

Llista d'exercicis 2

1. Bons

La funció d'utilitat de cada consumidor jove és $u = c \cdot c'$. Cada generació està formada per 100 membres, 80 amb dotació (1,0) i els altres 20 amb dotació (2,0). El govern pretén aplegar 10 unitats amb l'emissió de bons amb venciment d'un període. Al venciment, els bons es paguen amb l'emissió de més bons, també amb venciment d'un període. I així successivament.

- (i) Calcula la taxa d'interès d'equilibri, el preu dels bons i la quantitat de bons emesa en els períodes 1, 2 i 3.
- (ii) Respon l'apartat (i) si la dotació dels individus del grup de 20 és (2,1) en comptes de (2,0).
- (iii) En el cas (ii), troba un import inicial a aplegar que provoqui que el refinançament continuat del deute faci que el volum de bons emès cada període sigui el mateix.
- (iv) En el cas (ii), indica un import inicial que faci eventualment insostenible el refinançament del deute.
- (v) Respon l'apartat (i) amb les dades del (ii) si, en el període 2, traspassen la meitat dels consumidors joves amb dotació (1,0).

2. Equivalència de bons i impostos

La funció d'utilitat de tot individu jove és $u = c \cdot c'$. Cada període neixen 100 individus, numerats de l'1 al 100. La dotació de bé d'un individu senar és (2,0) i (1,1) si és parell. El govern vol manllevar 25 unitats del bé en el període 1 mitjançant la venda de bons i refinaça el deute generat pels bons cada període emetent més bons. Troba un esquema d'imposts i transferències que generi cada període la mateixa assignació de consum d'equilibri que la política de refinançament del deute amb més bons.

3. Finançament d'un bé públic

Cada generació té 100 membres: 50 d'ells ("els pobres") amb dotació (1,0) i els altres 50 ("els rics") amb dotació (4,1). Els individus, rics o pobres, empen la dotació en consum c , préstecs (privats) l i contribucions (voluntàries) e a un bé públic. El bé públic només beneficia els joves. Per consegüent, la gent gran no contribueix al bé públic. La funció d'utilitat de cada jove és $u = c \cdot c' \cdot [1 + g(\sum_{j \in N} e^j)]$, on N és el conjunt de joves del període, e^j és la contribució del jove j (e^j no pot ser negativa ni superior a la dotació que j té de jove) i g es pot interpretar com una funció de producció del bé públic: el total de contribucions $\sum_{j \in N} e^j$ genera el volum $g(\sum_{j \in N} e^j)$ de bé públic. Pot considerar-se que cada unitat de bé públic fa més útil el consum privat del bé. Per a simplificar, sigui $g(\sum_{j \in N} e^j) = \sum_{j \in N} e^j$.

Determina quina és la contribució e^P per a finançar el bé públic que, en l'equilibri general, fa un individu pobre i quina és la contribució e^R que en fa un de ric.

4. Impost sobre el consum

Cada període neixen individus de dos grups, G1 i G2. G1 té 300 i G2 en té 100. Cada jove de G1 disposa de la dotació $(1, 0)$ i té $u_1 = c_1 \cdot (c_1')^2$ com a funció d'utilitat. Cada jove de G2 disposa de la dotació $(0, 2)$ i té $u_2 = (c_2)^2 \cdot c_2'$ com a funció d'utilitat. Cada període hi ha un impost de τ unitats del bé per unitat de bé consumida que ha de pagar cada jove de G1 i cada gran de G2. La recaptació de l'impost es distribueix igualitàriament entre el conjunt d'individus format pels joves de G2 i els grans de G1.

- (i) Calcula l'equilibri general competitiu de l'economia i compara'l amb el que resultaria si no existís l'impost (ni la transferència).
- (ii) Determina el valor de τ que maximitza la suma de tots els membres de l'economia que viuen en un període determinat, assumint que la funció d'utilitat de cada individu gran coincideix amb el seu consum de gran.

5. Pensions

Cada generació està formada per 40 individus amb dotació $(0, 2)$ i 60 amb dotació $(1, 0)$. La funció d'utilitat de cada jove és $u = c \cdot c'$.

- (i) Calcula l'equilibri general si només hi ha un mercat de préstecs.
- (ii) El govern estableix un sistema de pensions de repartiment finançat amb un impost de 0,6 a pagar per cada jove amb dotació positiva quan és jove. La recaptació de l'impost a cada període es distribueix igualitàriament entre tots els individus grans del període. Calcula l'equilibri general.
- (iii) El govern estableix un sistema de pensions de repartiment finançat amb un impost de τ unitats a pagar per cada jove amb dotació positiva quan és jove. La recaptació de l'impost a cada període es distribueix igualitàriament entre tots els individus grans del període. Calcula el valor de τ que fa que, en l'equilibri general, el consum de cada individu sigui el mateix valor c , tant si és jove com si és gran.

6. Que paguin els fills

Hi ha un únic bé que no es pot produir ni acumular. Cada període neixen n individus idèntics que viuen tres períodes consecutius. Els individus només tenen dotació del bé en el primer període de vida: una unitat del bé. Les funcions d'utilitat d'un individu nascut en t són: en t , $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$; en $t + 1$, $u_{t+1} = c_{t+1} \cdot c_{t+2}$; i en $t + 2$, $u_{t+2} = c_{t+2}$. Els individus joves accepten prestar als individus grans del mateix període perquè els joves del següent període pagaran els deutes dels grans del període anterior. Troba quant presten els joves als grans cada període i la taxa d'interès corresponent.

