

4. Manipulació del mercat de préstecs per mitjà de la destrucció de dotació

1. Descripció de l'economia

- Hi ha un únic bé que no es pot produir ni acumular.
- Cada període neixen dos grups d'individus, G1 (amb m membres) i G2 (amb n membres).
- Hom viu dos períodes consecutius.
- Tot consumidor jove té la funció d'utilitat $u = c \cdot c'$, on és c el consum del bé de jove i c' el consum de gran. Tot consumidor gran té la funció d'utilitat $u' = c'$.
- La dotació de cada membre de G1 és $(1, 0)$: una unitat de jove i cap de gran. La dotació de cada membre de G2 és $(2, 2)$: dues unitats de jove i dues de gran.
- En el document 3, es considerava la possibilitat que els prestadors retinguessin bé i en prestessin menys que la solució maximitzadora d'utilitat obtinguda assumint comportament competitiu. Ara es considera una alternativa més dràstica de manipulació: destruir bé, no redigir el seu ús (de préstec a consum).
- Específicament, els prestadors (els joves de G1) acorden forçar un augment de la taxa d'interès en el mercat de préstecs comprometent-se cada prestador a destruir la quantitat $\varepsilon > 0$ de la seva dotació de jove.

2. Decisions

- **Decisions dels joves de G1.** El problema de tot jove de G1 és

$$\begin{array}{ll} \text{maximitzar} & u_1 = c_1 \cdot c'_1 \\ \text{sotmès a} & c_1 + l_1 = 1 - \varepsilon \\ & c'_1 = R \cdot l_1. \end{array}$$

Introduïdes les dues restriccions en la funció objectiu, es tracta de

$$\text{maximitzar} \quad u_1 = (1 - l_1 - \varepsilon) \cdot R \cdot l_1.$$

Maximitzar respecte d' l_1 requereix

$$0 = \frac{du_1}{dl_1} = R \cdot (1 - 2l_1 - \varepsilon).$$

Això és,

$$\boxed{l_1 = \frac{1 - \varepsilon}{2}}. \quad (1)$$

- **Decisions dels joves de G2.** El problema de tot jove de G2 és

$$\begin{aligned} \text{maximitzar} \quad & u_2 = c_2 \cdot c'_2 \\ \text{sotmès a} \quad & c_2 + l_2 = 2 \\ & c'_2 = 2 + R \cdot l_2. \end{aligned}$$

Introduïdes les dues restriccions en la funció objectiu, es tracta de

$$\text{maximitzar} \quad u_2 = (2 - l_2) \cdot (2 + R \cdot l_2).$$

Maximitzar respecte d' l_2 requereix

$$0 = \frac{du_2}{dl_2} = 2R - 2 - 2R \cdot l_2.$$

El resultat:

$$l_2 = 1 - \frac{1}{R}. \quad (2)$$

3. Equilibri

• **Equilibri en el mercat de préstecs.** Emprant (1), (2) i la condició d'equilibri $m \cdot l_1 + n \cdot l_2 = 0$ s'obté, per a cada període,

$$m \cdot \frac{1 - \varepsilon}{2} + n \cdot \left(1 - \frac{1}{R}\right) = 0$$

o

$$R = \frac{2n}{2n + m - m\varepsilon}. \quad (3)$$

Atès que les mides m i n dels grups són constants, hi ha un valor α tal que $m = \alpha \cdot n$. El paràmetre α permet reduir el nombre de variables en l'equació que defineix R . En concret,

$$R = \frac{2n}{2n + m(1 - \varepsilon)} = \frac{2n}{2n + \alpha n(1 - \varepsilon)} = \frac{2}{2 + \alpha(1 - \varepsilon)}.$$

Amb (1) i la restricció pressupostària de jove, el consum de cada jove de G1 és

$$c_1 = 1 - l_1 - \varepsilon = 1 - \frac{1 - \varepsilon}{2} - \varepsilon = \frac{1 - \varepsilon}{2}.$$

Amb (1) i (3), el consum de cada gran de G1 és

$$c'_1 = R \cdot l_1 = \frac{2}{2 + \alpha(1 - \varepsilon)} \cdot \frac{1 - \varepsilon}{2} = \frac{1 - \varepsilon}{2 + \alpha(1 - \varepsilon)}.$$

