

Producció amb rendiments decreixents d'escala

1. Descripció de l'economia

- Hi ha un únic bé que es pot produir i acumular. Cada període neixen n persones, que viuen dos períodes consecutius.
- Tota persona jove té la funció d'utilitat $u = c \cdot (c')^\beta$, on $\beta > 0$, c és el consum del bé de jove i c' el consum de gran. Tota persona gran té la funció d'utilitat $u' = c'$.
- Hi ha dos factors de producció: 'treball' (el serveis de producció que proporcionen les persones) i 'capital' (bé acumulat que representa mitjans de producció físics). El treball no és acumulable: només es pot fer servir en el període en què se'n disposa. No hi ha mercat de préstecs del bé.
- Tota persona jove té una unitat de treball com a dotació. Les persones grans no tenen dotació de treball.
- Hi ha una funció de producció agregada que indica la quantitat total Y del bé que es produeix durant un període t a partir de la quantitat total de treball L disponible en t i la quantitat total de capital K disponible en t . La funció de producció en cada període és

$$Y = A \cdot K^\alpha \cdot L^\gamma$$

on α i γ són constants positives que satisfan $\alpha + \gamma < 1$ i A és una constant positiva. Aquesta desigualtat significa que la funció de producció presenta rendiments decreixents d'escala: si els dos factors de producció augmenten en una determinada proporció, aleshores la producció augmenta en una proporció inferior.

- La remuneració de cada factor de producció és la seva productivitat marginal.
- Hi ha un govern que se n'emporta la producció no repartida entre els factors de producció. Cada període el govern distribueix igualitàriament entre els grans del període tota la producció que se n'emporta.

2. Anàlisi

- **Decisions d'acumulació de capital dels joves.** Tot jove s'enfronta al problema de

$$\begin{array}{lll} \text{maximitzar} & u = c \cdot (c')^\beta & \\ \text{sotmès a} & c + k' = 1 \cdot \omega & \text{(restricció de jove)} \\ & c' = \sigma' \cdot k' + \tau & \text{(restricció de gran)} \end{array}$$

on c és el consum de jove, c' és el consum de gran, k' és el bé acumulat de jove en forma de capital però que es fa servir de gran, ω és el salari (el preu del factor treball) de jove, σ' és el preu del factor capital de grans i τ és la transferència que la persona gran rep del govern. S'assumeix que hom pren ω , σ' i τ com a dades (en concret, hom ignora com es determina τ).

El problema es pot resoldre directament introduint les restriccions pressupostàries en la funció utilitat. Així, tot jove vol

$$\text{maximitzar } u = (\omega - k') \cdot (\sigma' \cdot k' + \tau)^\beta \quad \text{respecte de } k'.$$

Segons la condició de primer ordre,

$$0 = \frac{du}{dk'} = -(\sigma' \cdot k' + \tau)^\beta + (\omega - k') \cdot \beta \cdot \sigma' \cdot (\sigma' \cdot k' + \tau)^{\beta-1}$$

o

$$(\sigma' \cdot k' + \tau)^\beta = (\omega - k') \cdot \beta \cdot \sigma' \cdot \frac{(\sigma' \cdot k' + \tau)^\beta}{\sigma' \cdot k' + \tau}$$

o

$$\sigma' \cdot k' + \tau = (\omega - k') \cdot \beta \cdot \sigma'$$

o

$$k' = \frac{\omega \cdot \sigma' \cdot \beta - \tau}{\sigma' \cdot (1 + \beta)}. \quad (1)$$

Atès que en el model l'acumulació de capital no pot ser negativa, es podria interpretar que, si la transferència és suficientment gran ($\tau > \omega \cdot \sigma' \cdot \beta$), aleshores $k' = 0$. En realitat, de la condició $\sigma' \cdot k' + \tau = (\omega - k') \cdot \beta \cdot \sigma'$ es conclou que simplement cal $\omega - k' > 0$ per a assegurar $k' > 0$. En concret, tenir

$$\omega > k'$$

implica que

$$\omega > \frac{\omega \cdot \sigma' \cdot \beta - \tau}{\sigma' \cdot (1 + \beta)}$$

se satisfà si

$$\omega \cdot \sigma' \cdot (1 + \beta) > \omega \cdot \sigma' \cdot \beta - \tau$$

que equival a

$$\omega \cdot \sigma' + \tau > 0$$

desigualtat que és certa.

