L'equació (10) mostra que una variació del capital per càpita d'un estat estacionari genera dos efectes oposats sobre el consum per càpita d'aquell estat estacionari. Suposem que el capital per càpita de l'estat estacionari augmenta (pel que hem vist, això requereix que la taxa d'estalvi augmenti). Aleshores hi ha un efecte negatiu sobre c degut a què un augment de k comporta un augment de la depreciació per càpita δk i, com a conseqüència, cal augmentar la inversió per càpita i. Aquesta inversió només pot augmentar si augmenta l'estalvi per càpita, fet que implica una reducció del consum per càpita.

- Però simultàniament hi ha un efecte positiu sobre c degut a què un augment de k provoca un augment de la producció per càpita $f(k)$ i aquest augment, per la relació $c = (1 - s)y$, causa un augment del consum per càpita.

Il·lustració de l'equació (10)

- La Fig. 24 il·lustra l'equació (10). Si la taxa d'estalvi de l'economia és s, el punt a determina l'estat estacionari, en el qual el capital per càpita és k^*_1. L'equació (10) estableix quin és el consum per càpita c^*_1 corresponent a k^*_1, això és, $c^*_1 = f(k^*_1) - \delta k^*_1$. El punt b determina $f(k^*_1)$, mentre el punt a determina δk^*_1. Per tant, la distància entre a i b és c^*_1. Així que l'equació (10) diu quina és la distància entre a i b.

- Ara suposem que la taxa d'estalvi augmenta d's a $s' > s$. El nou estat estacionari de l'economia el determina el punt c. Al nou estat estacionari el capital per càpita és k^*_2. Com abans, l'equació (10) estableix quin és el consum per càpita c^*_2 corresponent a k^*_2, això és, $c^* = f(k^*_2) - \delta k^*_2$. El punt d determina $f(k^*_2)$, mentre el punt c determina δk^*_2. Per tant, el valor que (10) atribueix a c^*_2 quan $k = k^*_2$ és la distància entre c i d.

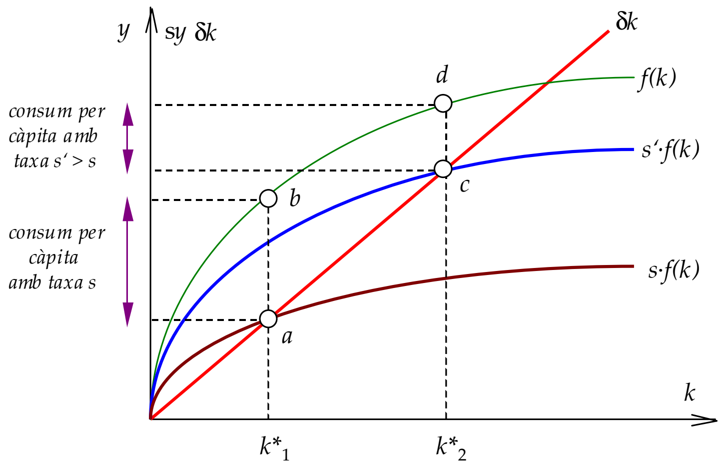


Fig. 24. Il·lustració de l'equació (10): consum per càpita a un estat estacionari

La regla d'or ("Golden Rule") del creixement econòmic al model de Solow quan $n = 0$

- En ètica, la regla d'or és el principi moral que fonamenta l'ètica de la reciprocitat: tracta els demés com tu mateix vols ser tractat.
- Aquest principi es trasllada al context econòmic quan es considera el creixement a llarg termini perquè els fonaments per al creixement de què gaudiran les generacions futures són establerts per les generacions passades.
- En particular, el model de Solow posa de relleu la connexió entre estalvi i creixement de la producció per càpita: un augment de la taxa d'estalvi permet augmentar la producció per càpita. Però l'augment de l'estalvi ara per a augmentar la producció per càpita en el futur porta associat un sacrifici: reduir el consum ara.
- Així que el creixement econòmic a llarg termini implica una mena de benevolència intergeneracional: les generacions presents se sacrifiquen augmentant l'estalvi (i, així, la inversió) per a què les generacions futures puguin, pretesament, beneficiar-se d'una producció per càpita (i un consum per càpita superiors).
- Hi ha, però, un problema: una taxa d'estalvi superior no significa sempre un consum per càpita superior. Per exemple, a la Fig. 24, si les generacions presents incrementen la taxa d'estalvi d's a $s' > s$, les generacions futures patiran una reducció del consum per càpita, que passaria de ser la distància entre a i b a ser la distància entre c i d. Això indica que la taxa d'estalvi s' és excessiva: una taxa inferior permetria augmentar el consum per càpita.
- Aplicant l'ètica de la reciprocitat intergeneracionalment, sorgeix la qüestió de a quin estat estacionari el consum per càpita és màxim. La taxa d'estalvi que satisfà la regla d'or del creixement econòmic (*golden rule savings rate*) és la que maximitza el consum per càpita.

Maximització del consum per càpita a l'estat estacionari quan $n = 0$

- La taxa d'estalvi que satisfà la regla d'or (o, simplement, la taxa d'estalvi de la regla d'or) s'obté maximitzant (10) respecte de k. Geomètricament, es tracta de trobar el valor de k on és màxima la distància vertical entre la funció $f(k)$ i la recta δk. Derivant (10) respecte de k resulta $\frac{\partial c}{\partial k} = \frac{\partial f}{\partial k} - \delta$. La condició de 1r ordre d'un màxim estableix que $\frac{\partial f}{\partial k} - \delta = 0$; això és, (11) se satisfà. Atès que f és còncava, la condició de 2n ordre es compleix automàticament. En resum, el capital per càpita de l'estat estacionari a què s'arriba amb la taxa d'estalvi de la regla d'or satisfà (11).

$$\frac{\partial f}{\partial k} = \delta \tag{11}$$

- La derivada $\frac{\partial f}{\partial k}$ és la productivitat marginal del capital per càpita: diu quant varia la producció per càpita quan varia el capital per càpita. Geomètricament, $\frac{\partial f}{\partial k}$ és el pendent de la funció de producció $y = f(k)$ i δ és el pendent de la recta δk que representa la depreciació per càpita. Així que (11) diu que el capital per càpita que permet maximitzar el consum per càpita el determina el punt de la funció de producció on el pendent és δ, això és, el punt de la funció de producció que és tangent a una recta amb pendent δ.
- La Fig. 25 il·lustra geomètricament el procediment de càlcul de la taxa d'estalvi de la regla d'or. Primer, prenem la recta δk i la desplacem paral·lelament a l'esquerra fins que la recta és tangent a la corba $f(k)$. El punt de tangència (b a la Fig. 25) determina el valor k^*_{or} del capital per càpita de la regla d'or. Sabent k^*_{or}, busquem la funció de depreciació, ja que δk^*_{or} serà la inversió per càpita de l'estat estacionari on el capital per càpita és k^*_{or}. Això ens porta al punt b. Per últim, la taxa d'estalvi s_{or} de la regla d'or serà aquella que faci que la funció d'estalvi $s_{or}{\cdot}f(k)$ resultant intersecti la recta δk justament al punt a.

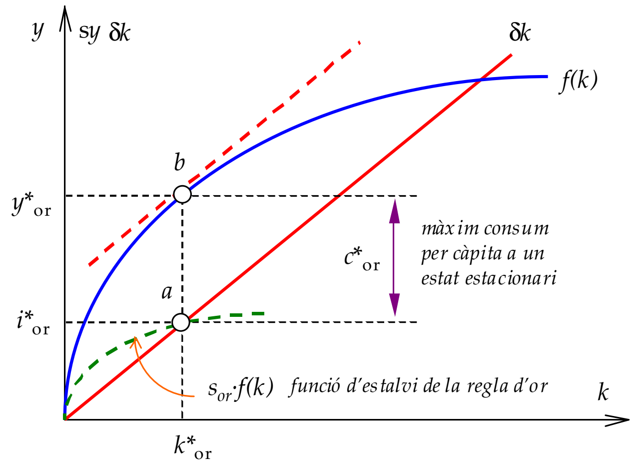


Fig. 25. Obtenció de l'estat estacionari que satisfà la regla d'or (màxim consum per càpita)

Exemple de càlcul de l'estat estacionari de la regla d'or amb $n = 0$

- Sigui una economia amb funció de producció $y = f(k) = 2k^{1/2}$, amb taxa d'estalvi $s = 0'4$ i amb taxa de depreciació $\delta = 0'2$. Ja hem calculat l'estat estacionari: és aquell on $k^* = 16$.
- Per a determinar el capital per càpita la regla d'or, n'hi ha prou amb aplicar la condició (11), ja que la funció de producció és còncava. Aleshores, $\frac{\partial f}{\partial k} = 2\,\frac{1}{2}\,k^{-1/2} = \frac{1}{k^{1/2}}$. Com era d'esperar (per això la funció de producció és còncava), la productivitat marginal del capital per càpita és <u>decreixent</u>: cada unitat addicional de capital que té un treballador fa que el treballador augmenti cada cop menys la seva producció.
- Així que el capital per càpita d'aquell estat estacionari que satisfà la regla d'or s'obté resolent l'equació $\frac{1}{k^{1/2}} = \delta$. D'aquí resulta que $k^*_{or} = \left(\frac{1}{\delta}\right)^2$. En concret, $k^*_{or} = 25$. Aquest resultat indica que, amb la taxa d'estalvi inicial $s = 0'4$, no s'està maximitzant el consum per càpita, ja que la taxa $s = 0'4$ condueix l'economia a un estat estacionari on $k = 16 < k^*_{or}$. D'aquí es conclou que la taxa d'estalvi de la regla d'or ha de ser superior a 0'4: cal una taxa d'estalvi superior a 0'4 per a portar l'economia de $k = 16$ a $k = 25$.
- Quina és la taxa d'estalvi que condueix l'economia a l'estat estacionari de la regla d'or? Primer, sabem que a aquest estat estacionari $k^*_{or} = 25$. Segon, sabem que a tot estat estacionari se satisfà $s{\cdot}f(k) = \delta{\cdot}k$. Per tant, en particular, $s_{or}{\cdot}f(k^*_{or}) = \delta{\cdot}k^*_{or}$. I tercer, sabem que $\delta = 0'2$ i que $f(k) = 2k^{1/2}$. Així, $f(k^*_{or}) = 2(k^*_{or})^{1/2} = 2(25)^{1/2} = 10$, de forma que la condició $s_{or}{\cdot}f(k^*_{or}) = \delta{\cdot}k^*_{or}$ esdevé $s_{or}{\cdot}10 = 0'2{\cdot}25$. D'aquí s'obté $s_{or} = 0'5$. El consum per càpita corresponent el determina (10): $c_{or} = f(k^*_{or}) - \delta{\cdot}k^*_{or} = 10 - 5 = 5$.