La utilitat corresponent de cada jove de G1 és

$$u_1 = c_1 \cdot c'_1 = \frac{1-\varepsilon}{2} \cdot \frac{1-\varepsilon}{2+\alpha(1-\varepsilon)} = \frac{(1-\varepsilon)^2}{4+2\alpha(1-\varepsilon)}.$$

Si $\varepsilon = 0$, la utilitat de cada jove de G1 és

$$u_1^0 = c_1^0 \cdot c_1^{\prime 0} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2+\alpha} \right) = \frac{1}{4+2\alpha}.$$

Es tracta de comprovar si $u_1 > u_1^0$. Aquesta desigualtat equival a

$$\frac{(1-\varepsilon)^2}{4+2\alpha(1-\varepsilon)} > \frac{1}{4+2\alpha}$$

o

$$4\varepsilon - 8 + 2\alpha\varepsilon - 4\alpha > -2\alpha$$

o

$$\varepsilon(\alpha + 2) > \alpha + 4$$

o

$$\boxed{\varepsilon > \frac{\alpha + 4}{\alpha + 2}}. \quad (4)$$

La desigualtat (4), que seria la condició necessària i suficient per a què la destrucció d'ε unitats del bé per tots els joves de G1 fes augmentar la utilitat dels joves de G1 (respecte del valor d'utilitat que n'obtindrien amb $\varepsilon = 0$), no es compleix: $\frac{\alpha+4}{\alpha+2} > 1$ if ε no pot ser superior a 1.

4. I si els prestataris destrueixen dotació?

• **Decisions dels joves de G2.** El problema de tot jove de G2 és

$$\begin{array}{ll} \text{maximitzar} & u_2 = c_2 \cdot c'_2 \\ \text{sotmès a} & c_2 + l_2 = 2 - \varepsilon \\ & c'_2 = 2 + R \cdot l_2. \end{array}$$

Introduïdes les dues restriccions en la funció objectiu, es tracta de

$$\text{maximitzar} \quad u_2 = (2 - l_2 - \varepsilon) \cdot (2 + R \cdot l_2).$$

Maximitzar respecte d' l_2 requereix

$$0 = \frac{du_2}{dl_2} = 2R - 2 - 2R \cdot l_2 - \varepsilon R.$$

El resultat:

$$l_2 = 1 - \frac{1}{R} - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Per als joves de G1,

$$l_1 = \frac{1}{2}.$$

En l'equilibri del mercat,

$$m \cdot \frac{1}{2} + n \cdot \left(1 - \frac{1}{R} - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0$$

o

$$R = \frac{2n}{2n + m - \varepsilon n}. \quad (5)$$

Recordant que $m = \alpha \cdot n$,

$$R = \frac{2n}{2n + m - \varepsilon n} = \frac{2}{2 + \alpha - \varepsilon}.$$

El consum de cada jove de G2 és

$$c_2 = 2 - l_2 - \varepsilon = 2 - \left(1 - \frac{1}{R} - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \varepsilon = 1 + \frac{1}{R} - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{2 - \varepsilon}{2} + \frac{2 + \alpha - \varepsilon}{2} = \frac{4 + \alpha - 2\varepsilon}{2}.$$

El consum de cada gran de G2 és

$$c'_2 = 2 + R \cdot l_2 = 2 + R \cdot \left(1 - \frac{1}{R} - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 2 + R - 1 - \frac{\varepsilon R}{2} = 1 + R \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$c'_2 = 1 + R \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 1 + \frac{2}{2 + \alpha - \varepsilon} \cdot \frac{2 - \varepsilon}{2} = \frac{4 + \alpha - 2\varepsilon}{2 + \alpha - \varepsilon}.$$

La utilitat de cada jove de G2 és

$$u_2 = c_2 \cdot c'_2 = \frac{4 + \alpha - 2\varepsilon}{2} \cdot \frac{4 + \alpha - 2\varepsilon}{2 + \alpha - \varepsilon} = \frac{(4 + \alpha - 2\varepsilon)^2}{4 + 2\alpha - 2\varepsilon}.$$

Si $\varepsilon = 0$, la utilitat de cada jove de G2 és

$$u_2^0 = c_2^0 \cdot c_2'^0 = \frac{4 + \alpha}{2} \cdot \frac{4 + \alpha}{2 + \alpha} = \frac{(4 + \alpha)^2}{4 + 2\alpha}.$$

