

Quatre períodes de vida

1. Descripció de l'economia (Exercici 40 de l'examen de 8 de novembre de 2023)

- Hi ha un únic bé que no es pot produir ni acumular.
- Cada període t neixen n persones. Cada persona viu quatre períodes consecutius.
- La utilitat en el darrer període coincideix amb el consum del període. La utilitat en un període previ és $u = c \cdot c'$, on c és el consum en el període corrent i c' el consum en el període següent.
- La dotació de bé de cada individu és $(0, 1, 0, 1)$.
- Calcula l'equilibri en el mercat de préstecs cada període.

2. Anàlisi

En el període inicial $t = 1$ no hi ha mercat de préstecs i per tant no hi ha cap intercanvi. Considerem una persona que ha nascut en $t \geq 2$.

- **Primer període de vida.** Si t és el primer període de vida es tracta de

$$\begin{array}{ll} \text{maximitzar} & u_t^1 = c_t^1 c_{t+1}^2 \\ \text{sotmès a} & c_t^1 + l_t^1 = 0 \\ & c_{t+1}^2 + l_{t+1}^2 = 1 + R_t l_t^1 \end{array}$$

on el superíndex indica període de vida i el subíndex temporal (per exemple, l_{t+1}^2 és el volum de préstecs en $t + 1$ d'algú que en $t + 1$ està vivint el seu segon període de vida).

El problema és de

$$\text{maximitzar} \quad u_t^1 = -l_t^1 \cdot (1 + R_t l_t^1 - l_{t+1}^2) \quad \text{respecte d}'l_t^1.$$

Però per a resoldre aquest problema primer cal determinar l_{t+1}^2 i això es produeix en el segon període de vida.

- **Segon període de vida.** Si $t + 1$ és el segon període de vida es tracta de

$$\begin{array}{ll} \text{maximitzar} & u_{t+1}^2 = c_{t+1}^2 c_{t+2}^3 \\ \text{sotmès a} & c_{t+1}^2 + l_{t+1}^2 = 1 + R_t l_t^1 \\ & c_{t+2}^3 + l_{t+2}^3 = R_{t+1} l_{t+1}^2. \end{array}$$

Simplificat és un problema de

$$\text{maximitzar} \quad u_{t+1}^2 = (1 + R_t l_t^1 - l_{t+1}^2) \cdot (R_{t+1} l_{t+1}^2 - l_{t+2}^3) \quad \text{respecte d}'l_{t+1}^2.$$

Però per a resoldre aquest problema primer cal determinar l_{t+2}^3 i això es produeix en el tercer període de vida.

• **Tercer període de vida.** Si $t + 2$ és el tercer període de vida es tracta de

$$\begin{aligned} \text{maximitzar} \quad & u_{t+2}^3 = c_{t+2}^3 c_{t+3}^4 \\ \text{sofmès a} \quad & c_{t+2}^3 + l_{t+2}^3 = R_{t+1} l_{t+1}^2 \\ & c_{t+3}^4 = 1 + R_{t+2} l_{t+2}^3. \end{aligned}$$

El problema és de

$$\text{maximitzar} \quad u_{t+2}^3 = (R_{t+1} l_{t+1}^2 - l_{t+2}^3) \cdot (1 + R_{t+2} l_{t+2}^3) \quad \text{respecte d}'l_{t+2}^3.$$

Aquest problema ja es pot resoldre perquè en el quart (darrer) període de vida es tracta de

$$\begin{aligned} \text{maximitzar} \quad & u_{t+3}^4 = c_{t+3}^4 \\ \text{sofmès a} \quad & c_{t+3}^4 = 1 + R_{t+2} l_{t+2}^3 \end{aligned}$$

i resulta que ja està tot decidit prèviament; en particular, el consum c_{t+3}^4 en el quart període està completament determinat: la dotació 1 i el rendiment $R_{t+2} l_{t+2}^3$ dels préstecs del període anterior.