Solució del model de Solow quan $n > 0$

- Passem ara a analitzar el model de Solow quan $n > 0$. Considerar que $n > 0$ implica incorporar un paràmetre més al model. Ara, l'estat estacionari el determinen la funció de producció, la taxa d'estalvi, la taxa de depreciació i la taxa de creixement de la població.
- Quan $n = 0$, $\Delta k_t = s{\cdot}f(k_t) - \delta k_t$ era l'equació que definia l'acumulació de capital per càpita. Ara es tracta de definir Δk_t quan $n > 0$. Com abans, $K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t$. L'única diferència és que ara $L_{t+1} = (1 + n)L_t$. Per tant,

$$k_{t+1} = \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = \frac{(1-\delta)K_t + I_t}{(1+n)L_t} = \frac{1-\delta}{1+n}\frac{K_t}{L_t} + \frac{1}{1+n}\frac{I_t}{L_t} = \frac{1-\delta}{1+n}\,k_t + \frac{1}{1+n}\,i_t.$$

- Atès que la inversió per càpita i_t és igual a l'estalvi fer càpita $s{\cdot}f(k_t)$, resulta que

$$k_{t+1} = \frac{1-\delta}{1+n}\,k_t + \frac{s}{1+n}\,f(k_t).$$

- En conseqüència,

$$\Delta k_t = k_{t+1} - k_t = \frac{1-\delta}{1+n}\,k_t + \frac{s}{1+n}\,f(k_t) - k_t = \left(\frac{1-\delta}{1+n} - 1\right)k_t + \frac{s}{1+n}\,f(k_t),$$

d'on resulta finalment (12).

$$\Delta k_t = \frac{s}{1+n}\,f(k_t) - \left(\frac{\delta+n}{1+n}\right)k_t \qquad (12)$$

- L'equació (12) descriu la dinàmica de l'acumulació de capital quan la taxa de creixment n de la població és positiva. L'equació (9) descriu la dinàmica d'acumulació quan $n = 0$. Així que (9) hauria de ser un cas particular d'(12). Efectivament, (9) s'obté fent $n = 0$ a (12).
- Com el que interessa és determinar l'estat estacionari de l'economia, busquem el valor (o valors) del capital per càpita que fa que $\Delta k_t = 0$. Si $\Delta k_t = 0$, (12) es transforma en (13).

$$\frac{s}{1+n}\,f(k_t) = \frac{\delta+n}{1+n}\,k_t \qquad (13)$$

- Per la hipòtesi que $n > 0$, podem cancel·lar $(1 + n)$ a esquerra i dreta de l'equació (13), resultant (14), que és la <u>nova condició que permet determinar l'estat estacionari</u>.

$$s{\cdot}f(k_t) = (\delta + n)k_t \qquad (14)$$

- Si eliminem els subíndexs temporals de (14), el capital per càpita k^* de l'estat estacionari quan $n > 0$ satisfà $s{\cdot}f(k^*) = (\delta + n)k^*$, on la part esquerra representa la inversió per càpita (inversió desitjada) a l'estat estacionari i la part dreta és la inversió necessària per a mantenir constant el capital per càpita de l'estat estacionari (inversió de manteniment). Noteu que n actua sobre k com la depreciació: <u>si K no augmenta, un augment del nombre de treballadors implica que a cada treballador li toca menys capital</u> (reducció de k). Com abans, fent $n = 0$ s'obté la condició $s{\cdot}f(k^*) = \delta k^*$ que determina l'estat estacionari quan $n = 0$.

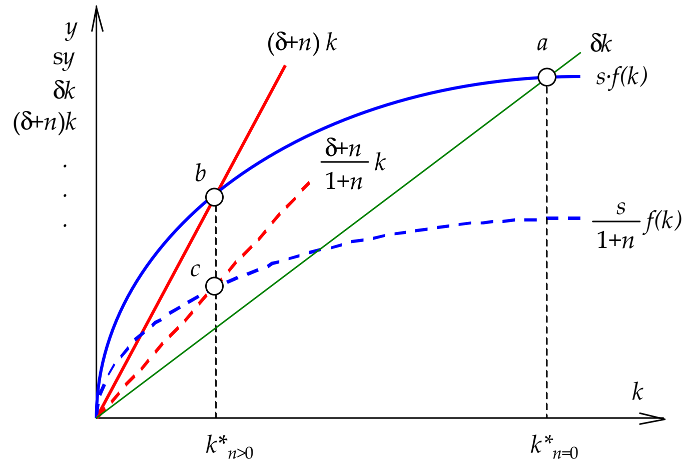


Fig. 26. Representació gràfica de l'estat estacionari amb $n > 0$ i comparació amb el cas $n = 0$

Lliçons del model de Solow quan $n > 0$

- Com al cas n = 0, l'economia acaba arribant a l'estat estacionari on les magnituds per capita (producció per càpita, capital per càpita, consum per càpita, inversió per càpita) deixen de créixer. Però a diferència del cas n = 0, les magnituds absolutes (producció, capital, treball, consum, inversió) sí creixen a l'estat estacionari. Això és degut al següent:
  - a l'estat estacionari, k és constant;
  - atès que $k = \dfrac{K}{L}$ és constant i atès que L creix a la taxa n, K creix a la taxa n;
  - atès que $y = \dfrac{Y}{L}$ és constant i atès que L creix a la taxa n, Y creix a la taxa n;
  - amb Y creixent a la taxa n, l'estalvi agregat $S = sY$ també creix a la taxa n;
  - amb S creixent a la taxa n, i donat que $I = S$, la inversió agregada I també creix a la taxa n;
  - atès que $y = \dfrac{C}{L}$ és constant i atès que L creix a la taxa n, Y creix a la taxa n;
  - i, atès que Y, C, S i I són constants, les respectives variables per càpita també ho són.

- En resum, si la població creix a la taxa n, a l'estat estacionari tota l'economia creix (en termes absoluts) a la taxa n: producció, consum, inversió, estalvi, depreciació i capital.

- D'altra banda, el creixement de la població afecta negativament a la producció per càpita de l'estat estacionari. Aquesta observació la il·lustra la Fig. 26.

- Suposem inicialment, a la Fig. 26, que n = 0: la població no creix. El capital per càpita $k^*_{n=0}$ de l'estat estacionari el determina el punt a, on s'interesecten les funcions d'estalvi $s{\cdot}f(k)$ i depreciació δk. Si ara la població comença a créixer a la taxa $n > 0$, tant (13) com (14) permeten determinar el capital per càpita de l'estat estacionari: seguint (13), l'estat estacionari el determina c; seguint (14), el determina b. A tots dos casos, el capital per càpita és el mateix valor $k^*_{n>0}$. Clarament, $k^*_{n>0} < k^*_{n=0}$ i, per conseqüent, $y^*_{n>0} < y^*_{n=0}$.

- Aquest resultat contribueix a explicar perquè algunes economies són més riques (tenen una producció per càpita superior) que d'altres: si a l'economia 1 la població creix més que a l'economia 2 i la resta de paràmetres són iguals a les dues economies (taxa d'estalvi, funció de producció i taxa de depreciació), l'economia 1 tindrà una producció per càpita inferior.

- Les Figs. 27, 28, 29 i 30 mostren informació sobre la població mundial: distribució, densitat, mesures (http://en.wikipedia.org/wiki/World_population_estimates) i taxes de creixement (s'estima que la població creix actualment a un ritme d'unes 200.000 persones per dia, http://www.xist.org/earth/population1.aspx). La Fig. 31 mostra evidència empírica sobre la relació inversa entre creixement de la població i producció per càpita que prediu el model de Solow. La Fig. 31bis considera la densitat de població en comptes de la taxa de creixement de la població.

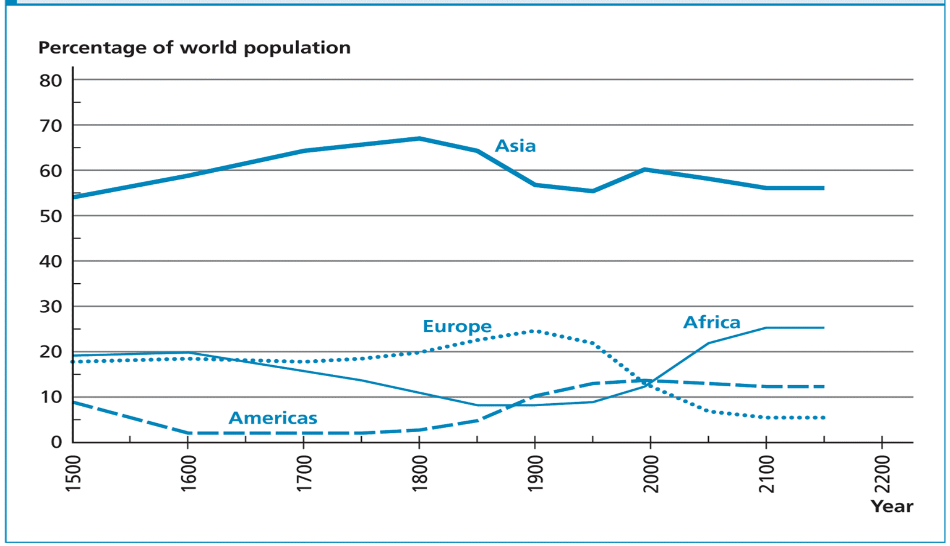


FIGURE 5.8
Distribution of the World's Population

Sources: Livi-Bacci (1997), United Nations Population Division (2000).