En resum, la fórmula (1) del capital k' és vàlida si $\omega > k'$, que és una condició implícita en el model atès que un jove no pot acumular més que el salari que rep.

• **Preu del factor treball.** La productivitat marginal del treball es defineix com la derivada de la funció de producció agregada respecte del treball:

$$\omega = PMg_L = \frac{dY}{dL} = \frac{d(A \cdot K^\alpha \cdot L^\gamma)}{dL} = A \cdot K^\alpha \cdot \frac{d(L^\gamma)}{dL} = \gamma \cdot A \cdot K^\alpha \cdot L^{\gamma-1}. \quad (2)$$

Aquest resultat és vàlid cada període.

• **Preu del factor capital.** La productivitat marginal del capital es defineix com la derivada de la funció de producció de l'economia respecte del capital:

$$\sigma = PMg_K = \frac{dY}{dK} = \frac{d(A \cdot K^\alpha \cdot L^\gamma)}{dK} = A \cdot L^\gamma \cdot \frac{d(K^\alpha)}{dK} = \alpha \cdot A \cdot L^\gamma \cdot K^{\alpha-1}. \quad (3)$$

Aquest resultat és vàlid cada període.

• **Producció assignada al govern.** Cada període, la part de la producció Y que rep el factor treball és

$$\omega \cdot L = (\gamma \cdot A \cdot K^\alpha \cdot L^{\gamma-1}) \cdot L = \gamma \cdot A \cdot K^\alpha \cdot L^\gamma = \gamma \cdot Y.$$

Cada període, la part de la producció Y que rep el factor capital és

$$\sigma \cdot K = (\alpha \cdot A \cdot L^\gamma \cdot K^{\alpha-1}) \cdot K = \alpha \cdot A \cdot K^\alpha \cdot L^\gamma = \alpha \cdot Y.$$

Per consegüent, la producció que s'assigna als dos factors és (tot recordant que $\gamma + \alpha < 1$)

$$\omega \cdot L + \sigma \cdot K = \gamma \cdot Y + \alpha \cdot Y = (\gamma + \alpha) \cdot Y < Y.$$

De tot plegat es dedueix que el govern rep

$$Y - (\omega \cdot L + \sigma \cdot K) = Y - (\alpha + \gamma) \cdot Y = (1 - \alpha - \gamma) \cdot Y.$$

• **Quantitat total de factors cada període.** Cada període hi ha n persones joves i n persones grans. Això fa que la quantitat total de factor treball cada període sigui

$$n \cdot 1 + n \cdot 0 = n.$$

D'aquí es dedueix que $L' = L$: cada període hi ha la mateixa quantitat de factor treball.

Amb relació al capital, els grans són els únics que n'aporten cada període. Com a resultat, la quantitat total K de factor capital existent en un període donat és $n \cdot k$.

• **Càlculs dels preus dels factors de producció.** Segons la fórmula (2) de retribució del salari,

$$\omega = \gamma \cdot A \cdot K^\alpha \cdot L^{\gamma-1} = \gamma \cdot A \cdot (n \cdot k)^\alpha \cdot (n)^{\gamma-1} = \gamma \cdot A \cdot n^{\alpha+\gamma-1} \cdot k^\alpha$$

on $\alpha + \gamma - 1 < 0$. D'altra banda, segons (3),

$$\sigma' = \alpha \cdot A \cdot L'^\gamma \cdot K'^{\alpha-1} = \alpha \cdot A \cdot n^\gamma \cdot (n \cdot k')^{\alpha-1} = \alpha \cdot A \cdot n^{\alpha+\gamma-1} \cdot k'^{\alpha-1}.$$

• **Transferència a cada gran.** Atès que el govern rep cada període $(1 - \alpha - \gamma) \cdot Y$, es conclou que la transferència τ assignada cada període a cadascuna de les n persones grans és

$$\tau = \frac{(1 - \alpha - \gamma) \cdot Y}{n}.$$

Com que cada període hi ha $2n$ persones, la producció per càpita és $Y/2n$. En conseqüència, la transferència seria $2 \cdot (1 - \alpha - \gamma)$ vegades la producció per càpita. Per exemple, si $\alpha = \gamma = 1/8$, llavors la transferència seria 1,5 vegades la producció per càpita; i si $\alpha = 1/2$ i $\gamma = 1/4$, llavors la transferència seria 0,5 vegades la producció per càpita.

