

2. Paretoineficiència de l'equilibri i transferències

1. L'assignació de consum del model bàsic no és Paretoeficient

• **Paretoineficiència.** En el model bàsic del document 1, una assignació es pot representar per un vector de consums $C = (c_1, c'_1, c_2, c'_2)$ que indiquen la quantitat de bé que cada persona típica de cada grup consumeix de jove i de gran. Aquesta assignació és Paretoeficient si no existeix cap altra assignació $\tilde{C} = (\tilde{c}_1, \tilde{c}'_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}'_2)$ tal que

$$u_1(\tilde{c}_1, \tilde{c}'_1) > u_1(c_1, c'_1),$$

$$u_2(\tilde{c}_2, \tilde{c}'_2) > u_2(c_2, c'_2),$$

$$u'_1(\tilde{c}'_1) > u'_1(c'_1) \text{ i}$$

$$u'_2(\tilde{c}'_2) > u'_2(c'_2).$$

La assignació alternativa $\tilde{C}$ atorgaria a tothom més utilitat que l'assignació de partida C .

Simètricament, l'assignació (c_1, c'_1, c_2, c'_2) és Pareto ineficient si existeix alguna altra assignació $(\tilde{c}_1, \tilde{c}'_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}'_2)$ que satisfà les quatre desigualtats anteriors.

• **Paretoineficiència de l'assignació de consum d'equilibri.** L'assignació de consum C d'equilibri en el model bàsic del document 1 és

$$(c_1, c'_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \text{ i } (c_2, c'_2) = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{3}\right).$$

L'assignació de consum $\tilde{C}$ definida a continuació demostra que la d'equilibri és Paretoineficient. L'assignació $\tilde{C}$ s'obté de la d'equilibri fent que cada jove lliuri $\varepsilon > 0$ unitats del bé a una persona gran diferent (amb ε suficientment petit). Específicament, $\tilde{C}$ és l'assignació tal que

$$(\tilde{c}_1, \tilde{c}'_1) = \left(\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{3} + \varepsilon\right)$$

i

$$(\tilde{c}_2, \tilde{c}'_2) = \left(\frac{5}{2} - \varepsilon, \frac{5}{3} + \varepsilon\right).$$

En l'equilibri C , la utilitat de tot jove de G1 és

$$u_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

i la de tot jove de G2 és

$$u_2\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{3}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{25}{6}.$$

En $\tilde{C}$, les utilitats són

$$u_1\left(\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{3} + \varepsilon\right) = \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \cdot \left(\frac{1}{3} + \varepsilon\right) = \frac{1}{6} + \varepsilon \cdot \left(\frac{1}{6} - \varepsilon\right)$$

per a cada membre jove de G1 i

$$u_2\left(\frac{5}{2} - \varepsilon, \frac{5}{3} + \varepsilon\right) = \left(\frac{5}{2} - \varepsilon\right) \cdot \left(\frac{5}{3} + \varepsilon\right) = \frac{25}{6} + \varepsilon \cdot \left(\frac{5}{6} - \varepsilon\right)$$

per a cada membre jove de G2.

En conseqüència, per a què la utilitat de cada membre jove de G1 sigui més gran en $\tilde{C}$ que en C cal que $\varepsilon \cdot \left(\frac{1}{6} - \varepsilon\right) > 0$; això és, cal que

$$\varepsilon < \frac{1}{6}.$$

De manera anàloga, per a què la utilitat de cada membre jove de G2 sigui superior en $\tilde{C}$ que en C cal que $\varepsilon \cdot \left(\frac{5}{6} - \varepsilon\right) > 0$; és a dir, cal que

$$\varepsilon < \frac{5}{6}.$$

En suma, la transferència de joves a grans de qualsevol $\varepsilon < \frac{1}{6}$ fa que tots els joves tinguin més utilitat en $\tilde{C}$ que en C .

En relació amb els grans, en C , en cada període un membre gran de G1 consumeix $\frac{1}{3}$ unitats del bé, en tant que, en $\tilde{C}$, en consumeix $\frac{1}{3} + \varepsilon$.

Respecte dels membres grans de G2, cadascun d'ells consumeix $\frac{5}{3}$ en C i $\frac{5}{3} + \varepsilon$ en $\tilde{C}$.

La conclusió és que tots els consumidors grans consumeixen més (i, així, obtenen més utilitat) en $\tilde{C}$ que en C .

Tot plegat demostra que C no és Paretoeficient: hi ha una altra assignació $\tilde{C}$ amb la qual tots els individus tenen més utilitat que en C en tots els seus períodes de vida.

• **Per què l'equilibri no és Paretoeficient?** Què passaria si l'economia existís només per un període finit de temps? En aquest cas la redistribució que crea l'assignació $\tilde{C}$ no seria viable: en l'últim període els joves perdrien fent la transferència ε als grans i no podrien ser compensats en el període següent amb la recepció d' ε perquè no n'hi ha cap més període.