Fig. 27. Distribució passada i estimada de la població mundial
http://wps.aw.com/aw_weil_econgrowth_1/24/6169/1579312.cw/content/index.html

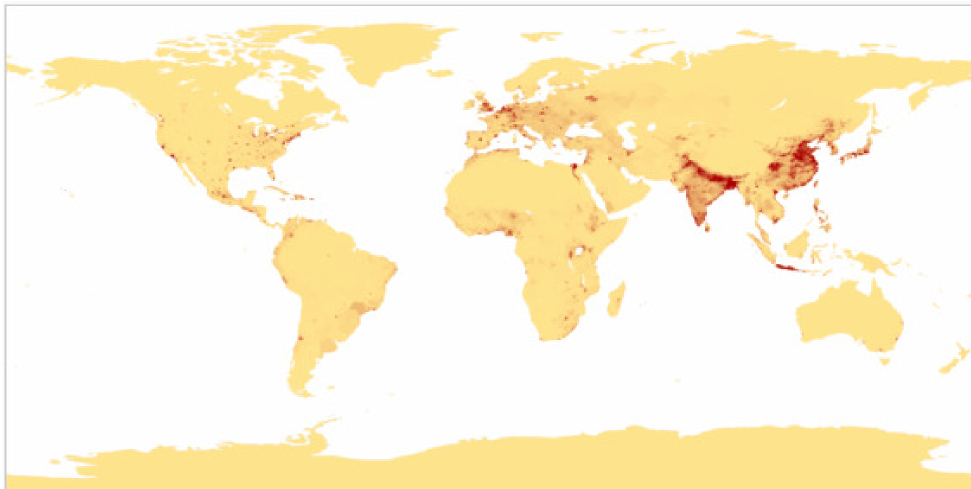


Fig. 28. Densitat de població al món, 1994
http://en.wikipedia.org/wiki/World_population

Any	Món	Àfrica	Àsia	Europa	Amèrica Llatina	Amèrica del Nord	Oceania
8000 AC	5 000**						
1000 AC	50 000						
500 AC	100 000						
1	200						
1000	310 000						
1750	791 000	106 000	502 000	163 000	16 000	2 000	2 000
1800	978 000	107 000	635 000	203 000	24 000	7 000	2 000
1850	1 262 000	111 000	809 000	276 000	38 000	26 000	2 000
1900	1 650 000	133 000	947 000	408 000	74 000	82 000	6 000
1950	2 518 629	221 214	1 398 488	547 403	167 097	171 616	12 812
1955	2 755 823	246 746	1 541 947	575 184	190 797	186 884	14 265
1960	2 981 659	277 398	1 674 336	601 401	209 303	204 152	15 888
1965	3 334 874	313 744	1 899 424	634 026	250 452	219 570	17 657
1970	3 692 492	357 283	2 143 118	655 855	284 856	231 937	19 443
1975	4 068 109	408 160	2 397 512	675 542	321 906	243 425	21 564
1980	4 434 682	469 618	2 632 335	692 431	361 401	256 068	22 828
1985	4 830 979	541 814	2 887 552	706 009	401 469	269 456	24 678
1990	5 263 593	622 443	3 167 807	721 582	441 525	283 549	26 687
1995	5 674 380	707 462	3 430 052	727 405	481 099	299 438	28 924
2000	6 070 581	795 671	3 679 737	727 986	520 229	315 915	31 043
2005	6 453 628	887 964	3 917 508	724 722	558 281	332 156	32 998**

Fig. 29. Població mundial (** = dades qüestionades), http://en.wikipedia.org/wiki/World_population

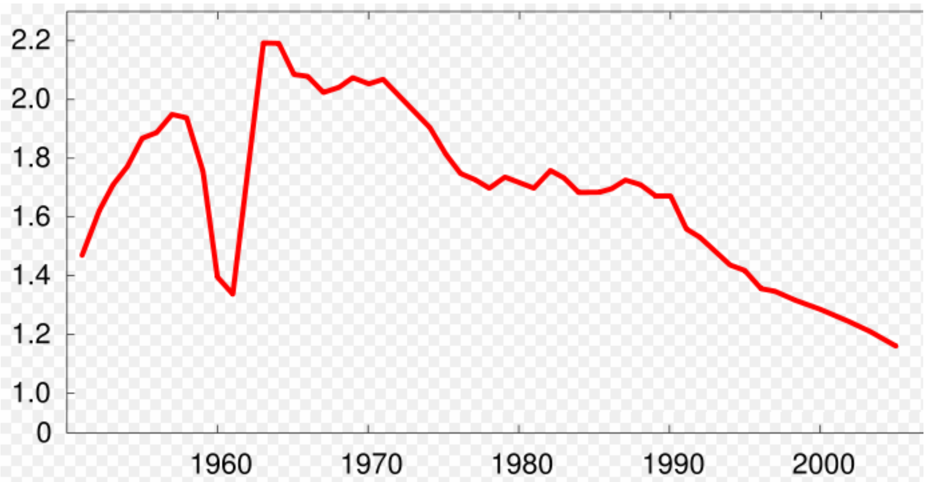


Fig. 30. Taxa de creixement de la població mundial
http://en.wikipedia.org/wiki/World_population

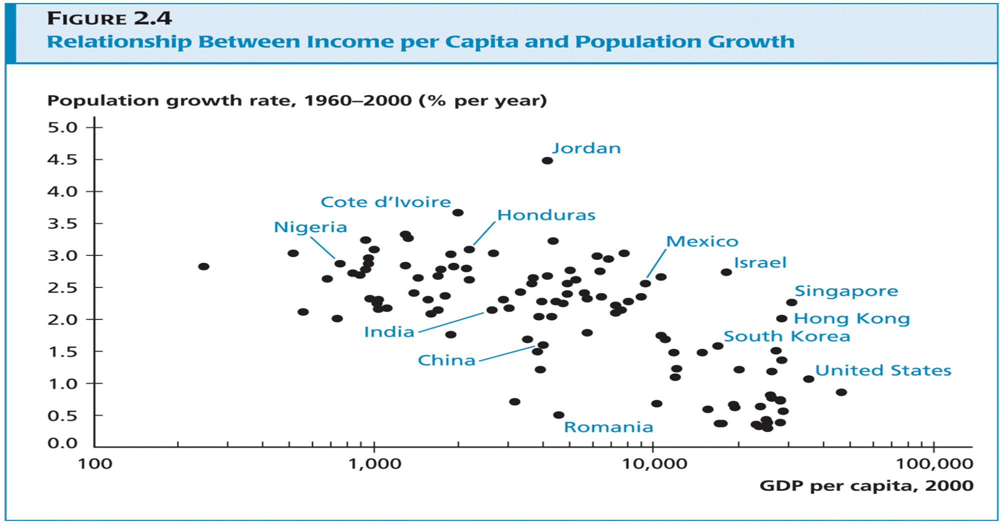
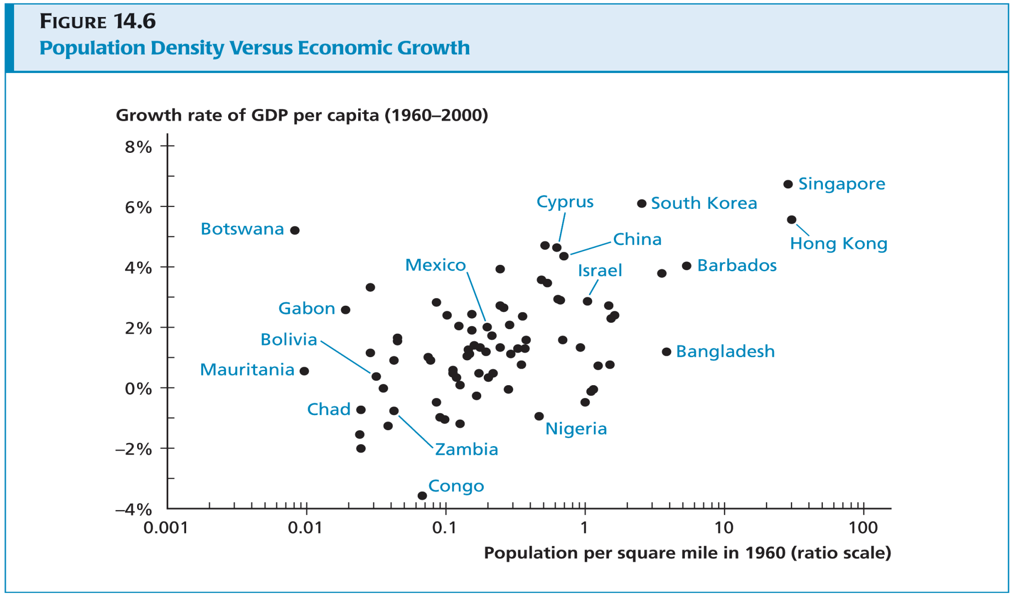


Fig. 31. Correlació negativa entre la taxa de creixement de la població i la producció per càpita
http://wps.aw.com/aw_weil_econgrowth_1/24/6169/1579312.cw/content/index.html



Source: Burkett, Humblet, and Putterman (1999).