La solució en el tercer període s'obté de la condició

$$0 = \frac{du_{t+2}^3}{dl_{t+2}^3} = R_{t+1} R_{t+2} l_{t+1}^2 - 1 - 2R_{t+2} l_{t+2}^3$$

o

$$l_{t+2}^3 = \frac{R_{t+1} R_{t+2} l_{t+1}^2 - 1}{2R_{t+2}} = \frac{R_{t+1} l_{t+1}^2}{2} - \frac{1}{2R_{t+2}}. \quad (1)$$

Aquesta solució s'introdueix en el problema del segon període, que esdevé

$$\text{maximitzar} \quad u_{t+1}^2 = (1 + R_t l_t^1 - l_{t+1}^2) \cdot \left(R_{t+1} l_{t+1}^2 - \left(\frac{R_{t+1} l_{t+1}^2}{2} - \frac{1}{2R_{t+2}} \right) \right) \quad \text{respecte d}'l_{t+1}^2.$$

o

$$\text{maximitzar} \quad u_{t+1}^2 = (1 + R_t l_t^1 - l_{t+1}^2) \frac{1}{2} \left(R_{t+1} l_{t+1}^2 + \frac{1}{R_{t+2}} \right) \quad \text{respecte d}'l_{t+1}^2.$$

La solució en el segon període s'obté de la condició

$$0 = \frac{du_{t+1}^2}{dl_{t+1}^2} = \frac{1}{2} \left(R_{t+1} (1 + R_t l_t^1 - 2l_{t+1}^2) - \frac{1}{R_{t+2}} \right)$$

o

$$l_{t+1}^2 = \frac{1 + R_t l_t^1}{2} - \frac{1}{2R_{t+1} R_{t+2}}. \quad (2)$$

Aquesta solució s'introdueix en el problema del primer període, que esdevé

$$\text{maximitzar } u_t^1 = -l_t^1 \cdot \left(1 + R_t l_t^1 - \left(\frac{1+R_t l_t^1}{2} - \frac{1}{2R_{t+1}R_{t+2}} \right) \right) \text{ respecte d' } l_t^1$$

o

$$\text{maximitzar } u_t^1 = -l_t^1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 + R_t l_t^1 + \frac{1}{R_{t+1}R_{t+2}} \right) \text{ respecte d' } l_t^1.$$

La solució en el primer període s'obté de la condició

$$0 = \frac{du_t^1}{dl_t^1} = -\frac{1}{2} \left(1 + 2R_t l_t^1 - \frac{1}{R_{t+1}R_{t+2}} \right)$$

o

$$l_t^1 = -\frac{1}{2R_t} - \frac{1}{2R_t R_{t+1} R_{t+2}}. \quad (3)$$

• **Equilibri en el mercat de préstecs.** En $t = 1$ no hi ha mercat de préstecs. En $t = 2$ hi ha mercat de préstecs on només hi participen els que tenen un període de vida i els que en tenen dos (es deixa com a exercici resoldre aquest cas). Per a $t \geq 3$ hi ha mercat de préstecs on hi participa tothom tret dels qui es troben en el quart període de vida. Així doncs, en $t \geq 3$, hi ha tres tipus de participants en el mercat de préstecs.

Primerament, els que estan en el primer període de vida. La participació d'aquestes persones està dictada per la funció (3):

$$l_t^1 = -\frac{1}{2R_t} - \frac{1}{2R_t R_{t+1} R_{t+2}}$$

En segon lloc, hi ha els que en t viuen el seu segon període de vida. La participació d'aquestes persones està dictada per la funció (2), formulada per a algú que en t està vivint el segon període de vida:

$$l_t^2 = \frac{1 + R_{t-1} l_{t-1}^1}{2} - \frac{1}{2R_t R_{t+1}}.$$

Per a $t \geq 4$ és vàlida l'equació (3) desfasada un període:

$$l_{t-1}^1 = -\frac{1}{2R_{t-1}} - \frac{1}{2R_{t-1} R_t R_{t+1}}.$$

Combinant les dues darreres equacions,

$$l_t^2 = \frac{1 + R_{t-1} \left(-\frac{1}{2R_{t-1}} - \frac{1}{2R_{t-1} R_t R_{t+1}} \right)}{2} - \frac{1}{2R_t R_{t+1}}$$

o

$$l_t^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4R_t R_{t+1}} - \frac{1}{2R_t R_{t+1}} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4R_t R_{t+1}}.$$

Finalment hi ha els que en t viuen el seu tercer període de vida. La participació d'aquestes persones està dictada per la funció (1), formulada per a algú que en t està vivint el tercer període de vida:

$$l_t^3 = \frac{R_{t-1}l_{t-1}^2}{2} - \frac{1}{2R_t}.$$

Per a $t \geq 5$ és vàlida l'equació (2) desfasada dos períodes:

$$l_{t-1}^2 = \frac{1 + R_{t-2}l_{t-2}^1}{2} - \frac{1}{2R_{t-1}R_t}.$$

Per a $t \geq 5$ és vàlida l'equació (3) desfasada dos períodes:

$$l_{t-2}^1 = -\frac{1}{2R_{t-2}} - \frac{1}{2R_{t-2}R_{t-1}R_t}.$$

Combinant les tres darreres equacions,

$$\begin{aligned} l_t^3 &= \frac{R_{t-1} \left(\frac{1 + R_{t-2}l_{t-2}^1}{2} - \frac{1}{2R_{t-1}R_t} \right)}{2} - \frac{1}{2R_t} = \\ &= \frac{R_{t-1} \left(\frac{1 + R_{t-2} \left(-\frac{1}{2R_{t-2}} - \frac{1}{2R_{t-2}R_{t-1}R_t} \right)}{2} - \frac{1}{2R_{t-1}R_t} \right)}{2} - \frac{1}{2R_t} = \\ &= \frac{R_{t-1} \left(\frac{1 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2R_{t-1}R_t} \right)}{2} - \frac{1}{2R_{t-1}R_t} \right)}{2} - \frac{1}{2R_t} = \\ &= \frac{R_{t-1} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4R_{t-1}R_t} - \frac{1}{2R_{t-1}R_t} \right)}{2} - \frac{1}{2R_t} = \frac{R_{t-1} \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4R_{t-1}R_t} \right)}{2} - \frac{1}{2R_t} = \\ &= \frac{R_{t-1}}{8} - \frac{3}{8R_t} - \frac{1}{2R_t} = \frac{R_{t-1}}{8} - \frac{7}{8R_t}. \end{aligned}$$

En resum, en $t \geq 5$, la condició d'equilibri en el mercat de préstecs és

$$n \cdot l_t^1 + n \cdot l_t^2 + n \cdot l_t^3 = 0$$

o

$$l_t^1 + l_t^2 + l_t^3 = 0$$

o

$$\left(-\frac{1}{2R_t} - \frac{1}{2R_tR_{t+1}R_{t+2}} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4R_tR_{t+1}} \right) + \left(\frac{R_{t-1}}{8} - \frac{7}{8R_t} \right) = 0.$$

Es tracta d'una equació en diferències de 4t ordre, on la taxa d'interès en t depèn de la taxa d'interès del període anterior i de la taxa de dos períodes següents (la presumpció en tots els càlculs anteriors és que hom té previsió perfecta: les taxes del futur són correctament anticipades).