Segons la funció de producció agregada, la producció cada període és

$$Y = A \cdot K^\alpha \cdot L^\gamma = A \cdot (n \cdot k)^\alpha \cdot n^\gamma = A \cdot n^{\alpha+\gamma} \cdot k^\alpha.$$

Així doncs,

$$\tau = \frac{(1 - \alpha - \gamma) \cdot Y}{n} = (1 - \alpha - \gamma) \cdot A \cdot n^{\alpha+\gamma-1} \cdot k^\alpha. \quad (4)$$

• **Determinació del capital que acumula cada jove.** Aplicant les fórmules (1) i (4),

$$\begin{aligned} k' &= \frac{\omega \cdot \sigma' \cdot \beta - \tau}{\sigma' \cdot (1 + \beta)} = \frac{\omega \cdot \beta}{1 + \beta} - \frac{\tau}{\sigma' \cdot (1 + \beta)} = \\ &= \frac{\beta \cdot \gamma \cdot A \cdot n^{\alpha+\gamma-1}}{1 + \beta} \cdot k^\alpha - \frac{(1 - \alpha - \gamma) \cdot A \cdot n^{\alpha+\gamma-1} \cdot k^\alpha}{\alpha \cdot A \cdot n^{\alpha+\gamma-1} \cdot k'^{\alpha-1} \cdot (1 + \beta)} = \\ &= \frac{\beta \cdot \gamma \cdot A \cdot n^{\alpha+\gamma-1}}{1 + \beta} \cdot k^\alpha - \frac{1 - \alpha - \gamma}{\alpha \cdot (1 + \beta)} \cdot k^\alpha \cdot k'^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Tot definint les constants

$$C = \frac{\beta \cdot \gamma \cdot A \cdot n^{\alpha+\gamma-1}}{1 + \beta}$$

i

$$D = \frac{1 - \alpha - \gamma}{\alpha \cdot (1 + \beta)}$$

tot plegat es resumeix en l'expressió

$$k' = C \cdot k^\alpha - D \cdot k^\alpha \cdot k'^{1-\alpha}$$

o

$$k' + D \cdot k^\alpha \cdot k'^{1-\alpha} = C \cdot k^\alpha$$

o

$$k' + D \cdot \left(\frac{k}{k'}\right)^\alpha \cdot k' = C \cdot k^\alpha$$

o

$$k' \cdot \left(1 + D \cdot \left(\frac{k}{k'}\right)^\alpha\right) = C \cdot k^\alpha. \quad (5)$$

L'expressió (5) defineix implícitament la trajectòria d'acumulació del capital de cada jove (o de cada treballador). Derivant l'expressió implícitament (tractant k' com a funció de k) es pot establir si (5)

defineix una relació creixent o decreixent (o d'altra mena) entre el capital k que un jove acumula en un període i el capital k' que acumula un jove del període següent. En particular, considerant la versió

$$k' + D \cdot k^\alpha \cdot k'^{1-\alpha} = C \cdot k^\alpha$$

de (5) la derivada implícita comporta

$$\frac{d(k' + D \cdot k^\alpha \cdot k'^{1-\alpha})}{dk} = \frac{d(C \cdot k^\alpha)}{dk}.$$

D'una banda,

$$\begin{aligned} \frac{d(k' + D \cdot k^\alpha \cdot k'^{1-\alpha})}{dk} &= \frac{d(k')}{dk} + \frac{d(D \cdot k^\alpha \cdot k'^{1-\alpha})}{dk} = \frac{dk'}{dk} + D \cdot \frac{d(k^\alpha \cdot k'^{1-\alpha})}{dk} = \\ &= \frac{dk'}{dk} + D \cdot \left(\frac{d(k^\alpha)}{dk} \cdot k'^{1-\alpha} + k^\alpha \cdot \frac{d(k'^{1-\alpha})}{dk} \right) = \\ &= \frac{dk'}{dk} + D \cdot \left(\alpha \cdot k^{\alpha-1} \cdot k'^{1-\alpha} + k^\alpha \cdot (1-\alpha) \cdot k'^{-\alpha} \cdot \frac{dk'}{dk} \right). \end{aligned}$$