Fig. 31bis. Correlació positiva entre la taxa de creixement de la producció per càpita i la densitat de població
http://wps.aw.com/aw_weil_econgrowth_1/24/6169/1579312.cw/content/index.html

Estàtica comparativa al model de Solow quan $n > 0$

- L'anàlisi del cas $n > 0$ és molt similar a l'anàlisi del cas $n = 0$: per a determinar com varia el capital per càpita de l'estat estacionari quan es modifica algun paràmetre exogen (la taxa de creixement de la població, la taxa d'estalvi, la taxa de deprecicació i la funció de producció), n'hi ha prou amb interpretar la recta δk com si fos la recta $(\delta + n)k$.
- Així, per exemple, reemplaçant sempre δk per $(\delta + n)k$, la Fig. 12 representa l'efecte sobre l'estat estacionari d'un augment de la taxa d'estalvi; la Fig. 15 representa l'efecte sobre l'estat estacionari d'un augment de la taxa de depreciació; i la Fig. 16 representa l'efecte sobre l'estat estacionari del progrés tecnològic no continuat.
- Quin és l'efecte d'una variació de la taxa de creixement n de la població? Atès que n apareix a la recta $(\delta + n)k$, un augment d'n tindrà el mateix efecte qualitatiu sobre l'estat estacionari que un augment de la taxa de depreciació δ.
- Hi ha, però, un element diferenciador en el cas $n > 0$: per bé que les funcions $(\delta + n)k$ i $s \cdot f(k)$ permeten calcular el capital per càpita de l'estat estacionari, ni $s \cdot f(k)$ dóna la inversió (i l'estalvi) per càpita quan el capital per càpita és k ni $(\delta + n)k$ dóna la inversió en manteniment necessària per a mantenir k constant (i neutralitzar la reducció de k que causen la depreciació i el creixement de la població). De fet, a diferència del que succeïa quan $n = 0$, $s \cdot f(k) - (\delta + n)k$ no és la variació de capital per càpita, sinó que és, seguint (13), $\frac{s}{1+n} f(k) - \frac{\delta + n}{1+n} k$ (on el primer terme seria la inversió per càpita derivada de l'estalvi i el segon terme seria la inversió de manteniment necessària per a què el capital per càpita sigui k).

Regla d'or al model de Solow quan $n > 0$

- El consum per càpita c és sempre $y - i$. A l'estat estacionari, la inversió desitjada i coincideix amb la inversió en manteniment $(\delta + n)k$. Per tant, a tot estat estacionari, el consum per càpita és (15), on k és el capital per càpita de l'estat estacionari corresponent.

$$c = s \cdot f(k) - (\delta + n)k \tag{15}$$

- L'estat estacionari de la regla d'or s'obté maximitzant (15) respecte de k. Com al cas $n = 0$, la condició de 1r ordre és suficient per a determinar la solució. En aquest cas, la derivada de c és $\frac{\partial c}{\partial k} = \frac{\partial f}{\partial k} - (\delta + n)$. La condició de 1r ordre implica $\frac{\partial f}{\partial k} - (\delta + n) = 0$. Per tant, (16) és la condició que permet determinar el capital per càpita de la regla d'or i, a partir d'ell, la taxa d'estalvi, el consum per càpita i la producció per càpita de la regla d'or.

$$\frac{\partial f}{\partial k} = \delta + n \tag{16}$$

Creixement acumulat d'una variable que creix a una taxa fixa

- Sigui x_t una variable que creix a la taxa n, taxa expressada en tant per u. Si $t = 0$ és el període inicial, el valor d'x al període $t = 1$ serà $x_1 = x_0 + n\,x_0 = (1 + n)\,x_0$. Per exemple, si $x_0 = 100$ i $n = 0'1$ (taxa de creixement del 10%), $x_1 = 100 + 0'1 \cdot 100 = 100 + 10 = 110$.
- Al període $t = 2$ tindrem $x_2 = x_1 + n\,x_1 = (1 + n)\,x_1$. Atès que $x_1 = (1 + n)\,x_0$, resulta que $x_2 = (1 + n)(1 + n)\,x_0 = (1 + n)^2\,x_0$. De manera similar, per al període $t = 3$, $x_3 = (1 + n)^3\,x_0$. Per inducció matemàtica, es pot demostrar que, per al període t, el valor d'x al període t serà $x_t = (1 + n)^t\,x_0$. Per exemple, al període $t = 10$, $x_t = (1 + n)^t\,x_0 = (1 + 0'1)^{10}\,100 \approx 259'37$ i al període $t = 20$, $x_{20} = (1 + 0'1)^{20}\,100 \approx 672'74$.

Les regles del 70, del 71 i del 72

- La regla del 70 és un mètode per a determinar el temps aproximat que triga a duplicar-se una variable que creix a una determinada taxa.
- Segons la regla del 70, una variable que creix a la taxa n (expressada en tant per cent), triga aproximadament $70/n$ períodes a duplicar el seu valor. Per exemple, una variable que creix a una taxa anual $n = 10\%$, necessita aproximadament $70/10 = 7$ anys per a duplicar-se (el valor correcte és 7'27 anys).
- Les regles del 71 i del 72 són anàlogues: la regla del 71 fa servir l'aproximació $71/n$ per a determinar el nombre de períodes que permeten duplicar el valor d'una variable que creix a l'n% i la regla del 72 fa servir l'aproximació $72/n$.
- La Fig. 32 mostra la relació entre els valors subministrats per les regles del 70, 71 i 72 i el valor real de duplicació.
- La justificació de les regles del 70, 71 i 72 és la següent. Sigui x una variable que creix a la taxa n. Sigui x_0 el valor inicial que ens interessa duplicar. Per tant, $x_t = x_0(1 + n)^t$. Si busquem el valor τ de t que fa que $x_\tau = 2x_0$, es tindrà $2x_0 = x_0(1 + n)^\tau$. D'aquí resulta $2 = (1 + n)^\tau$. Prenent el logaritme neperià a tots dos costats, $ln\ 2 = ln\ [(1 + n)^\tau]$. Per les propietats dels logaritmes, $ln\ [(1 + n)^\tau] = \tau\ ln\ (1 + n)$.
- Com a conclusió, el valor τ que fa que el valor x_0 es dupliqui la variable x quan la seva taxa de creixement és n satisfà $\tau = \frac{ln\ 2}{ln\ (1+n)}$. Per a valors petits d'$n$, $ln\ (1 + n) \approx n$ i $ln\ 2 \approx 0'693$. Així que $\tau \approx \frac{0'693}{n}$ (on n s'expressa en tant per u), que justifica les regles del 70, 71 i 72 (que s'obtenen de l'aproximació anterior multiplicant i dividint per 100 per tal que n s'expressi en tant per cent).

Taxa	Períodes per a què es dupliqui el valor inicial	Estimació de la regla del 72	Estimació de la regla del 71	Estimació de la regla del 70
0,25%	277,61	288	284	280
0,50%	138,98	144	142	140
1%	69,66	72	71	70
2%	35	36	35,5	35
3%	23,45	24	23,67	23,33
4%	17,67	18	17,75	17,5
5%	14,21	14,4	14,2	14
6%	11,9	12	11,83	11,67
7%	10,25	10,29	10,14	10
8%	9,01	9	8,88	8,75
9%	8,04	8	7,89	7,78
10%	7,27	7,2	7,1	7
11%	6,67	6,55	6,45	6,36
12%	6,12	6	5,92	5,83
15%	4,96	4,8	4,73	4,67
18%	4,19	4	3,94	3,89

Fig. 32. Relació entre una taxa de creixement i el nombre de períodes que cal per a duplicar el seu valor (ombrejada, la millor estimació) · http://en.wikipedia.org/wiki/Rule_of_72

Regles de càlcul aproximat de taxes de creixement

- Per a una variable α, sigui $\tilde{\alpha} = \dfrac{\Delta\alpha}{\alpha}$ la taxa de creixement d'α entre 2 períodes de temps.
- Regla 1: si $x = y \cdot z$, aleshores $\tilde{x} \approx \tilde{y} + \tilde{z}$. Per a valors petits de les taxes de creixement, la taxa de creixement d'una variable x que és el producte de dues altres y i z és aproximadament igual a la suma de les taxes de creixement d'y i z.
- Per exemple, en el cas de la funció de producció $Y = K{\cdot}L$, la taxa de creixement de la producció Y és aproximadament igual a la suma de la taxa de creixement del capital K i de la taxa de creixement del treball L.
- Regla 2: si $x = y/z$, aleshores $\tilde{x} \approx \tilde{y} - \tilde{z}$. Per a valors petits de les taxes de creixement, la taxa de creixement d'una variable x que és el quocient de dues altres y i z és aproximadament igual a la taxa de creixement d'y menys la taxa de creixement de z.
- Regla 3: si $x = y^a$, on a és una constant positiva, aleshores $\tilde{x} \approx a{\cdot}\tilde{y}$. Per a valors petits de les taxes de creixement, la taxa de creixement d'una variable x que és igual a una base y elevada a un exponent a és aproximadament igual a l'exponent a per la taxa de creixement de la base y.

Créixer molt durant menys temps o créixer menys durant més temps?

- Quina política de creixement és preferible? Política 1: combinar períodes on el creixement és molt alt amb d'altres on el creixement és molt baix. Política 2: mantenir permanentment un creixement moderat.
- Considerem aquest dilema en un cas concret: créixer a una determinada taxa durant la meitat d'un interval o créixer a la meitat de la taxa durant tot l'interval. En aquest cas, la política de creixement moderat permanent és superior a la política de creixement intermitent o espasmòdic.
- La demostració és la següent. Sigui x la variable que creix, z el nombre total de període (on z és un nombre parell) i n la taxa de creixement d'x (expressada en tant per u). Per a simplificar, suposem que $x_0 = 1$.
- Política 1: créixer a la taxa n durant els $\frac{z}{2}$ primers períodes i no créixer durant els $\frac{z}{2}$ períodes restants. En aquest cas, x creix al període $t = 1$, al $t = 2$, al $t = 3$… fins arribar al període $t = \frac{z}{2}$, que és l'últim període on creix. Per als períodes $t = \frac{z}{2} + 1$, $t = \frac{z}{2} + 2$, $t = \frac{z}{2} + 3$… fins al $t = z$, la variable x no creix, de forma que el valor d'x al període z serà $x_z = x_{z/2}$, ja que $t = \frac{z}{2}$ és l'últim període on hi ha creixement. En resum, $x_z = x_{z/2} = (1 + n)^{z/2}\, x_0 = (1 + n)^{z/2}$.
- Política 2: créixer a la taxa $\frac{n}{2}$ durant els z períodes. En aquest cas, x sempre a la taxa $\frac{n}{2}$, de forma que $x_z = (1 + \frac{n}{2})^z\, x_0 = (1 + \frac{n}{2})^z$.
- Es tracta de demostrar que el resultat $(1 + \frac{n}{2})^z$ de la política 2 és un valor més gran que el resultat $(1 + n)^{z/2}$ de la política 1. Atès que el logaritme neperià és una funció creixent, prendre logaritmes preserva desigualtats. Així, $(1 + \frac{n}{2})^z > (1 + n)^{z/2}$ si, i només si, $ln\,(1 + \frac{n}{2})^z > ln\,(1 + n)^{z/2}$. Aplicant les propietats dels logaritmes, $ln\,(1 + \frac{n}{2})^z = z{\cdot}\, ln\,(1 + \frac{n}{2})$ i $ln\,(1 + n)^{z/2} = \frac{z}{2}\, ln\,(1 + n)$. Per tant, $(1 + \frac{n}{2})^z > (1 + n)^{z/2}$ si, i només si, $z{\cdot}\, ln\,(1 + \frac{n}{2}) > \frac{z}{2}\, ln\,(1 + n)$. Cancel·lant z, aquesta darrera desigualtat és equivalent a $2{\cdot}ln\,(1 + \frac{n}{2}) - ln\,(1 + n) > 0$, que és equivalent a