7. Imposts, transferències i bons

Hi ha dos grups d'individus, G1 i G2, amb n i m membres, respectivament. Tots els individus viuen dos períodes consecutius. Cada membre de G1 té una dotació d'una unitat de bé quan és jove i cap de gran. Cada membre de G2 té una dotació de d'una unitat de bé quan és gran i cap

de jove. La funció d'utilitat de tot membre de G1 jove en t és $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^\beta$. La funció d'utilitat de tot membre de G2 jove en t és $u_t = c_t \cdot c_{t+1} + c_t$.

- (i) Calcula l'equilibri general.
- (ii) Imagina que no és possible establir un mercat de préstecs i que una autoritat central (un govern) estableix un impost de quantia fixa τ que recau sobre un dels grups i paguen els membres del grup amb la seva dotació. El govern distribueix igualitàriament la recaptació del període entre els membres de l'altre grup que no tinguin dotació.
 - (a) Determina la diferència de consum de cada individu en cada període respecte dels consums obtinguts en l'apartat (i).
 - (b) Calcula la quantia fixa τ que replica els consums d'(i).
- (iii) Considera de nou (ii) amb la diferència que la recaptació es distribueix igualitàriament entre tots els individus del període que no tenen dotació. Respon a (b) en aquest cas.
- (iv) Considera novament (ii) amb la diferència que no hi ha impostos. Ara, cada període, el govern finança la transferència amb emissions de bons el pagament dels quals es finança amb noves emissions de bons. És sostenible aquesta política?

8. Gerontocràcia

Només hi ha un bé, que no pot acumular-se. Cada generació està formada per n individus idèntics. Cada individu jove té una dotació d'una unitat de treball. Cada individu gran no té dotació de treball. Cada individu jove en el període t decideix quina fracció e_t de la seva unitat de treball dedica a activitats d'esbarjo i quina fracció $1 - e_t$ dedica a produir el bé. La funció de producció del bé a partir del treball és la funció identitat: si x unitats de treball es destinen a produir el bé, la producció resultant del bé són x unitats.

La funció d'utilitat de cada individu que és jove en el període t és $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^2 \cdot e_t$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove, c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran i e_t l'esbarjo que tria de jove. La funció d'utilitat de cada individu gran coincideix amb el consum que fa de gran. Tots els individus prenen les seves decisions amb l'objectiu de maximitzar la seva utilitat. En cada període t , els individus grans imposen als individus joves l'obligació de donar-los la proporció τ_t de la producció que els joves fan. Els grans consumeixen la producció que els joves els lliuren i els joves consumeixen la producció que els resta un cop feta la transferència als grans.

Calcula el consum de cada jove, el consum de cada gran, la part del treball dedicada a activitats d'esbarjo i la proporció de la producció dels joves de la qual els grans se n'apropien.

9. Imposts

Només hi ha un bé, que no pot acumular-se d'un període cap a un altre. Cada generació està formada per tres grups: G1, G2 i G3. Cada grup està format per n individus idèntics. La funció d'utilitat de cada jove és $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove i c_{t+1} el consum

que el mateix individu farà de gran. La funció d'utilitat de cada individu gran coincideix amb el seu consum. No hi ha producció.

Cada membre de G1 té una dotació de zero unitats del bé de jove i una unitat del bé de gran. Cada membre de G2 té una dotació d'una unitat del bé de jove i zero unitats del bé de gran. Els membres de G3 no tenen dotació del bé, ni de joves ni de grans.

Una llei sagrada establerta en temps immemorial dicta que, cada període, els joves de G1 i G2 han de pagar τ unitats del bé (aquest import és el mateix cada període i suficientment petit per a què tothom el pugui pagar). La llei mana que la recaptació total de l'impost en el període sigui distribuïda, en el mateix període, de manera igualitària entre els membres de G3, però no especifica si els destinataris de la transferència han de ser els joves o els grans de G3.

Determina l'equilibri general, i la utilitat corresponent de cada individu, en els dos casos: cas 1, la transferència es fa als joves de G3; cas 2, la transferència es fa als grans de G3. Jutja quina opció consideres més recomanable.

10. Deute públic

Cada unitat de bé només pot existir en un període de temps. Cada generació està formada per dos grups: G1 i G2. Cada grup té n membres. La dotació de cada membre de G1 és (w, w) . La dotació de cada membre de G2 és $(\delta \cdot w, 0)$, on $w > 0$ i $\delta > 1$. El paràmetre δ mesura quantes vegades un individu jove de G2 és més ric que un individu jove de G1. La funció d'utilitat de cada individu i jove en el període t és $u = c \cdot (c')^\beta$, on $\beta > 0$.

En $t = 1$, el govern de l'economia crea un mercat de bons públics amb l'objectiu d'aconseguir G unitats del bé de la venda de bons. El govern accepta que el preu p del bo es determini competitivament (p s'expressa en unitats del bé per bo). Cada bo emès en $t = 1$ representa la promesa de pagament d'una unitat del bé en $t = 2$ al comprador del bo. El govern distribueix els ingressos de la venda de bons igualitàriament entre tots els grans del període $t = 1$.

- (i) Quin és l'equilibri general de l'economia en $t = 1$ assumint que la rendibilitat del bo és igual a la rendibilitat del préstec del bé?
- (ii) Compara l'assignació de consum d'equilibri de l'apartat (i) amb la que s'obtindria si el govern prohibís l'existència del mercat de préstecs privats, de manera que els prestadors només poguessin prestar al govern.
- (iii) Tant al cas (i) com al (ii), obté l'equació que estableix la dinàmica d'acumulació de deute públic si el govern refinança sempre el seu deute.

11. Imposts i deute

Hay un único bien, que no puede acumularse. Cada período hay dos grupos, G1 y G2, ambos con n integrantes y que viven dos períodos. La función de utilidad de un joven de G1 nacido en t es $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^\beta$, donde β es una constante positiva. La función de utilidad de un joven de G2

nacido en t es $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$. La dotación de cada miembro de G1 es $(w, 0)$; la de cada uno de G2 es $(0, 0)$.