Solucionar explícitament aquest tipus d'equació no és un assumpte trivial (i tampoc no hi ha un teoria general sobre les seves solucions). Per fortuna, l'interès en el model rau en la identificació dels estats estacionaris, que passa per igualar les taxes de tots els períodes. Sigui $R = R_{t-1} = R_t = R_{t+1} = R_{t+2}$. En aquest cas, l'equació anterior es transforma en

$$\left(-\frac{1}{2R} - \frac{1}{2R^3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4R^2}\right) + \left(\frac{R}{8} - \frac{7}{8R}\right) = 0$$

o, multiplicant per $8R^3$,

$$(-4R^2 - 4) + (2R^3 - 6R) + (R^4 - 7R^2) = 0$$

o

$$R^4 + 2R^3 - 11R^2 - 6R - 4 = 0$$

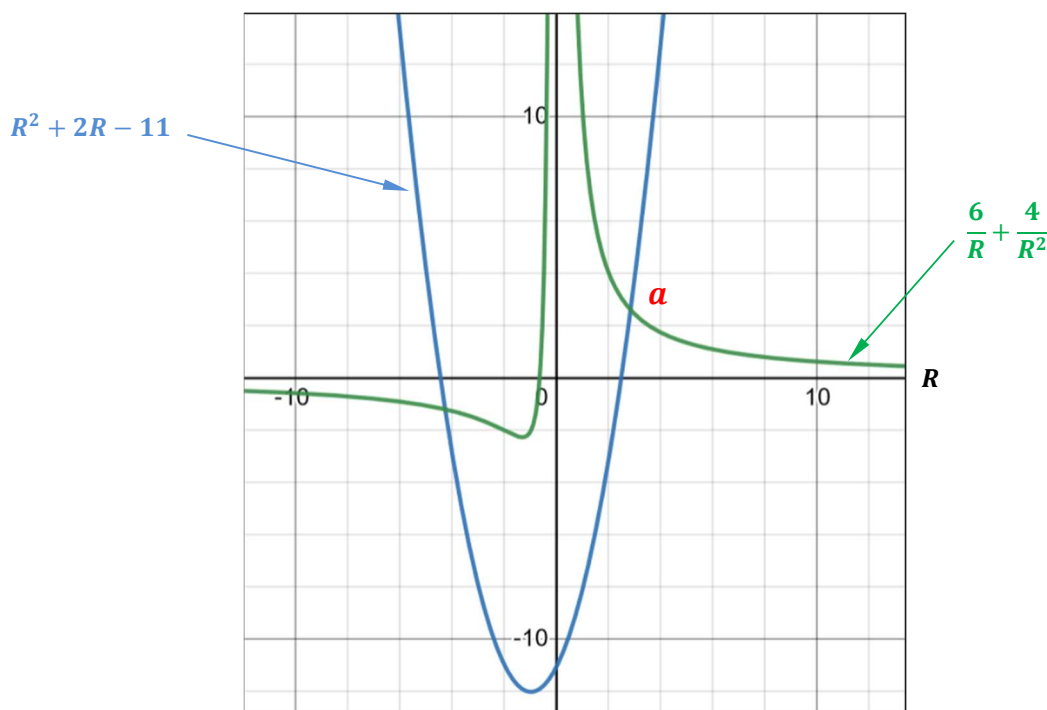
o

$$R^2(R^2 + 2R - 11) = 6R + 4$$

o

$$R^2 + 2R - 11 = \frac{6}{R} + \frac{4}{R^2}.$$

Amb aquesta formulació es pot identificar l'existència d'una solució única de manera gràfica. La part esquerra $R^2 + 2R - 11$ defineix una paràbola; la part dreta, $\frac{6}{R} + \frac{4}{R^2}$, una hipèrbola. La gràfica a continuació (feta a <https://www.transum.org/Maths/Activity/Graph/Desmos.asp>) mostra que hi ha una única intersecció (el punt a) per a valors positius de la taxa d'interès. El valor sobre l'eix d'abscisses del punt d'intersecció identifica la taxa d'interès d'estat estacionari.



La gràfica suggereix que la taxa d'interès d'estat estacionari seria una mica superior a 2,8.