$$ln\,(1 + \frac{n}{2}) + ln\,(1 + \frac{n}{2}) - ln\,(1 + n) > 0. \qquad (17)$$

- Per les propietats dels logaritmes, $ln\ (1 + \frac{n}{2}) - ln\ (1 + n) = ln \left(\frac{1+\frac{n}{2}}{1+n} \right)$. Així que (17) és equivalent a

$$ln\ (1 + \frac{n}{2}) + ln \left(\frac{1+\frac{n}{2}}{1+n} \right) > 0. \qquad (18)$$

- Per les propietats dels logaritmes, (18) és equivalent a

$$ln \left(\left(1+\frac{n}{2}\right) \left(\frac{1+\frac{n}{2}}{1+n} \right) \right) > 0. \qquad (19)$$

- Atès que $ln\ x > 0$ si, i només si, $x > 1$, (19) se satisfà si, i només si, $\left(1+\frac{n}{2}\right)\left(\frac{1+\frac{n}{2}}{1+n}\right) > 1$.

  Aquesta condició equival a $\frac{\left(1+\frac{n}{2}\right)^2}{1+n} > 1$, que equival a $\left(1+\frac{n}{2}\right)^2 > 1 + n$, que equival a $1 + n + \left(\frac{n}{2}\right)^2 > 1 + n$. Donat que aquesta desigualtat és compleix, queda demostrat que la política 2 dóna un valor més gran d'x al període z que la política 1.

- Per exemple, sigui $n = 0'04$ i $z = 50$. Si x és la producció per càpita d'una economia, suposem que la política 1 consisteix en créixer al 4% durant 25 anys, mentre la política 2 consisteix en créixer al 2% durant 50 anys. Amb $x_0 = 1$, la política 1 produirà, al període 50, una producció per càpita igual a $x_{50} = (1 + 0'04)^{50/2} = 1'04^{25} \approx 2'66$. En canvi, la política 2 produirà, al període 50, una producció per càpita igual a $x_{50} = (1 + 0'02)^{50} = 1'02^{50} \approx 2'69$. Si $z = 100$, els valors són 7'10 i 7'24.

La hipòtesi de la convergència

- El model de Solow, amb $n = 0$ o $n > 0$, té una important implicació sobre la convergència d'economies: economies amb similars paràmetres (similars funcions de producció i taxes d'estalvi, depreciació i creixement de la població) tendiran a estats estacionaris similars (similars consum, producció i estalvi per càpita).

- Específicament, suposem que hi ha dues economies similars i una parteix d'un nivell de capital per càpita (i, per tant, una producció per càpita) inferior a la de l'altra. Atès que totes dues acabaran a un estat estacionari similar, la conclusió és que l'economia "endarrerida" (la que té k i y inferiors) haurà de créixer més ràpidament si el resultat final és que ha d'enxampar l'economia "avançada".

- Basant-se en aquesta implicació del model de Solow, la hipòtesi de la convergència (també anomenada efecte *catch-up*) estableix que les economies més pobres tendeixen a créixer més ràpidament que les economies més riques, de forma que totes les economies convergiran en termes de producció per càpita.

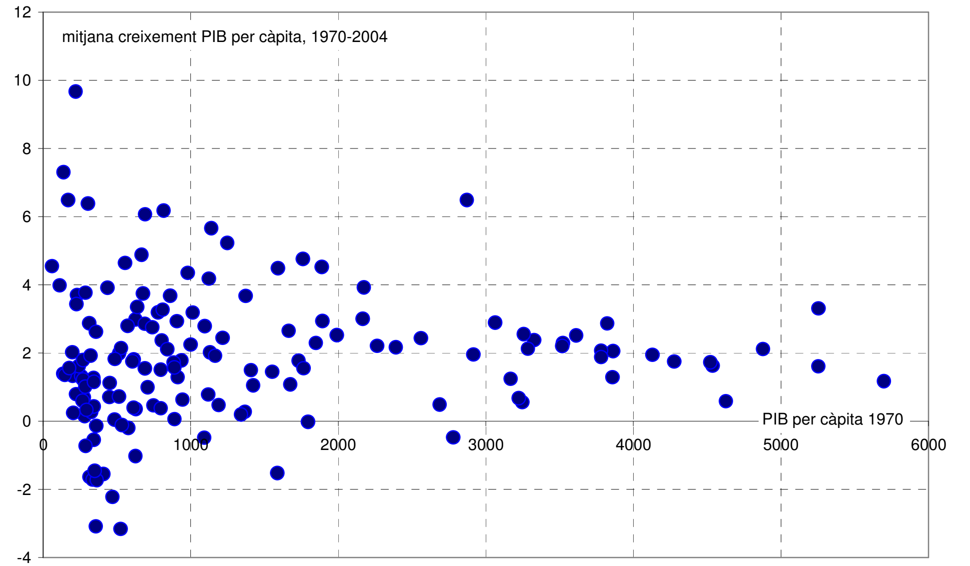


Fig. 33. No convergència a escala mundial, 1970-2004(prop de 150 països, excepte els creats des del 1970
Dades: http://pwt.econ.upenn.edu/php_site/pwt62/pwt62_form.php

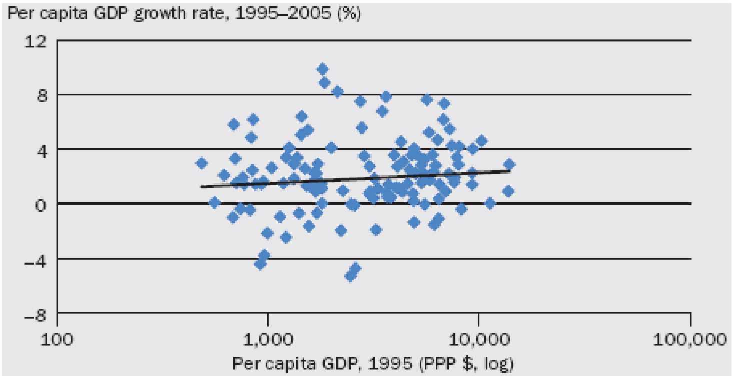


Fig. 34. No convergència de les economies en vies de desenvolupament cap a les riques (125 casos)
http://siteresources.worldbank.org/DATASTATISTICS/Resources/WDI07section1-intro.pdf

- Avalen les dades la hipòtesi de la convergència? A nivell mundial, l'evidència sembla més aviat negativa, tot i que alguns indicis poden apuntar cap a un inici de la convergència. La Fig. 33 mostra l'evidència negativa: de produir-se l'efecte *catch-up*, hauria de resultar una relació negativa (que no s'evidencia a la Fig. 33) entre la taxa de creixement de la producció per càpita durant el període considerat i la producció per càpita a l'inici del període (menys producció per càpita inicial, més taxa de creixement).
- La Fig. 34 es refereix exclusivament a economies en desenvolupament i tampoc no evidencia una correlació negativa entre producció per càpita inicial i taxa de creixement posterior. La Fig. 35 és l'indici que el procés de convergència pot estar engegant-se, ja que mostra que, a la darrera dècada, per a 100 observacions, les economies en desenvolupament han tendit a augmentar la seva taxa de creixement i a reduir la dispersió de les taxes. La part final de la gràfica de la Fig. 36 pot ser indicativa de l'inici de la convergència de les economies en desevolupament cap a les economies avançades.

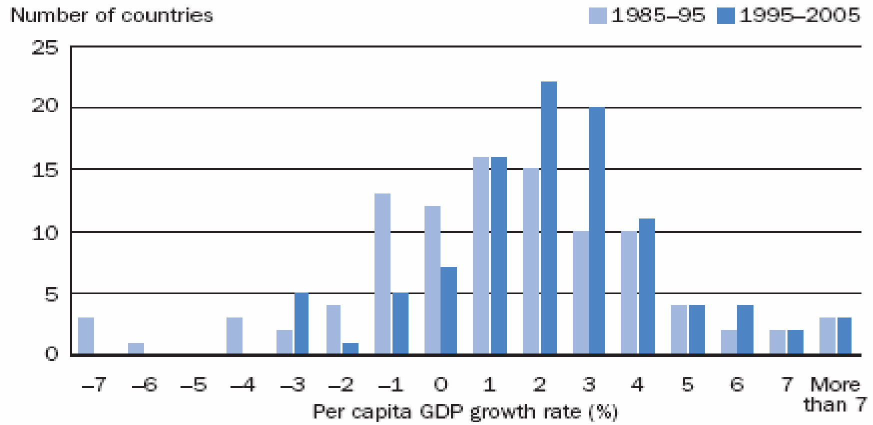


Fig. 35. Creixement més ràpid i menys dispers de les economies en vies de desenvolupament
http://siteresources.worldbank.org/DATASTATISTICS/Resources/WDI07section1-intro.pdf