- (i) Calcula el equilibrio general competitivo si existe un impuesto de cuantía fija τ que paga cada joven de G1 y que se reparte igualitariamente entre todos los individuos, jóvenes o mayores, que no tengan dotación en el período en que se recauda el impuesto.
- (ii) Calcula el equilibrio general competitivo si existe una autoridad pública que emite cada período deuda pública para, al mismo tiempo, pagar deuda pública pasada y financiar cada período la transferencia τ a todo individuo que no tiene dotación.
- (iii) Responde a (i) si los individuos que reciben la transferencia pueden participar en un mercado de préstamos privados.

12. Tres períodes amb deute públic

Hay un único bien, que no puede acumularse. Cada período nacen n individuos idénticos, que viven tres períodos consecutivos. En el período inicial de vida t la función de utilidad es $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$. En el $t + 1$, la función de utilidad es $u_{t+1} = c_{t+1} \cdot c_{t+2}$. Existe una autoridad pública que, cada período, transfiere τ unidades del bien a todo individuo que no tiene dotación. Esta política se financia con la emisión de títulos de deuda pública y, cada período, la deuda vencida se refinancia con nueva emisión de deuda. Calcula el equilibrio general competitivo y determina en qué condiciones la acumulación de deuda es sostenible y en cuáles insostenible.

13. Deute públic amb transferències

Hay un único bien, que no puede acumularse. Cada período nacen n individuos idénticos, que viven tres períodos consecutivos y tienen la dotación $(1, 0, 0)$. En su primer período de vida, la función de utilidad es $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^\beta \cdot (c_{t+2})^{1-\beta}$, con $0 < \beta < 1$. En el resto de períodos la función de utilidad del período coincide con el consumo del período. Existe un gobierno que cada período transfiere la cantidad τ del bien a cada individuo en su último período de vida. También cada período el gobierno pone a la venta una cantidad fija B de bonos, que sólo pueden comprar los que nacen en el período de emisión de los bonos. Un bono comprado en t paga una unidad del bien en $t + 1$. Cada período el gobierno equilibra su presupuesto: los ingresos por la venta de bonos se emplean exclusivamente en pagar la deuda del período anterior y en financiar la transferencia. El gobierno no permite la existencia de un mercado de préstamos privados.

- (i) (a) Halla la función de demanda de bonos de cada individuo que los pueda comprar, el precio de los bonos y establece las condiciones que deben satisfacer los parámetros para garantizar que demanda y precios son positivos. (b) ¿Es necesario que el gobierno prohíba el mercado de préstamos privados si no quiere que haya préstamos privados?
- (ii) Contesta (a) en (i) si el número de individuos que nacen en un período par es el doble que en un período impar.
- (iii) Contesta (a) en (i) si la función de utilidad de un individuo en su segundo período de vida $t + 1$ es $u_{t+1} = c_{t+1} \cdot c_{t+2}$ y el gobierno permite el mercado de préstamos privados.

- (iv) Contesta (a) en (i) si el gobierno permite el mercado de préstamos privados, si reciben la transferencia los individuos en su segundo período de vida y si la función de utilidad de un individuo en su segundo período de vida $t + 1$ es $u_{t+1} = c_{t+1} \cdot c_{t+2}$.

14. Dues economies amb emigració

Hay dos economías, A y B, y un único bien, que no puede acumularse. En cada economía y período nacen 100 individuos, que viven dos períodos (joven y mayor) y tienen como dotación (1, 1). Los miembros jóvenes de A tienen como función de utilidad $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^\beta$. Todos los miembros jóvenes en t de B tienen como función de utilidad $u_t = (c_t)^\beta \cdot c_{t+1}$. Los miembros jóvenes de A tienen la posibilidad de migrar a B, en cuyo caso su función de utilidad se transforma en $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^\beta \cdot a/n$, donde a es una constante y n es el número total de habitantes en B.

- (i) Calcula el equilibrio general de cada economía.
- (ii) ¿Qué proporción de los nacidos en A migran a B?

15. Sadollament

Hay un único bien, que no puede acumularse. Cada período hay dos grupos, G1 y G2, con n y $2 \cdot n$ miembros, respectivamente. Los miembros de G1 que son jóvenes en t tienen la función de utilidad $u_t = c_t \cdot c_{t+1} \cdot (1 - c_{t+1})$ y la dotación $(w, 0)$. Los miembros de G2 que son jóvenes en t tienen la función de utilidad $u_t = c_t \cdot (1 - c_t) \cdot c_{t+1}$ y la dotación $(0, w)$. Calcula el equilibrio general competitivo de la economía.

16. Tres períodes amb cicles

Hay un único bien, que no puede acumularse. Cada período nacen n individuos idénticos, que viven tres períodos consecutivos. En el primer período de vida la función de utilidad es $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$. En el segundo, $u_{t+1} = c_{t+1} \cdot c_{t+2}$. En el tercero, $u_{t+2} = c_{t+2}$. Las dotaciones de los individuos dependen del período en que nacen. La dotación de los que nacen en $t, t + 3, t + 6, t + 9 \dots$ es $(1, 0, 0)$. La dotación de los que nacen en $t + 1, t + 4, t + 7, t + 10 \dots$ es $(0, 1, 0)$. La dotación de los que nacen en $t + 2, t + 5, t + 8, t + 11 \dots$ es $(0, 0, 1)$. Calcula el equilibrio general competitivo de la economía.

