

Fills

1. Descripció de l'economia

- Hi ha un únic bé que no es pot produir ni acumular.
- En el període inicial neixen n_0 persones iguals.
- Hom viu tres períodes consecutius: infant, jove i adult.
- D'infant, tothom és econòmicament actiu: els infants no prenen cap decisió ni tenen dotació ni funcions d'utilitat.
- Tot jove decideix el nombre n de fills que neixeran en el mateix període.
- Tota persona jove té la funció d'utilitat $u = c \cdot c' \cdot n^\delta$, on és c el consum del bé de jove, c' el consum de gran, n el nombre de fills i $\delta > 0$ és una constant. Tot consumidor gran té la funció d'utilitat $u' = c'$.
- La dotació de bé de cada persona és de $w > 0$ unitats de jove i cap de gran.
- Cada progenitor ha de fer una despesa de $\gamma > 0$ unitats de bé per fill. La despesa es realitza en el mateix període en què es tenen els fills.
- Cada fill paga una pensió de $p > 0$ d'unitats de bé al seu progenitor quan el progenitor és gran. S'assumeix que $p < w$.
- Quantes persones neixen cada període? Quina és la dinàmica de la població total (extinció, estabilitat, creixement)?

2. Decisió de natalitat

- **Decisió de natalitat dels joves.** El problema de tot jove és

$$\begin{array}{ll} \text{maximitzar} & u = c \cdot c' \cdot n^\delta \\ \text{sotmès a} & c + \gamma \cdot n + p = w \\ & c' = p \cdot n. \end{array}$$

Introduïdes les dues restriccions en la funció objectiu, es tracta de

$$\text{maximitzar} \quad u = (w - \gamma \cdot n - p) \cdot (p \cdot n) \cdot n^\delta$$

o

$$\text{maximitzar} \quad u = w \cdot p \cdot n^{\delta+1} - \gamma \cdot p \cdot n^{\delta+2} - p^2 \cdot n^{\delta+1}.$$

Maximitzar respecte d' n requereix

$$0 = \frac{du}{dn} = w \cdot p \cdot (\delta + 1) \cdot n^\delta - \gamma \cdot p \cdot (\delta + 2) \cdot n^{\delta+1} - p^2 \cdot (\delta + 1) \cdot n^\delta.$$

Això és,

$$0 = p \cdot n^\delta \cdot (w \cdot (\delta + 1) - \gamma \cdot (\delta + 2) \cdot n - p \cdot (\delta + 1)).$$

Si $n \neq 0$,

$$0 = w \cdot (\delta + 1) - \gamma \cdot (\delta + 2) \cdot n - p \cdot (\delta + 1).$$

En resum,

$$n = \frac{(\delta + 1) \cdot (w - p)}{(\delta + 2) \cdot \gamma}.$$

Es comprova fàcilment que el nombre de fills depèn:

- positivament de la dotació $\left(\frac{dn}{dw} > 0\right)$;
- negativament de la pensió $\left(\frac{dn}{dp} < 0\right)$;
- negativament de la despesa en fills $\left(\frac{dn}{d\gamma} < 0\right)$; i
- positivament de la preferència pels fills $\left(\frac{dn}{d\delta} > 0\right)$.

3. Dinàmica demogràfica

En els següents càlculs no s'inclouen els infants (refeu els càlculs si s'hi afegeixen).

En el període inicial (sigui $t = 0$) hi ha, per definició, n_0 persones joves.

En $t = 1$ n'hi ha

$$n_1 = n_0 + n \cdot n_0$$

on n_0 és el nombre de grans i $n \cdot n_0$ el nombre de joves.

En $t = 2$ n'hi ha

$$n_2 = n \cdot n_0 + n \cdot (n \cdot n_0)$$

on $n \cdot n_0$ és el nombre de grans i $n^2 \cdot n_0$ el nombre de joves.

En $t = 3$ n'hi ha

$$n_3 = n^2 \cdot n_0 + n \cdot (n^2 \cdot n_0)$$

on $n^2 \cdot n_0$ és el nombre de grans i $n^3 \cdot n_0$ el nombre de joves.

Per inducció es conclou que en $t \geq 1$ n'hi ha

$$n_t = n^t \cdot n_0 + n \cdot (n^t \cdot n_0) = n_0 \cdot (n^t + n^{t+1})$$

on $n^t \cdot n_0$ és el nombre de grans i $n^{t+1} \cdot n_0$ el nombre de joves.

Hi ha tres casos.

- Si $n = 1$ (cada progenitor té únicament un fill), aleshores, per a tot $t \geq 1$, $n_t = 2 \cdot n_0$. Això significa que la població total roman constant cada període.
 - Si $n > 1$ (cada progenitor té més d'un fill), aleshores tant n^t com n^{t+1} creixen sense límit. Això significa que la població total creix exponencialment.
 - Si $n < 1$ (cada progenitor té menys d'un fill¹), aleshores tant n^t com n^{t+1} decreixen. Això significa que la població total decreix i tendeix cap a zero.
- **Exercici 1.** I si cada fill hagués de pagar p a cada persona gran del període (no només al seu progenitor)? En aquest cas, cada gran se'n beneficia dels fills que han decidit tenir els altres. Una possibilitat interessant a analitzar és si, i en quines condicions, aquest fet desincentiva la natalitat fins al punt que la població s'acaba extingint.

¹ Hi ha alguna interpretació que doni sentit a que el nombre de fills sigui inferior a 1?