

Producció amb rendiments creixents d'escala

1. Descripció de l'economia

- Hi ha un únic bé que es pot produir i acumular. Cada període neixen n persones, que viuen dos períodes consecutius.
- Tota persona jove té la funció d'utilitat $u = c \cdot (c')^\beta$, on $\beta > 0$, c és el consum del bé de jove i c' el consum de gran. Tota persona gran té la funció d'utilitat $u' = c'$.
- Hi ha dos factors de producció: 'treball' (el serveis de producció que proporcionen les persones) i 'capital' (bé acumulat que representa mitjans de producció físics). El treball no és acumulable: només es pot fer servir en el període en què se'n disposa. No hi ha mercat de préstecs del bé.
- Tota persona jove té una unitat de treball com a dotació. Les persones grans no tenen dotació de treball.
- Hi ha una funció de producció agregada que indica la quantitat total Y del bé que es produeix durant un període t a partir de la quantitat total de treball L disponible en t i la quantitat total de capital K disponible en t . La funció de producció en cada període és

$$Y = A \cdot K^\alpha \cdot L^\gamma$$

on α i γ són constants positives que satisfan $\alpha + \gamma > 1$ i A és una constant positiva. Aquesta desigualtat significa que la funció de producció presenta rendiments creixents d'escala: si els dos factors de producció augmenten en una determinada proporció, aleshores la producció augmenta en una proporció superior.

- La remuneració de cada factor de producció és la seva productivitat marginal ajustada per un paràmetre (amb rendiments creixents no hi ha prou producció per a remunerar segons la productivitat marginal). Específicament, per a una constant positiva donada $\tilde{\omega}$, el salari és

$$\omega = \tilde{\omega} \cdot PMg_L$$

i, per a una constant positiva donada $\tilde{\sigma}$, el preu del capital és

$$\sigma = \tilde{\sigma} \cdot PMg_K.$$

- El quocient dels paràmetres de distribució $\tilde{\omega}$ i $\tilde{\sigma}$ és una constant; això és, un paràmetre és un múltiple de l'altra: per a una certa constant positiva δ , $\tilde{\sigma} = \delta \cdot \tilde{\omega}$.
- Tota la producció es reparteix entre els dos factors de producció: les regles de distribució de la producció fan que no hi hagi ni dèficit ni superàvit de producció. Formalment,

$$Y = \omega \cdot L + \sigma \cdot K.$$

2. Anàlisi

- **Decisions d'acumulació de capital dels joves.** Tot jove s'enfronta al problema de

$$\begin{array}{lll} \text{maximitzar} & u = c \cdot (c')^\beta & \\ \text{sotmès a} & c + k' = 1 \cdot \omega & \text{(restricció de jove)} \\ & c' = \sigma' \cdot k' & \text{(restricció de gran)} \end{array}$$

on c és el consum de jove, c' és el consum de gran, k' és el bé acumulat de jove en forma de capital però que es fa servir de gran, ω és el salari (el preu del factor treball) de jove i σ' és el preu del factor capital de grans.

El problema es pot resoldre directament introduint les restriccions pressupostàries en la funció utilitat. Així, tot jove vol

$$\text{maximitzar } u = (\omega - k') \cdot (\sigma' \cdot k')^\beta \quad \text{respecte de } k'.$$

Segons la condició de primer ordre,

$$0 = \frac{du}{dk'} = -(\sigma' \cdot k')^\beta + (\omega - k') \cdot (\sigma')^\beta \cdot \beta \cdot (k')^{\beta-1}$$

o

$$(k')^\beta = (\omega - k') \cdot \beta \cdot \frac{(k')^{\beta-1}}{k'}$$

o

$$k' = (\omega - k') \cdot \beta$$

o

$$\boxed{k' = \frac{\omega \cdot \beta}{1 + \beta}} \quad (1)$$

• **Preu del factor treball.** La productivitat marginal del treball es defineix com la derivada de la funció de producció agregada respecte del treball:

$$PMg_L = \frac{dY}{dL} = \frac{d(A \cdot K^\alpha \cdot L^\gamma)}{dL} = A \cdot K^\alpha \cdot \frac{d(L^\gamma)}{dL} = \gamma \cdot A \cdot K^\alpha \cdot L^{\gamma-1}.$$

La remuneració ω del treball serà

$$\omega = \tilde{\omega} \cdot PMg_L = \tilde{\omega} \cdot \gamma \cdot A \cdot K^\alpha \cdot L^{\gamma-1}.$$

• **Quantitat total de factors cada període.** Cada període hi ha n persones joves i n persones grans. Això fa que la quantitat total de factor treball cada període sigui

$$n \cdot 1 + n \cdot 0 = n.$$

D'aquí es dedueix que $L' = L$: cada període hi ha la mateixa quantitat de factor treball.