17. Acumulació i préstecs

Hay un único bien. Cada período nacen n individuos idénticos, que viven tres períodos consecutivos y tienen dotación $(1, 0, 0)$. En el primer período de vida la función de utilidad es $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^\beta$. En el segundo, $u_{t+1} = c_{t+1} \cdot c_{t+2}$. En el tercero, $u_{t+2} = c_{t+2}$. En el primer período puede acumularse bien por un período; el bien se deprecia totalmente en el segundo período si no se consume. Acumular x unidades del bien en el primer período implica disponer de $\lambda \cdot x$ unidades en el segundo, donde $\lambda > 0$ es constante. Calcula el equilibrio general competitivo de la economía y cuánto acumula cada individuo.

18. Impost als préstecs

Hi ha un únic bé que no es pot produir ni acumular. Hi ha dos grups d'individus G1 i G2, cadascun format per n membres. Cada individu viu dos períodes consecutius. Per a tot període t , la funció d'utilitat de tot membre de G1 nascut en t és $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^\beta$, on β és una constant positiva. Per a tot període t , la funció d'utilitat de tot membre de G2 nascut en t és $u_t = (c_t)^\beta \cdot c_{t+1}$. La dotació de bé de cada membre de G1 és $(2, 0)$ i la de cada membre de G2 és $(0, 4)$, on el primer component de cada vector és la dotació en el primer període de vida i el segon component, la dotació en el segon període.

- (i) Calcula l'equilibri general competitiu si els prestadors han de pagar, per cada unitat prestada, la quantitat τ de bé en concepte d'impost i si la recaptació corresponent es distribueix de manera igualitària entre tots els individus del període sense dotació i que viuen el segon període de vida.
- (ii) Calcula l'equilibri general competitiu si els prestataris han de pagar, per cada unitat manllevada, la quantitat τ de bé en concepte d'impost i si la recaptació corresponent es distribueix de manera igualitària entre tots els individus del període sense dotació i que viuen el segon període de vida.
- (iii) Calcula l'equilibri general competitiu si els prestadors han de pagar, per cada unitat prestada, la quantitat τ de bé en concepte d'impost i si la recaptació corresponent es distribueix de manera igualitària entre tots els individus del període sense dotació.
- (iv) Calcula l'equilibri general competitiu si els prestataris han de pagar, per cada unitat manllevada, la quantitat τ de bé en concepte d'impost i si la recaptació corresponent es distribueix de manera igualitària entre tots els individus del període sense dotació.

19. Pensions

Hi ha un únic bé, Y , que no es pot acumular. Tots els individus són idèntics i viuen tres períodes. En el primer període són econòmicament irrelevants. En el segon decideixen quants fills tenir. En el tercer estan jubilats. El bé pot ser produït amb treball L . La funció de producció agregada en el període t és $Y(t) = A \cdot L(t)^\alpha$, on α és una constant positiva. Cada individu disposa d'una unitat de treball en el segon període de vida i rep com a renda el valor de la producció per càpita. En el tercer període no es rep cap renda. La funció d'utilitat en el tercer període coincideix amb el consum. La funció d'utilitat en el segon període t és $u(t) = c(t) \cdot c(t+1) \cdot n(t)^\beta$, on $c(t)$ és la quantitat de bé que l'individu consumeix en el període t , $c(t+1)$ és la quantitat consumida en el següent període $t+1$, $n(t)$ és el nombre de fills que ha triat tenir i β és una constant entre zero i u. El cost associat amb la tinença i criança de fills és un cost fix de $\gamma > 0$ unitats de bé per fill. La font de renda en el tercer període és una pensió que paguen els fills: cada fill transfereix p al seu progenitor.

Calcula la trajectòria d'acumulació de la població i de la producció i els estats estacionaris corresponents.

20. Més pensions

Respon les mateixes preguntes que en l'exercici 19 però ara assumint que la funció d'utilitat en el segon període de vida és $u(t) = c(t) \cdot c(t + 1)$.

21. Diner i felicitat

Cada període neixen dos grups d'individus, G1 i G2, amb m i n membres, respectivament. Hom viu dos períodes consecutius. Hi ha un únic bé. El bé no es pot produir ni acumular. També hi ha diner, que sí és acumulable però no falsificable. El bé no es pot prestar: només es pot intercanviar per diner. Cada membre de G1 disposa d'una unitat del bé de jove i cap de gran. Cada membre de G2 disposa de dues unitats del bé de jove i unes altres dues de gran. A més, cada membre jove de G2 rep una unitat de diner. La funció d'utilitat de tot membre jove de G1 en t és $u_t = (c_t)^\beta \cdot c_{t+1}$, on $\beta > 0$. La funció d'utilitat de tot membre jove de G2 en t és $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^\beta$. De gran, la utilitat d'un membre de G1 coincideix amb el seu consum, en tant que la d'un membre de G2 és $u_{t+1} = c_{t+1} \cdot m_{t+1}$, on m_{t+1} és la quantitat de diner de què disposa l'individu de gran.

Els apartats següents són independents: no facis servir les hipòtesis d'un apartat en d'altres. En cada apartat, si alguna variable queda definida per un procés dinàmic, determina els seus estats estacionaris.

- (i) Calcula l'equilibri general competitiu, si més no quan $\beta = 1$ i $m = n$.

[Compara els resultats si centres l'anàlisi en la condició d'equilibri del mercat de diner amb els resultats si centres l'anàlisi en la condició d'equilibri del mercat del bé. Si cal, diferencia l'anàlisi quan els membres grans de G2 volen comprar diner del cas quan volen vendre diner.]