Això suggereix que la causa de la ineficiència està relacionada amb un doblet infinit: la infinita durada de l'economia i l'infinit nombre de persones. El mecanisme de transferències rere $\tilde{C}$ és possible perquè cada jove que sacrifica part del seu consum ara transferint-lo a persones grans pot ser compensat en el futur per algun altre jove.

[La paradoxa de l'hotel infinit il·lustra que les intuïcions en un món finit no sempre són vàlides en un món infinit. En un hotel finit complet no hi ha espai per a un altre client. En canvi, en un hotel infinit (comptable infinit) complet hi ha lloc per a un nou client: per a tota habitació $h \geq 1$, es mou

el client que ocupa h a l'habitació $h + 1$, de manera que no es fa fora de l'hotel a ningú i el nou client pot ocupar l'habitació 1.]

2. Transferències òptimes

- **Pensions de repartiment.** La demostració anterior de la Paretoineficiència de l'assignació d'equilibri implícitament involucra un sistema de pensions de repartiment: partint de l'assignació d'equilibri, hom pot millorar si cada jove transfereix a un gran una certa quantitat $\varepsilon < \frac{1}{6}$ de bé.

- **Optimalitat.** Una qüestió que suggereix el mecanisme de transferències que ha demostrat la Paretoineficiència del resultat dels mercats és trobar una transferència que sigui òptima en algun sentit. Si l'objectiu que pretén la transferència és superar la ineficiència, aleshores hi ha un continu de transferències òptimes: totes amb $\varepsilon < \frac{1}{6}$.

Un objectiu alternatiu, més exigent, seria que la transferència maximitzi alguna funció de benestar social. Un candidat natural a funció de benestar social és la suma (potser ponderada) de la utilitat de tothom.

Les funcions d'utilitat a continuació són les que s'obtenen un cop aplicada la transferència/impost $\varepsilon > 0$,

$$u_1^\varepsilon = (c_1 - \varepsilon) \cdot (c'_1 + \varepsilon)$$

$$u_2^\varepsilon = (c_2 - \varepsilon) \cdot (c'_2 + \varepsilon)$$

$$u_1'^\varepsilon = c'_1 + \varepsilon$$

$$u_2'^\varepsilon = c'_2 + \varepsilon.$$

Una possible funció de benestar social és la suma de totes les utilitats dels individus d'un mateix període. Aleshores es tractaria de trobar els valors d' ε que maximitzen $u_1^\varepsilon + u_2^\varepsilon + u_1'^\varepsilon + u_2'^\varepsilon$ (atès que la funció d'utilitat d'una persona gran en el període t coincideix amb la que tindrà en $t + 1$ un jove de t del mateix grup que el gran). La resolució d'aquest problema es deixa com a exercici.

Es resol a continuació un de similar: triar ε per a maximitzar la suma de la utilitat dels joves assumint que la transferència ε s'aplica sobre l'assignació de consum i que la utilitat després de la transferència no empitjora la utilitat de l'assignació de consum d'equilibri. Això és, es tracta de

$$\begin{aligned} &\text{maximitzar} && u_1^\varepsilon + u_2^\varepsilon && (\text{respecte d}'\varepsilon) \\ &\text{sofmès a} && u_1^\varepsilon \geq u_1(c_1, c'_1) = u_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6} \\ &&& u_2^\varepsilon \geq u_2(c_2, c'_2) = u_2\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{3}\right) = \frac{25}{6}. \end{aligned}$$

Introduint les restriccions a la funció objectiu, es tractaria de maximitzar respecte d' ε

$$u_1^\varepsilon + u_2^\varepsilon = \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \varepsilon\right) + \left(\frac{5}{2} - \varepsilon\right) \cdot \left(\frac{5}{3} - \varepsilon\right) = \frac{13}{3} + \varepsilon - 2 \cdot \varepsilon^2.$$

Clarament,

$$0 = \frac{d(u_1^\varepsilon + u_2^\varepsilon)}{d\varepsilon} = 1 - 4 \cdot \varepsilon .$$

De l'anterior es dedueix que $\varepsilon = 1/4$ seria candidat a maximitzar $u_1^\varepsilon + u_2^\varepsilon$. El problema és que $\varepsilon = 1/4$ no respecta la tercera restricció $u_1^\varepsilon \geq u_1(c_1, c'_1) = \frac{1}{6}$, ja que $u_1^\varepsilon = \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \varepsilon\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12} < \frac{1}{6}$ quan $\varepsilon = 1/4$.

En suma, el valor òptim d' ε seria el més proper a $\varepsilon = 1/4$ admissible (per l'esquerra): $\varepsilon = 1/6$ (el valor més gran d' ε que, en §1, feia l'assignació de consum ineficient).