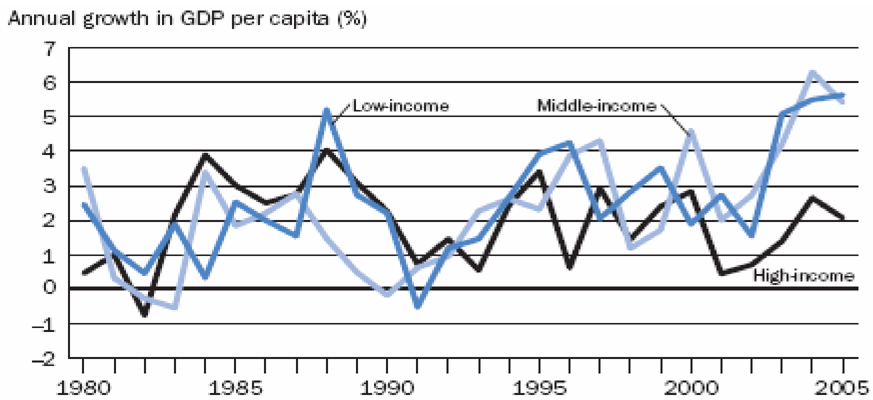


Fig. 36. Creixement més ràpid de les economies en vies de desenvolupament (Font: Fig. 35)

- D'altra banda, hi ha exemples de compliment de la convergència. Un està associat amb els anomenats 4 tigres asiàtics: Singapur, Hong Kong, Taiwan i Corea del Sud. Aquestes economies eren economies pobres, en pràcticament tots els sentits, a mitjans del segle XX. Però van desenvolupar un procés de ràpid creixement entre les dècades de 1960 i 1990 que ha portat aquestes economies en l'actualitat al grup d'economies riques.
- Un segon exemple el proveeixen les economies de l'Europa Occidental i, més en general, les economies de l'OCDE, l'Organització per a la Cooperació i el Desenvolupament Econòmic (http://www.oecd.org, http://www.oecd.org/dataoecd/29/6/2398191.ppt). Les Figs. 37 i 38 mostren certa evidència favorable al *catch-up*: les economies de l'OCDE estan en procés de convergència.

La comptabilitat del creixement econòmic

- La comptabilitat del creixement és una tècnica per a mesurar empíricament les tres fonts de creixement de la producció agregada al model de Solow: acumulació de capital, increment del nombre de treballadors i creixement de la productivitat (que es pren com a mesura del progrés tecnològic). La comptabilitat del creixement pretén determinar la contribució de cada font al creixement observat de la producció.
- Per exemple, considerem una funció de producció agregada del tipus Cobb-Douglas, on $Y = A{\cdot}K^{\alpha}{\cdot}L^{\beta}$. Aplicant les regles de càlcul de les taxes de creixement, s'obté (20).

$$\tilde{Y} \approx \tilde{A} + \alpha\,\tilde{K} + \beta\,\tilde{L} \tag{20}$$

- L'equació (20) separa la contribució al creixement de la producció en 3 components: la contribució al creixement de la productivitat, la contribució del capital i la contribució del treball. Així, la variació en la producció serà deguda: en part, a la variació en la productivitat; en part, a la variació de l'estoc de capital; i, en part, a la variació en la quantitat de treballadors.

El residu de Solow

- La contribució $\tilde{A}$ de la productivitat no és observable, de manera que es calcula per exclusió: $\tilde{A} = \tilde{Y} - \alpha\,\tilde{K} - \beta\,\tilde{L}$. Així que tota la variació de la producció que no sigui explicada per variacions en el capital o el treball, es deurà a variacions en la productivitat. El valor $\tilde{A}$ calculat amb la fórmula anterior s'anomena "residu de Solow" i es considera com a una mesura del canvi tecnològic.
- Les Figs. 39, 40 i 41 mostren exemples de càlcul de la comptabilitat del creixement. La Fig. 42 mostra una comptabilitat del creixement comparativa, prenent els Estats Units com a punt de comparació.

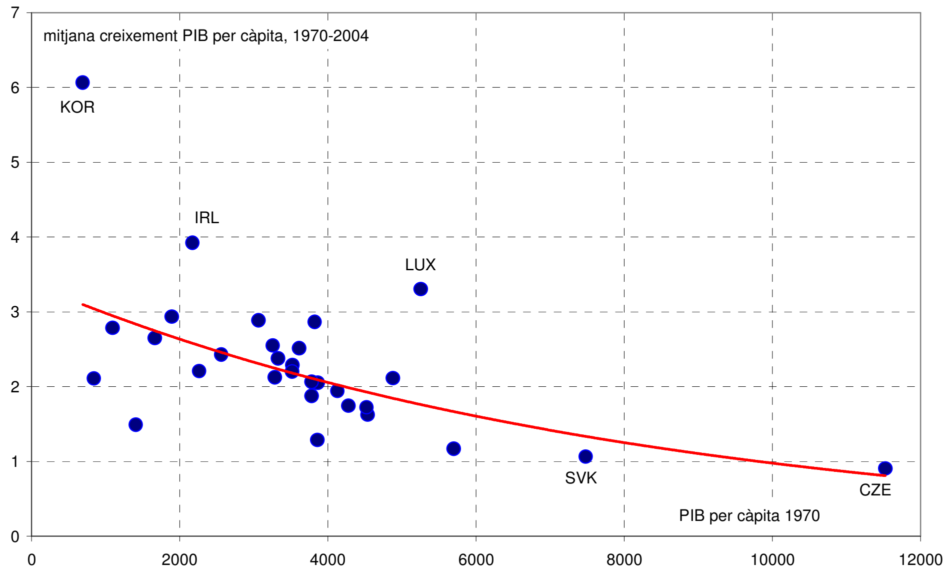


Fig. 37. Convergència de les 30 economies de l'OCDE, 1970-2004 (CZE, 1990; SVK, 1987)
http://pwt.econ.upenn.edu/php_site/pwt62/pwt62_form.php

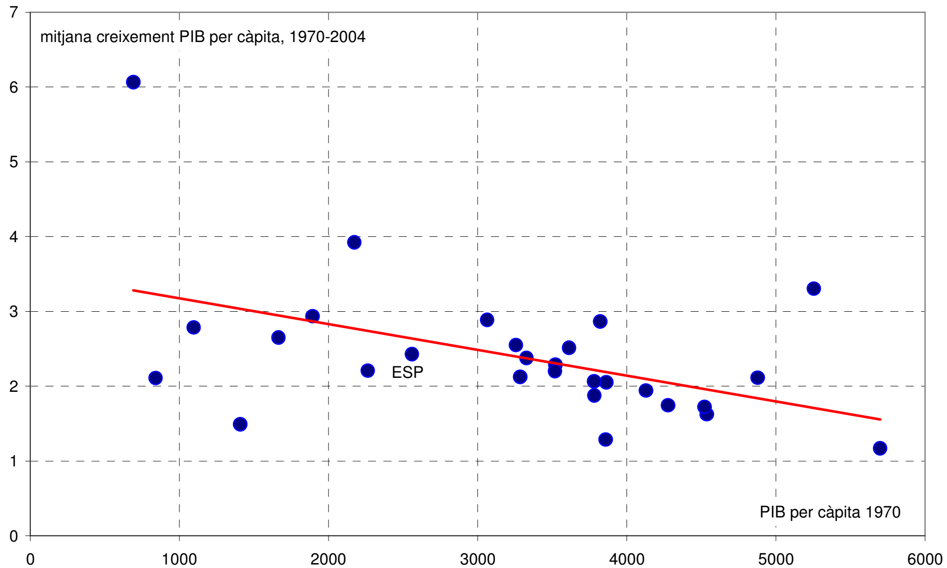


Fig. 38. Convergència de 28 les 30 economies de l'OCDE, 1970-2004 (tret de CZE i SVK)
http://pwt.econ.upenn.edu/php_site/pwt62/pwt62_form.php

anys	creixement d'Y	aportació de K	aportació d'L	productivitat (residu)
1950-59	4	0'4	0'5	3'1
1960-69	4'1	0'9	1'2	2
1970-79	2'9	1'1	1'5	0'3
1980-89	2'5	0'9	1'3	0'3
1990-94	2	0'6	0'6	0'9
1950-1994	3'2	0'8	1	1'4

Fig. 39. Comptabilitat del creixement als Estats Units, 1950-1994, augments percentuals mitjans anuals
Font: N. G. Mankiw, Macroeconomía, 3a edició, 1997, p. 151

	1929-1948	1948-73	1973-82	1929-1982	1982-2004
aportació d'L	1'42	1'4	1'13	1'34	0'96
aportació de K	0'11	0'77	0'69	0'56	0'8
productivitat	1'01	1'53	–0'27	1'02	0'99
creixement d'Y	2'54	3'70	1'55	2'92	2'75

Fig. 40. Comptabilitat del creixement als Estats Units, 1929-200, percentatges anuals
Font: A. A. Abel, B. S. Bernanke i D. Croushore, *Macroeconomics*, 6a edició, 2008, p. 217

TABLE 9.1
Growth Accounting for Europe, A.D. 500–1700

Period	Annual Growth Rate of Income per Capita, $\hat{y}$	Annual Growth Rate of Population, $\hat{L}$	Annual Growth Rate of Productivity, $\hat{A}$
500–1500	0.0%	0.1%	0.033%
1500–1700	0.1%	0.2%	0.166% i

Fig. 41. Comptabilitat del creixement a Europa, 500-1700, taxes anuals
http://wps.aw.com/aw_weil_econgrowth_1/24/6169/1579312.cw/content/index.html

Altres determinants del creixement econòmic

- En el model de Solow, el factor central que vertebra la comprensió del creixement econòmic és el capital per càpita: només incrementant el capital per càpita és possible incrementar la producció per càpita. La Fig. 43 mostra evidència empírica a favor de la relació positiva entre capital per càpita i producció per càpita.
- Amb tot, és clar que el model deixa fora factors que incideixen significativament sobre el creixement econòmic. Entre els factors més destacats no presents al model (Figs. 44, 45 i 46) hi ha els factors institucionals i socials (que queden amagats en el residu de Solow).