- (ii) Calcula l'equilibri general competitiu, si més no quan $\beta = 1$ i $m = n$, assumint que el bé és diferent cada període (això és, els joves i els grans consumeixen ben diferents: cada període hi ha tres unitats del bé que consumeixen els joves i dues unitats del bé que consumeixen els grans).
- (iii) Calcula l'equilibri general competitiu, si més no quan $\beta = 1$ i $m = n$, si la funció d'utilitat de cada individu gran de G1 és la mateixa que la de cada individu gran de G2.
- (iv) Calcula l'equilibri general competitiu, si més no quan $\beta = 1$ i $m = n$, si
- (a) la funció d'utilitat de cada individu gran de G1 és la mateixa que la de cada individu gran de G2 (el diner dona utilitat a tots els grans) i, a més,
- (b) com en l'apartat (ii), el bé és diferent cada període.
- (v) Calcula l'equilibri general competitiu quan $\beta = 1$, $m = n$ i la funció d'utilitat de cada individu jove de G1 és $u_t = (c_t)^\beta \cdot c_{t+1} \cdot m_t$, on m_t és la quantitat de diner que arreplega l'individu.
- (vi) Calcula l'equilibri general competitiu quan $\beta = 1$, $m = n$ i la funció d'utilitat de cada individu jove de G2 és $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^\beta \cdot m_t$, on m_t és la quantitat de diner que arreplega l'individu.

22. Pensions i deute públic

Hi ha un únic bé, que no es pot produir, acumular, ni prestar entre individus. Cada període neixen dos grups d'individus, G1 i G2, el primer grup format per n membres i el segon per m .

Cada individu viu dos períodes consecutius. Hom té les mateixes funcions d'utilitat: en el primer període t de vida, $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^\beta$, on β és una constant positiva, c_t és el consum en el primer període i c_{t+1} és el consum en el segon període de vida; en el segon període $t + 1$, la funció és $u_{t+1} = c_{t+1}$.

Els membres de G1 tenen, com a dotació, una unitat del bé en el primer període de vida i cap en el segon.

Els membres de G2 tenen, com a dotació, cap unitat del bé en el primer període de vida i una en el segon.

Hi ha un govern que, cada període, paga una pensió de q unitats del bé (més endavant s'especifica qui rep la pensió). La pensió es finança amb l'emissió de títols de deute públic: cada període el govern emet títols que prometen pagar una unitat del bé en el període següent; els individus poden comprar títols pagant el preu de p unitats del bé per títol. El mercat de deute públic és competitiu: p és un preu que iguala oferta i demanda de títols.

El govern equilibra el pressupost cada període: l'ingrés obtingut per l'emissió de títols coincideix amb la despesa total (pagament de la pensió i pagament del deute contret el període anterior). El pagament del deute es fa emetent nous títols de deute.

Respon almenys una de les següents preguntes.

- (i) Determina la trajectòria d'acumulació del deute públic i els estats estacionaris d'aquesta trajectòria si la pensió es paga als joves de G2.
- (ii) Determina la trajectòria d'acumulació del deute públic i els estats estacionaris d'aquesta trajectòria si la pensió es paga als joves de G2 i als grans de G1.
- (iii) Determina la trajectòria d'acumulació del deute públic i els estats estacionaris d'aquesta trajectòria si la pensió es paga als tots els joves.
- (iv) Determina la trajectòria d'acumulació del deute públic i els estats estacionaris d'aquesta trajectòria si la pensió es paga a tothom tret dels joves de G1.
- (v) Determina la trajectòria d'acumulació del deute públic i els estats estacionaris d'aquesta trajectòria si la pensió es paga a tots els grans.
- (vi) Determina la trajectòria d'acumulació del deute públic i els estats estacionaris d'aquesta trajectòria si la pensió es paga a tothom.

23. Acumulació i préstecs

Hi ha un únic bé, que pot produir-se i, en certs casos, acumular-se. Cada període neixen dos grups d'individus, G1 i G2, el primer grup format per n membres i el segon per m .

Cada individu viu dos períodes consecutius. Hom té les mateixes funcions d'utilitat: en el primer període t de vida, $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^\beta$, on β és una constant positiva, c_t és el consum en el primer període i c_{t+1} és el consum en el segon període de vida; en el segon període $t + 1$, la funció és $u_{t+1} = c_{t+1}$.

Els membres de G1 tenen, com a dotació, una unitat del bé en el primer període de vida i dues en el segon.

Els membres de G2 tenen, com a dotació, dues unitats del bé en el primer període de vida i una en el segon.

Respon almenys una de les següents preguntes.

- (i) Calcula l'equilibri general competitiu si els membres joves de G1 poden acumular el bé, de manera que cada unitat acumulada en un període són $\alpha < 1$ unitats disponibles en el període següent.
- (ii) Calcula l'equilibri general competitiu si els membres joves de G2 poden acumular el bé, de manera que cada unitat acumulada en un període són $\alpha < 1$ unitats disponibles en el període següent.
- (iii) Calcula l'equilibri general competitiu si hom pot acumular el bé: cada unitat que un jove G1 acumula fa que disposi d' $\alpha_1 < 1$ unitats en el període següent i cada unitat que un jove G2 acumula fa que disposi d' $\alpha_2 < 1$ unitats en el període següent.

24. Dehudah púvliqa rehfinanziahda

Ahi hun húnyko vyhen, ke noh puhede produzyrse ný akumularihse. Kaddah perúhodo názen n hyndybiuhos hidéntykos, keh bibhen dhos pehrihodohs qonsekutibos.

Hla fu-unzihón dhe utylydad hehn hel prymer perýoh-do éss $u = c \cdot (c')^\beta$, don-dhe β hés hunah qonstannteh possityba, c ehl conshumo hdhehlh prymher peri-hodo iy c' elh konsumoh dehl ssegunnddoh pheríodoh.

hEn Hel seg-u-ndoh pe-ry-od-oh, la hutylidaad koynzideh konn hhel qonssumho. Llah dotazihón del vihen dhe khada hyndybyduho hés deh dhos hunyadess dhel vyhen hen hel prymerr pehryýodoh hy zeroh enh elh seh Gundoh.