De l'altra,

$$\frac{d(C \cdot k^\alpha)}{dk} = C \cdot \frac{d(k^\alpha)}{dk} = C \cdot \alpha \cdot k^{\alpha-1}.$$

Per tant,

$$\frac{dk'}{dk} + D \cdot \left(\alpha \cdot k^{\alpha-1} \cdot k'^{1-\alpha} + k^\alpha \cdot (1-\alpha) \cdot k'^{-\alpha} \cdot \frac{dk'}{dk} \right) = C \cdot \alpha \cdot k^{\alpha-1}$$

o

$$\frac{dk'}{dk} \cdot \left(1 + D \cdot (1-\alpha) \cdot \left(\frac{k'}{k} \right)^\alpha \right) = \alpha \cdot k^{\alpha-1} \cdot (C + D \cdot k'^{1-\alpha})$$

o

$$\frac{dk'}{dk} = \frac{\alpha \cdot k^{\alpha-1} \cdot (C + D \cdot k'^{1-\alpha})}{\left(1 + D \cdot (1-\alpha) \cdot \left(\frac{k'}{k} \right)^\alpha \right)}$$

que és sempre un valor positiu (ja que $C > 0$, $D > 0$ i $\alpha < 1$). En suma, la funció entre k i k' expressada en (5) és una funció creixent: un augment de k implica un augment de k' . Per a determinar la concavitat o convexitat de la funció caldria tornar a derivar implícitament (es deixa com a exercici).

• **Determinació dels estats estacionaris.** Tot i l'interès de conèixer la trajectòria del capital per jove, és més interessant determinar els estats estacionaris de la trajectòria (qualsevol predicció del capital que acumula un jove que no fos un valor d'estat estacionari no seria una predicció acurada, atès que un període després la predicció esdevindria errònia).

Els estats estacionaris de la trajectòria definida per (5) s'obtenen fent $k = k'$ (geomètricament, en l'espai (k, k') , serien les interseccions entre la funció definida per (5) i la diagonal principal).

Tot definint $\bar{k} = k = k'$, (5) esdevé

$$\bar{k} \cdot \left(1 + D \cdot \left(\frac{\bar{k}}{\bar{k}}\right)^\alpha\right) = C \cdot \bar{k}^\alpha$$

o

$$\bar{k} \cdot (1 + D) = C \cdot \bar{k}^\alpha$$

o

$$\bar{k}^{1-\alpha} = \frac{C}{1 + D}$$

o

$$\bar{k} = \left(\frac{C}{1 + D}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

o

$$\bar{k} = \left(\frac{1}{1 + \frac{D}{C}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

on

$$\frac{D}{C} = \left(\frac{1 - \alpha - \gamma}{A \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \gamma}\right) \cdot n^{1-\alpha-\gamma}.$$

Es deixa com a exercici calcular l'efecte sobre $\bar{k}$:

- d'una variació en la preferència temporal β dels joves;
- d'una variació en el nivell tecnològic (o productivitat total dels factors) A ;
- d'una variació en l'elasticitat α de la producció respecte del capital (comprova que $\alpha = \frac{dY/Y}{dK/K} = \frac{dY}{dK} \cdot \frac{K}{Y} = PMg_K \cdot \frac{K}{Y}$);
- d'una variació en l'elasticitat γ de la producció respecte del treball (comprova que $\gamma = \frac{dY/Y}{dL/L} = \frac{dY}{dL} \cdot \frac{L}{Y} = PMg_L \cdot \frac{L}{Y}$).

3. Sense govern i només el mercat de treball competitiu

Quan els rendiments d'escala no són constants la producció no coincideix amb el seu repartiment competitiu entre els factors de producció. Formalment, amb $\omega = PMg_L$ i $\sigma = PMg_K$,

$$Y \neq \omega \cdot L + \sigma \cdot K.$$

Si els rendiments són decreixents, $Y > \omega \cdot L + \sigma \cdot K$; si creixents, $Y < \omega \cdot L + \sigma \cdot K$.