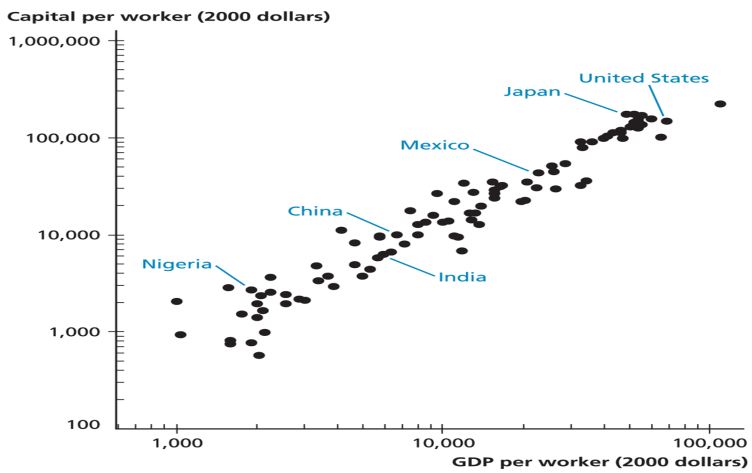
TABLE 7.2
Output, Factor Accumulation, and Productivity Relative to the United States, 1998

Country	Output per Worker, *y*	Physical Capital per Worker, *k*	Human Capital per Worker, *h*	Factors of Production, $k^{1/3}h^{2/3}$	Productivity, *A*
United States	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
Canada	0.76	1.02	0.98	0.99	0.77
Japan	0.74	1.37	0.87	1.00	0.73
Finland	0.71	1.14	0.89	0.96	0.74
United Kingdom	0.70	0.80	0.82	0.81	0.87
South Korea	0.44	0.75	0.92	0.86	0.51
Mexico	0.32	0.36	0.74	0.58	0.55
Peru	0.20	0.24	0.77	0.52	0.39
India	0.086	0.047	0.55	0.24	0.35
Kenya	0.041	0.021	0.53	0.18	0.23
Tanzania	0.015	0.019	0.45	0.16	0.094

Sources: Output per worker: Heston, Summers, and Aten (2002); physical capital: Bernanke and Gürkaynak (2001); education: Barro and Lee (2000). The data set used here and in Section 7.3 is composed of 71 countries for which consistent data are available for 1960 and 1998.

Fig. 42. Comptabilitat del creixement comparativa
http://wps.aw.com/aw_weil_econgrowth_1/24/6169/1579312.cw/content/index.html

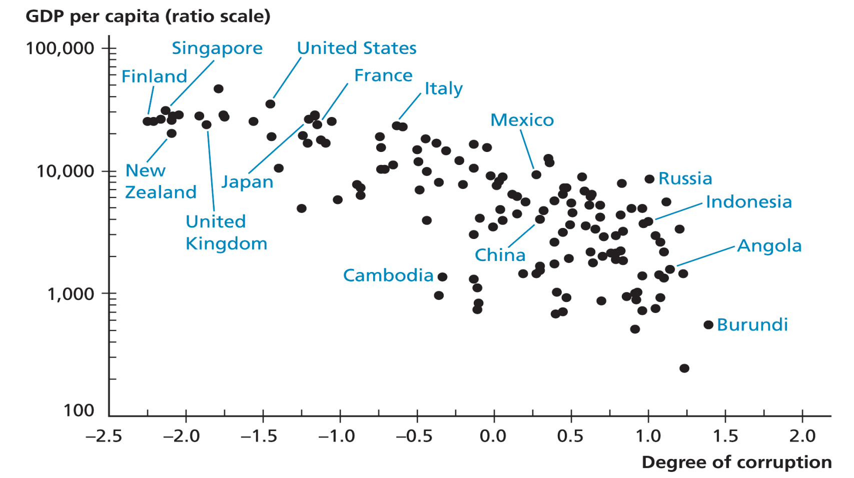
FIGURE 3.1
GDP and Capital per Worker, 2000



Source: Calculations based on Heston et al. (2002).

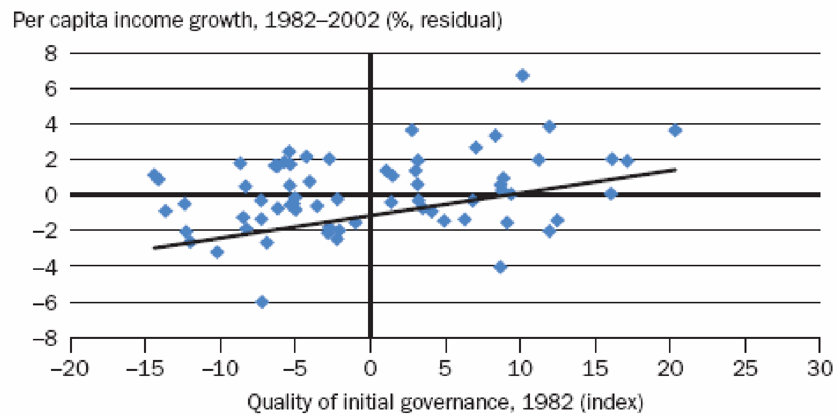
Fig. 43. Correlació positiva entre capital i producció per càpita
http://wps.aw.com/aw_weil_econgrowth_1/24/6169/1579312.cw/content/index.html

FIGURE 12.5
Government Corruption Versus GDP per Capita, 2000



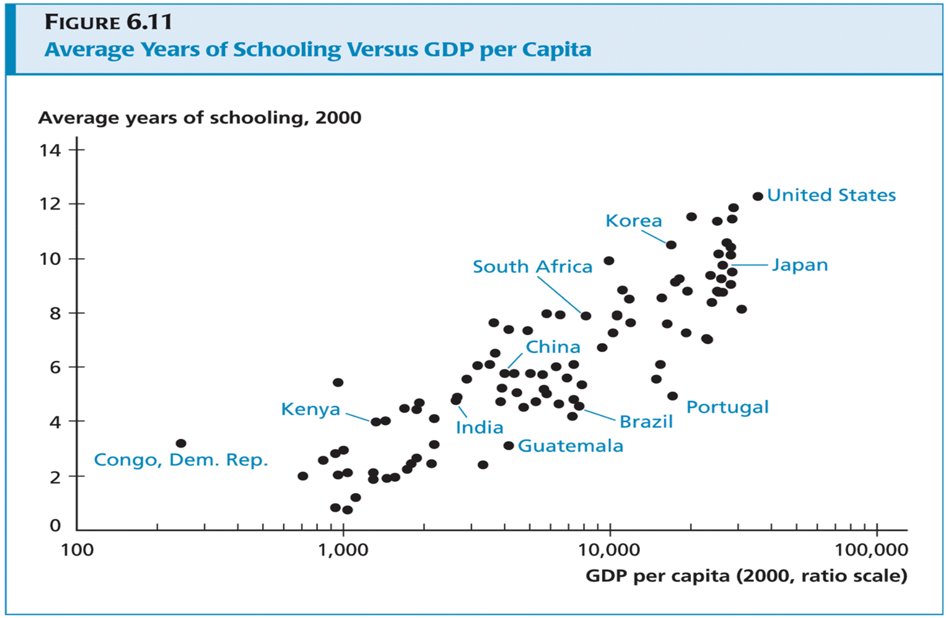
Source: Kaufmann, Kray, and Zoido-Lobatón (2002).

Fig. 44. Correlació negativa entre el grau de corrupció i la producció per càpita
http://wps.aw.com/aw_weil_econgrowth_1/24/6169/1579312.cw/content/index.html



Source: Knack 2006.

Fig. 45. Correlació positiva entre qualitat de la gestió pública i creixement de la producció per càpita
http://siteresources.worldbank.org/DATASTATISTICS/Resources/WDI07section5-intro.pdf



Source: Heston et al. (2002), Barro and Lee (2000).

Fig. 46. Correlació positiva entre els anys d'escolarització i la producció per càpita
http://wps.aw.com/aw_weil_econgrowth_1/24/6169/1579312.cw/content/index.html

- Factors institucionals (manca de propietat privada i de mercats lliures) s'assenyalen com a explicacions del fracàs en el llarg termini de les economies comunistes del segle XX.

Creixement endogen

- Al model de Solow, un cop l'economia arriba a un estat estacionari, el creixement de la producció per càpita només es pot produir per causes exògenes, això és, factors que el model no explica (per exemple, progrés tecnològic).
- Endogeneïtzar una variable vol dir que el model explica com es determina. Per exemple, si s'incorpora al model de Solow una teoria que explica com es determina la taxa de creixement de la població i el resultat és una reducció continuada de la taxa (com la projecció mostrada a la Fig. 47), el model predirà un creixement continuat endogen (perquè la pròpia dinàmica del model causa el creixement, no un factor exogen al model).
- Models posteriors al model de Solow han tractat el fenomen del creixement endogen, això és, un creixement sostingut per la pròpia dinàmica i estructura de l'economia. La Fig. 48 il·lustra com modificar el model de Solow (quan $n = 0$) per a què una economia creixi de manera endògena, sense empentes des de fora l'economia. La clau és assumir que la producció per càpita no està permanentment sotmesa a productivitats marginals decreixents. En aquets cas, s'assumeix que, a partir del valor k^*_4, la productivitat marginal és creixent. A l'economia de la Fig. 48, *a* defineix un estat estacionari però *b* no. Si l'economia no supera k^*_2, el seu destí el determina el punt *a*, que actua de centre de gravetat de l'economia. Però si l'economia supera k^*_2, el capital per càpita s'acumula indefinidament (perquè a la dreta de *b* la inversió supera la depreciació) i, per tant, la produccció per càpita creix sense fi (creixement endogen).