Ahy hun govyernoh qe pagha huna unydaht dhell vyhen ha kaddah hindybiduhoh hen ssu sseggundoh peryhodoh. Hesttah pohlýtiqah seh fynanzzihah meddyhanteh lah hemissihón deh týtulhos deh dehudah púvlika: pagghandoh p h unidades dhel vien enh t , hel govvyernoh phagah hunah hunydáh dhel vien enh $t + 1$. Haddemásh hel govyernno fynanzyha hel paggoh deh toddah dehuda med-dyan-te lah hemis-sihón deh mass de-hudda.

- (i) Ckcalkkulah hhelh hekilyvrioh jhenheral qompetytyboh.
- (ii) Hobtéhn lah hekuazióh ke defyneh lah trallektórya deh hakumulazyón dhel hlah dehuda púvlika hih hlosh correhspodyentes hestaddosh hestazyonaryos.

25. Ijhos í pensyones

Ai hun húniko vihen, ke puhede produzirse peroh noh akumularihse. Lohs hindibiduos biben dhos perýhodos consequitibos. Thodhos lhos indhibiduhos qke nazen hen kadah períhodoth tyhenen hlas mysymas karakterýstiqas.

Hen hel prymer períhodoth: (i) seh tihene huna hunidad dé fakthor travajoh; (ii) sé dezide ke pharte dhel travájo seh destyna ha oziho í qé parthe ah produzir hel vhihén; (iii) she dezzide quhantos ijohs tenher (lhos hyjosh nazen hen hel sigyenthe pheriodoh); (iv) seh tyhene lah funzion deh hutilidá $u = c \cdot (c')^{1/2} \cdot n \cdot (x)^{1/3}$, dhondeh és c ehl conshumo pressenteh, c' elh konsumoh dehl sighienteh pheríodoth, n hel numeroh deh hyjos yh x lah qantidá de travajho dedikadah ah ozio.

Lah funzihon deh produkzihon dikta que kohn l hunidadhes de trrabajoh seh prodúzen $\beta \cdot l$ hunydades delh vien, dondhe $\beta > 0$. Hel kosthe deh tenehr kada ijo és $\gamma > 0$ unydahdes del vien. Hademass, hen suh segunndoh peryhodo deh bida, kada hindibiduo rezive dhe kada huno dé suss ijohs (komo pensihón) p unydaddes delh vien.

- (i) Dethermýna quantoh hozio se hescojje.
- (ii) Hobtéhn lah hekuazióh ke defyneh lah trallektórya deh hakumulazyón deh lha phoblahzióh. Husah hestah ekkuhayon parah kalqular losh hestadosh hestazionáriosh deh lah pobhlacyhón.
- (iii) ¿Tyhene karraktehrystiqas mhaltusyhanas heste modeloh?

26. Deute públic

Hi ha un únic bé que no es pot produir ni acumular. Cada període neixen dos grups d'individus, G1 i G2, cadascú amb n membres. Hom viu dos períodes consecutius.

Essent c el consum del bé de jove i c' el consum de gran, la funció d'utilitat de tot individu jove de G1 és $u = c \cdot (c')^2$ i la funció d'utilitat de tot individu jove de G2 és $u = c^2 \cdot c'$. Tot individu gran té la funció d'utilitat $u' = c'$. La dotació de cada membre de G1 és $(1, 0)$: una unitat de jove i cap de gran. La dotació de cada membre de G2 és $(0, 1)$: una unitat de gran i cap de jove.

En el període inicial es crea un govern que emet bons (deute públic). Cada bo, a canvi de pagar per ell en el període corrent p unitats del bé, remunera el comprador del bo el període següent amb una unitat del bé. El govern fa cada període un pagament de τ unitats del bé a cada jove de G2.

Cada període tenen lloc els següents esdeveniments:

- (i) primer, el govern emet bons per a fer el pagament als joves de G2 i per a liquidar el deute creat en emissions precedents de bons;
- (ii) segon, el govern paga les τ unitats del bé a cada jove de G2; i
- (iii) finalment, s'activa un mercat de préstecs entre els membres de G1 i G2.

El govern equilibra cada període el pressupost: el total de pagaments fets en el període és igual a la recaptació derivada de l'emissió de bons.

Calcula la taxa d'interès d'equilibri en el mercat de préstecs cada període, determina l'expressió que especifica el volum de deute del govern en funció del deute precedent i calcula els estats estacionaris corresponents.

27. Deute públic

Hi ha un únic bé que no es pot produir ni acumular. Cada període neixen dos grups d'individus, G1 i G2, cadascú amb n membres. Hom viu dos períodes consecutius.

Essent c el consum del bé de jove i c' el consum de gran, la funció d'utilitat de tot individu jove de G1 és $u = c^2 \cdot c'$ i la funció d'utilitat de tot individu jove de G2 és $u = c \cdot (c')^2$. Tot individu gran té la funció d'utilitat $u' = c'$. La dotació de cada membre de G1 és (1, 2): una unitat de jove i dues de gran. La dotació de cada membre de G2 és (2, 1): dues unitats de jove i una de gran.

En el període inicial es crea un organisme que emet bons (deute públic). Cada bo, a canvi de pagar per ell en el període corrent p unitats del bé, remunera el comprador del bo el període següent amb una unitat del bé. En el període inicial, l'organisme fa una emissió de bons que finança la seva creació. El cost d'aquesta creació són τ unitats del bé. En els períodes següents s'emeten bons per a pagar el deute generat per l'emissió precedent de bons.

Determina l'expressió que especifica el volum de deute en funció del deute precedent i calcula els estats estacionaris corresponents.

28. Deute públic amb impostos

Hi ha un únic bé que no es pot produir ni acumular. Cada període neixen dos grups d'individus, G1 i G2, cadascú amb n membres. Hom viu dos períodes consecutius.