Amb relació al capital, els grans són els únics que n'aporten cada període. Com a resultat, la quantitat total K de factor capital existent en un període donat és $n \cdot k$.

- **Càlculs del preu del factor treball.** Segons la fórmula $\omega = \tilde{\omega} \cdot \gamma \cdot A \cdot K^\alpha \cdot L^{\gamma-1}$ del salari,

$$\omega = \tilde{\omega} \cdot \gamma \cdot A \cdot K^\alpha \cdot L^{\gamma-1} = \tilde{\omega} \cdot \gamma \cdot A \cdot (n \cdot k)^\alpha \cdot (n)^{\gamma-1} = \tilde{\omega} \cdot \gamma \cdot A \cdot n^{\alpha+\gamma-1} \cdot k^\alpha$$

on $\alpha + \gamma - 1 > 0$.

- **Determinació del capital que acumula cada jove.** Aplicant la fórmula anterior i (1),

$$k' = \frac{\beta}{1+\beta} \cdot \omega = \frac{\beta \cdot \tilde{\omega} \cdot \gamma \cdot A \cdot n^{\alpha+\gamma-1}}{1+\beta} \cdot k^\alpha.$$

- **És tot plegat consistent?** En cap dels càlculs anteriors no ha intervingut el preu del capital σ (això és degut a què els grans no tenen cap font exògena de bé, de manera que els joves acumularan capital amb independència del preu futur del capital). A més, tota l'anàlisi ha estat microeconòmica (des del punt de vista dels joves). La pregunta és si hi ha res que garanteixi que tot plegat és macroeconòmicament factible.

La resposta passa per assegurar-se del compliment de la condició $Y = \omega \cdot L + \sigma \cdot K$. En concret, cal que

$$A \cdot K^\alpha \cdot L^\gamma = \tilde{\omega} \cdot PMg_L \cdot L + \delta \cdot \tilde{\omega} \cdot PMg_K \cdot K$$

o

$$A \cdot K^\alpha \cdot L^\gamma = \tilde{\omega} \cdot (\gamma \cdot A \cdot K^\alpha \cdot L^{\gamma-1}) \cdot L + \delta \cdot \tilde{\omega} \cdot (\alpha \cdot A \cdot K^{\alpha-1} \cdot L^\gamma) \cdot K$$

o

$$K^\alpha \cdot L^\gamma = \tilde{\omega} \cdot (\gamma \cdot K^\alpha \cdot L^\gamma) + \delta \cdot \tilde{\omega} \cdot (\alpha \cdot K^{\alpha-1} \cdot L^\gamma) \cdot K$$

o

$$1 = \tilde{\omega} \cdot \gamma + \delta \cdot \tilde{\omega} \cdot \alpha$$

o

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{\gamma + \delta \cdot \alpha}.$$

Això fa que

$$k' = \frac{\beta \cdot \gamma \cdot A \cdot n^{\alpha+\gamma-1}}{(1+\beta) \cdot (\gamma + \delta \cdot \alpha)} \cdot k^\alpha.$$

És de destacar que com més gran δ (com més s'ajusti la remuneració a favor del capital) menor és l'acumulació de capital. La raó és simple: com és elevat δ , menor és el paràmetre $\tilde{\omega}$ d'ajustament a l'alça de la productivitat del treball (com s'ha calculat, $\tilde{\omega} = (\gamma + \delta \cdot \alpha)^{-1}$); com més petit $\tilde{\omega}$, més baix el salari ω ; i com menor sigui el salari, menys acumulació (ja que $k' = \omega \cdot \beta / (1 + \beta)$).

- **Exercici.** I si cada persona gran tingués $x > 0$ unitats de factor treball?