En l'exemple dels apartats anteriors (on els rendiments d'escala eren decreixents) s'ha assumit que la diferència $Y - (\omega \cdot L + \sigma \cdot K)$ se l'emportava el govern. Aquest apartat suggereix una alternativa: el factor capital s'emporta la diferència (l'apartat següent considera el cas simètric: se l'emporta el factor treball).

En aquest cas, (1) continua sent una fórmula vàlida, només que ara $\tau = 0$:

$$k' = \frac{\beta}{1 + \beta} \cdot \omega$$

Això fa que, per a cada jove, el preu del capital en el futur sigui irrelevant: l'únic que importa en decidir l'acumulació de bé (la seva preferència temporal β a banda) és el salari corrent ω . En concret, per (2):

$$\omega = PMg_L = \gamma \cdot A \cdot K^\alpha \cdot L^{\gamma-1} = \gamma \cdot A \cdot (n \cdot k)^\alpha \cdot n^{\gamma-1} = \gamma \cdot A \cdot n^{\alpha+\gamma-1} \cdot k^\alpha.$$

Així,

$$k' = \frac{A \cdot \beta \cdot \gamma}{(1 + \beta) \cdot n^{1-\alpha-\gamma}} \cdot k^\alpha. \quad (6)$$

La funció és similar a la que resultaria si els rendiments fossin constants ($\alpha + \gamma = 1$) i els mercats competitius: l'única diferència és la constant que acompanya k^α .

4. Sense govern i només el mercat de capital competitiu

Encara val l'expressió

$$k' = \frac{\beta}{1 + \beta} \cdot \omega$$

però ara el factor treball se n'emporta tot el que el mercat competitiu no assigna al capital:

$$\omega \cdot L = Y - PMg_K \cdot K.$$

En conseqüència, emprant (3),

$$\omega \cdot L = A \cdot K^\alpha \cdot L^\gamma - (\alpha \cdot A \cdot L^\gamma \cdot K^{\alpha-1}) \cdot K$$

o

$$\omega = A \cdot K^\alpha \cdot L^{\gamma-1} - \alpha \cdot A \cdot L^{\gamma-1} \cdot K^\alpha$$

o

$$\omega = A \cdot (nk)^\alpha \cdot n^{\gamma-1} - \alpha \cdot A \cdot n^{\gamma-1} \cdot (nk)^\alpha$$

o

$$\omega = A \cdot n^{\alpha+\gamma-1} \cdot k^\alpha - A \cdot \alpha \cdot n^{\alpha+\gamma-1} \cdot k^\alpha$$

o

$$\omega = A \cdot (1 + \alpha) \cdot n^{\alpha+\gamma-1} \cdot k^\alpha$$

o

$$\omega = \frac{A \cdot (1 + \alpha)}{n^{1-\alpha-\gamma}} \cdot k^\alpha.$$

Emprant $k' = \frac{\beta}{1+\beta} \cdot \omega$ se segueix que

$$k' = \frac{A \cdot \beta \cdot (1 + \alpha)}{(1 + \beta) \cdot n^{1-\alpha-\gamma}} \cdot k^\alpha. \quad (7)$$

La diferència respecte del cas anterior és que ara $1 + \alpha$ (el paràmetre del factor competitiu ara: el capital) reemplaça γ (el paràmetre del factor competitiu aleshores: el treball).

Si $1 + \alpha > \gamma$, llavors la gràfica que representa (7) queda per damunt de la que representa (6), atès que el mateix valor de k genera un valor de k' més gran segons (7) que no pas segons (6). Per aquest motiu, el valor (positiu) de k d'estat estacionari serà superior segons (7).

Remarca: seria d'esperar que si l'elasticitat de la producció del capital és suficientment gran (canvis proporcionals en el capital causen increments proporcionals suficientment grans en la producció) aleshores és preferible per a l'acumulació de capital que el mercat que hagi de ser competitiu sigui el de capital?

De fet, els resultats anteriors suggereixen que el més favorable per a l'acumulació de capital és fer competitiu el mercat del factor que té una incidència superior (en termes d'elasticitats) en la producció i permetre que l'altre factor 'exploti' el factor respecte del qual la producció és més sensible (tot apropiant-se de la producció sobrera un cop satisfetes les remuneracions competitives).