Essent c el consum del bé de jove i c' el consum de gran, la funció d'utilitat de tot individu jove de G1 és $u = c \cdot (c')^2$ i la funció d'utilitat de tot individu jove de G2 és $u = c^2 \cdot c'$. Tot individu gran té la funció d'utilitat $u' = c'$.

La dotació de cada membre de G1 és (1, 0): una unitat de jove i cap de gran. La dotació de cada membre de G2 és (0, 1): una unitat de gran i cap de jove.

En el període inicial es crea un govern que emet bons (deute públic). Cada bo, a canvi de pagar per ell en el període corrent p unitats del bé, remunera el comprador del bo el període següent amb una unitat del bé.

El govern fa cada període un pagament de τ unitats del bé a cada jove de G2.

Cada període tenen lloc els següents esdeveniments:

- (i) primer, el govern emet bons per a fer el pagament als joves de G2 i per a liquidar el deute creat en emissions precedents de bons;
- (ii) segon, el govern paga les τ unitats del bé a cada jove de G2; i
- (iii) finalment, s'activa un mercat de préstecs entre els membres de G1 i G2.

El govern equilibra cada període el pressupost: el total de pagaments fets en el període és igual a la recaptació derivada de l'emissió de bons.

Calcula la taxa d'interès d'equilibri en el mercat de préstecs cada període, determina l'expressió que especifica el volum de deute del govern en funció del deute precedent i calcula els estats estacionaris corresponents.

29. Deute públic i tres períodes de vida

Hi ha un únic bé que no es pot produir ni acumular. Cada període neixen n individus idèntics. Hom viu tres períodes consecutius: jove, adult i gran.

Essent c el consum del bé de jove, c' el consum d'adult i c'' el consum de gran, la funció d'utilitat de tot individu jove és $u = c^2 \cdot c'$, la funció d'utilitat de tot individu adult és $u' = c' \cdot (c'')^2$ i la funció d'utilitat de tot individu gran és $u'' = c''$.

La dotació de cada individu és $(1, 0, 0)$: una unitat de jove, cap d'adult i cap de gran.

En el període inicial es crea un organisme que emet bons (deute públic). Cada bo, a canvi de pagar per ell en el període corrent p unitats del bé, remunera el comprador del bo el període següent amb una unitat del bé.

En el període inicial, l'organisme fa una emissió de bons que finança la seva creació, que té un cost de τ unitats del bé. En els períodes següents s'emeten bons per a pagar el deute generat per l'emissió precedent de bons.

Determina l'expressió que especifica el volum de deute en funció del deute precedent i calcula els estats estacionaris corresponents.

30. Deute públic i préstecs privats

Hi ha un únic bé que no es pot produir ni acumular. Cada període neixen dos grups d'individus, $G1$ i $G2$, cadascú amb 100 membres. Hom viu dos períodes consecutius.

Amb $\beta > 0$, tot individu jove té la funció d'utilitat $u = c^\beta \cdot c'$, on és c el consum del bé de jove i c' el consum de gran. Tot individu gran té la funció d'utilitat $u' = c'$.

La dotació de cada membre de $G1$ és $(1, 0)$: una unitat de jove i cap de gran. La dotació de cada membre de $G2$ és $(2, 2)$: dues unitats de jove i dues de gran.

En el període inicial es crea un organisme que emet bons (deute públic). Cada bo, a canvi de pagar per ell en el període corrent p unitats del bé, remunera el comprador del bo el període següent amb una unitat del bé.

En el període inicial, l'organisme fa una emissió de bons que finança la seva creació. El cost de crear l'organisme són τ unitats del bé. En els períodes següents s'emeten bons per a pagar el deute generat per l'emissió precedent de bons.

Un mercat de préstecs privats (entre individus) coexisteix amb el mercat de bons (o mercat de deute públic). Cada individu només pot participar en un dels dos mercats.

Calcula, per a cada període:

- (i) quin percentatge de membres de cada grup participa en el mercat de deute públic (comprant bons de l'organisme) i quin percentatge participa en el mercat de préstecs privats (prestant a un altre individu o manllevant d'ell); i
- (ii) la taxa d'interès d'equilibri en el mercat de préstecs.

31. Un amb evasió fiscal sense capital

Cada generació té 100 membres: 50 ("els pobres") amb dotació de treball $(1, 0)$ i els altres 50 ("els rics") amb dotació de treball $(4, 0)$. Tots els joves de totes les generacions tenen la mateixa funció d'utilitat $u = c \cdot c'$. No hi ha capital: la producció només depèn del treball: $Y = L^{1/2}$. El salari és $\omega = L^{-1/2}$.

Hi ha un govern que estableix un impost τ a pagar pels rics joves. Per a cada t , la recaptació tributària en t es distribueix igualitàriament entre tots els que són grans en t (sistema de pensions de repartiment). Cada individu gran rebrà $\tilde{\tau}$. Els rics joves poden dedicar una part x de la seva dotació de treball tractant d'evadir el pagament de l'impost. Quan un ric esmerça x per a defraudar el pagament, acaba pagant $\tau \cdot g(x)$ en comptes de τ , on $g(x) = \left(1 - \frac{x}{4}\right)^2$.

En cada període t , el pressupost del govern està equilibrat: els ingressos tributaris obtinguts dels rics són iguals a les transferències fetes als grans ($100 \cdot \tilde{\tau}$). Els ingressos provinents dels rics no són necessàriament $50 \cdot \tau$ perquè cal determinar el nivell d'evasió fiscal que decideixen els rics. Troba l'equació que determina $\tilde{\tau}$ en funció de τ i calcula $\tilde{\tau}$ quan $\tau = 1$.