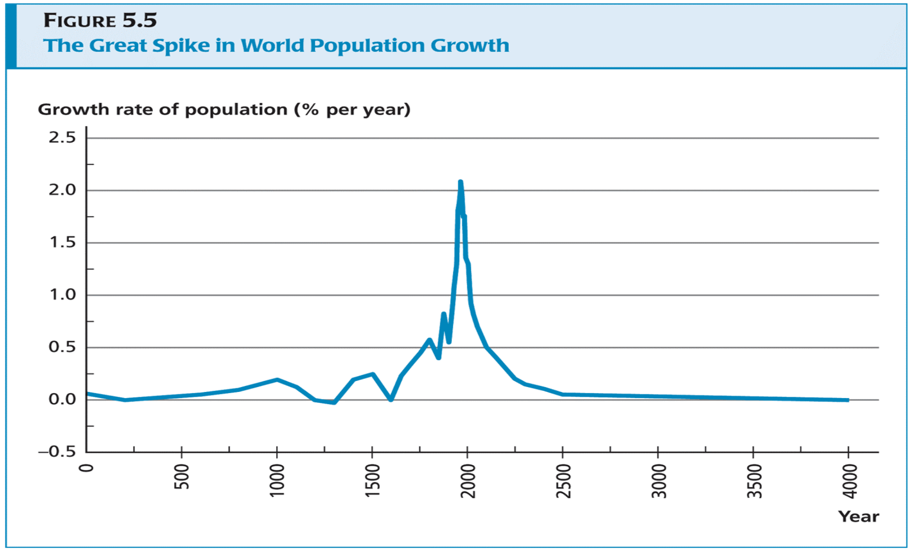


Fig. 47. El gran pic del creixement de la població (projecció d W. W. Rostow) · Font: com la Fig. 46

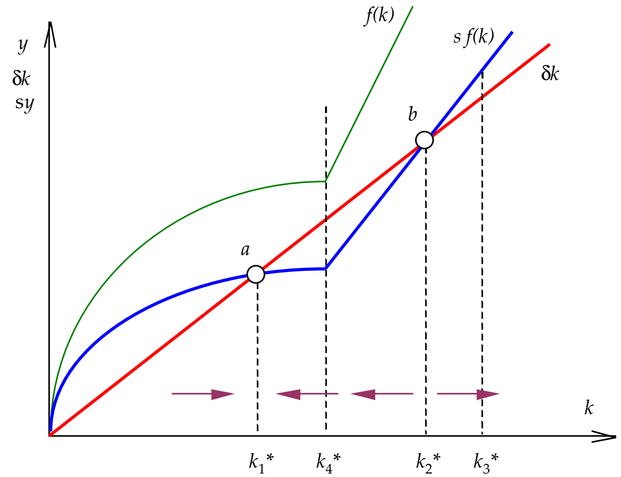


Fig. 48. Creixement endogen

Exercicis

1. Determina les productivitats marginals dels factors i els rendiments d'escala de les següents funcions de producció agregada:

(i) $Y = 2K^{1/2}L^{1/2}$ *(ii)* $Y = K^{1/2}L^{1/2}$ *(iii)* $Y = KL^2$ *(iv)* $Y = K^{1/2}L^2$ *(v)* $Y = K^{1/2}L$

(vi) $Y = 5KL$ *(vii)* $Y = \frac{1}{3}K^{1/3}L^{1/3}$ *(viii)* $Y = K^{1/4}L^{3/4}$ *(ix)* $Y = \text{mínim}\{K, L\}$ *(x)* $Y = K + L$.

2. Expressa cadascuna de les funcions de producció agregada de l'Exercici 1 com a relació entre la producció per càpita $y = Y/L$ *i el capital per càpita* $k = K/L$.

3. Representa gràficament cadascuna de les funcions de producció obtingudes a l'Exercici 2.

4. Troba i representa gràficament el capital per càpita de l'estat estacionari al model de creixement de Solow on $Y = K^{1/3}L^{2/3}$, $\delta = 0'1$, $s = 0'4$ *i* $n = 0$. *Calcula els valors de la producció per càpita, el consum per càpita, la inversió per càpita i la depreciació per càpita a l'estat estacionari i indica'ls a la representació gràfica del model. Quina és la taxa d'estalvi i el consum per càpita de la regla d'or?*

5. Troba i representa gràficament el capital per càpita de l'estat estacionari al model de creixement de Solow on $Y = 2K^{1/2}L^{1/2}$, $\delta = 0'1$, $s = 0'2$ *i* $n = 0$. *Calcula els valors de la producció per càpita, el consum per càpita, la inversió per càpita i la depreciació per càpita a l'estat estacionari i indica'ls a la representació gràfica del model. Quina és la taxa d'estalvi de la regla d'or? I el consum per càpita de la regla d'or? Assumint que les dades inicials descriuen les característiques presents de l'economia, què cal per a assolir el capital per càpita de la regla d'or, augmentar o disminuir el capital per càpita?*

6. Al model de Solow de l'Exercici 5, determina gràficament què succeeix amb la producció per càpita i el capital per càpita de l'estat estacionari si: (i) disminueix la taxa d'estalvi; (ii) disminueix la taxa depreciació; (iii) disminueixen simultàniament la taxa d'estalvi i la taxa de depreciació.

7. Al model de Solow de l'Exercici 5, determina gràficament què succeeix amb la producció per càpita i el capital per càpita de l'estat estacionari si la funció de producció passa de ser $Y = 2K^{1/2}L^{1/2}$ *a ser la funció* $Y = K^{1/2}L^{1/2}$. *Què pot causar aquest canvi a la funció de producció?*

8. Al model de Solow de l'Exercici 5, quina variació de la taxa de depreciació fa que la producció per càpita sigui 4 a l'estat estacionari?

9. Troba i representa gràficament el capital per càpita de l'estat estacionari al model de creixement de Solow on $Y = 2K^{1/2}L^{1/2}$, $\delta = 0'1$, $s = 0'2$ *i* $n = 0'1$. *Calcula els valors de la producció per càpita, el consum per càpita, la inversió per càpita i la depreciació per càpita a l'estat estacionari i indica'ls a la representació gràfica del model. Quina és la taxa d'estalvi de la regla d'or? I el consum per càpita de la regla d'or?Quina seria la taxa d'estalvi de la regla d'or si la taxa d'estalvi de l'economia fos 0'3 en comptes de 0'2?*

10. Demostra que, a una funció de producció Cobb-Douglas amb rendiments d'escala constants, la productivitat marginal del factor capital K és igual a la productivitat marginal del capital per càpita k, això és, $PMg_K = PMg_k$. *Comprova-ho, en particular, al cas* $Y = 2K^{1/2}L^{1/2}$.

11. Amb taxa de creixement de la població positiva, analitza gràficament al model de Solow l'efecte sobre el capital per càpita de l'estat estacionari i sobre la producció per càpita de l'estat estacionari de: (i) una reducció de la taxa de creixement de la població; (ii) un regrés tecnològic combinat amb un augment de la taxa de creixement de la població; (iii) una disminució de la taxa d'estalvi combinada amb un augment de la taxa de creixement de la població; (iv) un augment de la taxa de depreciació combinada a una disminució de la taxa de creixement de la població; i (v) un avenç tecnològic combinat amb una reducció de la taxa d'estalvi.

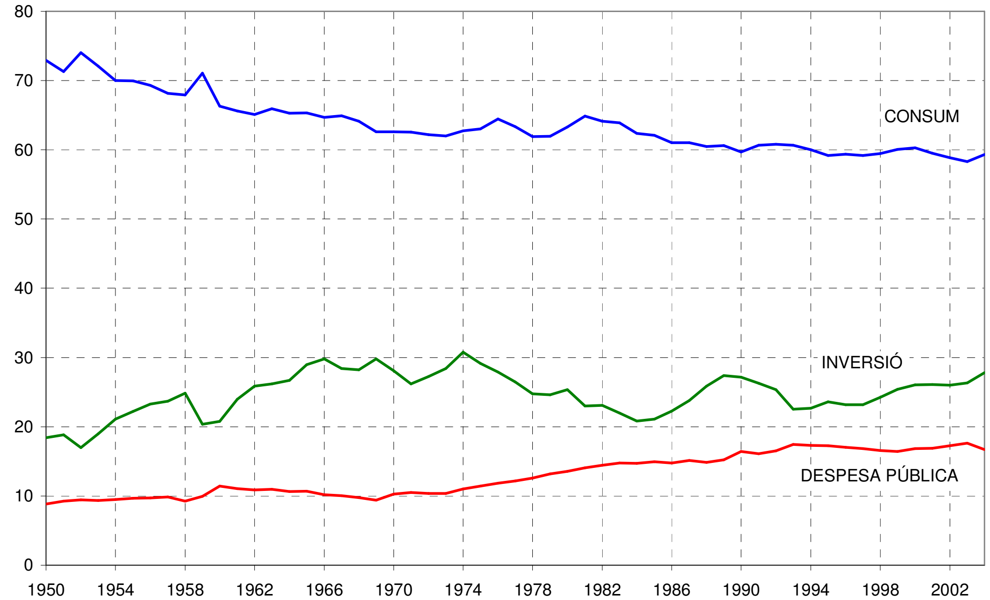


Fig. 49. Percentatge del consum, la inversió i la despesa pública a la producció per càpita d'Espanya (1950-2004). Font: PWT 6.2, http://pwt.econ.upenn.edu/php_site/pwt62/pwt62_form.php

12. Durant el període reflectit a la Fig. 49, la producció per càpita a Espanya va créixer (Fig. 3). És consistent l'evolució de les dades sobre consum i inversió de la Fig. 49 amb el que prediu el model de Solow sobre una economia que augmenta la seva taxa d'estalvi?

13. Segons la regla del 70, a quina taxa hauria de créixer una variable per a què es dupliqui en 3 períodes? I segons la regla del 71? I segons la regla del 72? I per a què es dupliqui en 20 períodes?

14. Una variable que creix al 20% anual, quan anys trigaria, aproximadament, a duplicar-se segons les regles del 70, 71 i 72?

15. A mesura que el temps avança, una variable creix a l'n% anual. A quina taxa decreix la variable si el temps retrocedeix? Aplica la fórmula obtinguda quan $n = 10\%$.

16. A mesura que el temps avança, una variable decreix al –n% anual. A quina taxa creix la variable si el temps retrocedeix? Aplica la fórmula obtinguda quan la variable decreix al –10%.

17. Tendeix l'economia a assolir espontàniament el capital per càpita de la regla d'or? Per què?