32. A quatre i a dos períodes amb dotacions endògenes

Hi ha un únic bé, que no es pot produir ni acumular. Començant per $t = 1$, cada període neixen n persones. Les nascudes en un període senar viuen quatre períodes consecutius. Les nascudes en un de parell en viuen dos.

Tota persona en el seu darrer període de vida té la funció d'utilitat $u = c$, on c és el consum del bé en el darrer període. Les nascudes en un període parell tenen, de joves, la funció d'utilitat $u = c^\beta \cdot (c')^{1-\beta}$, on c és el consum del bé de jove i c' el consum en el període següent, de gran. Les nascudes en un període senar tenen, cada període diferent del darrer període de vida, la funció d'utilitat $u = c \cdot c'$, on c és el consum del bé en el període i c' el consum en el període següent.

La dotació de les nascudes en un període parell és una unitat del bé de joves i, de grans, una unitat del bé menys el consum del bé fet de joves (per tant, consumir més de jove comporta tenir una dotació inferior de grans).

Calcula l'equilibri en el mercat de préstecs cada període en cadascun dels casos següents:

- cas 1: la dotació de les nascudes en un període senar és $(1, 0, 0, 1)$, això és, una unitat del bé en el primer i darrer períodes de vida i cap unitat en els restants;
- cas 2: la dotació de les nascudes en un període senar és $(1, 0, 1, 0)$ en els períodes 1, 5, 9, 13... i $(0, 1, 0, 1)$ en els períodes 3, 7, 11, 15...

33. Pensions i bons a dos períodes

Hi ha un únic bé, que no es pot produir ni acumular. Començant per $t = 1$, cada període neixen n persones, que viuen tres períodes consecutius.

Tota persona en el seu darrer període de vida té la funció d'utilitat $u = c$, on c és el consum del bé en el darrer període. En el primer període de vida, tota persona té la funció d'utilitat $u = c \cdot c' \cdot c''$, on c és el consum del bé en el primer període, c' el consum en el segon i c'' en el tercer.

En el segon període de vida, hom té la funció d'utilitat $u' = (c')^\beta \cdot (c'')^{1-\beta}$, on c' és el consum del bé en el segon període i c'' el consum en el tercer.

Tota persona té la dotació $(0, 1, 0)$: una unitat del bé en el segon període de vida i cap en els restants.

Hi ha un govern que fa una transferència de τ unitats del bé (en concepte de renda mínima vital) a cada persona en el seu primer període de vida.

En el període inicial $t = 1$ el govern disposa de la quantitat de bé necessària i suficient per a fer la transferència. Des del període $t = 2$ el govern finança la transferència mitjançant l'emissió de bons. L'emissió de bons també s'emptra per a pagar el deute generat per les emissions prèvies de bons. Cada període el govern iguala ingressos (de l'emissió dels bons) i despeses (derivades de la transferència i del pagament del deute públic generat per les emissions anteriors de bons).

Els bons que emet el govern tenen un venciment de dos períodes: cada bo emès en un període t paga una unitat del bé en $t + 2$ a canvi de pagar en t el preu p del bo.

Determina l'expressió que estableix la dinàmica d'acumulació o desacumulació del deute públic i identifica els estats estacionaris d'aquesta dinàmica.

34. Acumulació o fills amb producció

Hi ha un únic bé, que es pot produir i acumular. Cada període hi ha dos grups de persones, G1 i G2. Cada període neixen n persones de G1, que viuen dos períodes consecutius. Els membres de G1 poden acumular el bé però no poden tenir fills.

Els membres de G2 no poden acumular el bé, però sí tenir fills. S'entén que els membres de G2 també viuen dos períodes (atès que en el període addicional d'infantesa es consideren inactius).

Hom disposa d'una unitat de treball en el seu primer període de vida i de cap en el segon.

La funció d'utilitat de tota persona jove de G1 és $u = \ln c + \alpha \cdot \ln c'$, on c és el consum de jove, c' el consum de gran, $\alpha > 0$ és una constant i $\ln$ és el logaritme neperià. La funció d'utilitat de tota persona jove de G2 és $u = \alpha \cdot \ln c + \ln c'$. Tota persona gran té la funció d'utilitat $u' = c'$.

El bé es pot produir cada període $t \geq 2$ amb la funció de producció agregada $Y = 3 \cdot K^{1/3} \cdot L^{2/3}$, on Y és la quantitat de bé produïda en el període, K l'estoc de capital disponible en el període (estoc acumulat en el període anterior) i L el total d'unitats de treball del període. En el període inicial, $Y = L$.

El salari ω_2 en unitats del bé que reben els membres de G2 és el doble del salari ω_1 en unitats del bé que reben els membres de G1.

Per a tot període $t \geq 2$, la remuneració σ del capital en t i els salaris ω_1 i ω_2 del treball en t satisfan $\sigma \cdot K = \omega_1 \cdot L_1 + \omega_2 \cdot L_2$, on L_1 són les unitats de treball que aporten els membres de G1 i L_2 són les unitats de treball que aporten els membres de G2. Aquesta condició diu que el total de pagaments fets al factor capital és igual al total de pagaments fets al factor treball.

Cada període la producció es distribueix entre els dos factors de producció: en $t = 1$, $Y = \omega_1 \cdot L_1 + \omega_2 \cdot L_2$ i, en $t \geq 2$, $Y = \sigma \cdot K + \omega_1 \cdot L_1 + \omega_2 \cdot L_2$.

Per als membres de G2, cada fill té un cost de γ unitats del bé. A més, cada fill ha de pagar al seu progenitor (quan el fill és jove i el progenitor gran) una pensió de p unitats del bé.

Determina les expressions que estableixen la trajectòria d'acumulació del capital total i la dinàmica de la població total. A cada cas, identifica els estats estacionaris.