Es tracta de comprovar si $u_2 > u_2^0$. Aquesta desigualtat equival a

$$\frac{(4 + \alpha - 2\varepsilon)^2}{4 + 2\alpha - 2\varepsilon} > \frac{(4 + \alpha)^2}{4 + 2\alpha},$$

que no es compleix. Per a comprovar-ho, sigui $A = 4 + \alpha$ i $B = 4 + 2\alpha$. Ara la desigualtat és

$$\frac{(A - 2\varepsilon)^2}{B - 2\varepsilon} > \frac{A^2}{B}$$

o

$$A^2B - 4\varepsilon^2B - 4\varepsilon AB > A^2B - 2\varepsilon A^2$$

o

$$-2\varepsilon B - 2AB > -A^2$$

o

$$\varepsilon < \frac{A^2 - 2AB}{2B} = \frac{A^2}{2B} - A$$

o

$$\varepsilon < \frac{(4 + \alpha)^2}{2(4 + 2\alpha)} - (4 + \alpha) = (4 + \alpha) \left(\frac{4 + \alpha}{4(2 + \alpha)} - 1 \right) = \frac{4 + \alpha}{8 + 4\alpha} (-4 - 3\alpha) < 0,$$

que contradiu la condició $\varepsilon > 0$.

Conclusió: per molt petit que sigui $\varepsilon > 0$, la destrucció d' ε unitats del bé per tots els joves de G2 no incrementa la utilitat dels joves de G2 (respecte del valor d'utilitat que n'obtindrien amb $\varepsilon = 0$).

Per exemple, si $\alpha = 1$, la desigualtat esdevé

$$\frac{(5 - 2\varepsilon)^2}{6 - 2\varepsilon} > \frac{25}{6}$$

que equival a

$$6 \cdot (25 + 4\varepsilon^2 - 20\varepsilon) > 150 - 50\varepsilon$$

o

$$12\varepsilon > 35$$

o

$$\varepsilon < -35/12.$$

Conclusió final: l'estratègia de destruir dotació del bé per a provocar un resultat més favorable en el funcionament del mercat de préstecs ni funciona als prestadors ni funciona als prestataris.

5. Quan consum present i futur no són perfectament substitutius

Ara els joves de tenen la funció d'utilitat $u_1 = c_1^\beta \cdot c'_1$, on $\beta > 0$. Com més gran β , més valor té el consum present en relació amb el consum futur. El paràmetre β és una mesura de paciència: com més gran β , més es valora el present i, per tant, menys paciència es té.

• **Decisions dels joves de G1.** El problema de tot jove de G1 és

$$\begin{array}{ll} \text{maximitzar} & u_1 = c_1^\beta \cdot c'_1 \\ \text{sotmès a} & c_1 + l_1 = 1 - \varepsilon \\ & c'_1 = R \cdot l_1. \end{array}$$

que equival a

$$\text{maximitzar } u_1 = (1 - l_1 - \varepsilon)^\beta \cdot R \cdot l_1.$$

Maximitzar respecte d' l_1 requereix

$$0 = \frac{du_1}{dl_1} = (1 - l_1 - \varepsilon)^\beta - \beta l_1 (1 - l_1 - \varepsilon)^{\beta-1}.$$
$$0 = 1 - l_1 - \varepsilon - \beta l_1.$$

En suma,

$$l_1 = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \beta}.$$

• **Decisions dels joves de G2.** El problema ja ha estat resolt en §2: l'equació (2).

• **Equilibri en el mercat de préstecs.** La condició d'equilibri $m \cdot l_1 + n \cdot l_2 = 0$ es concreta en

$$m \cdot \frac{1 - \varepsilon}{1 + \beta} + n \cdot \left(1 - \frac{1}{R}\right) = 0$$

o

$$R = \frac{n(1 + \beta)}{n(1 + \beta) + m - m\varepsilon}.$$

Definint $m = \alpha \cdot n$,

$$R = \frac{1 + \beta}{1 + \beta + \alpha(1 - \varepsilon)}.$$

El consum de cada jove de G1 és

$$c_1 = 1 - l_1 - \varepsilon = 1 - \frac{1 - \varepsilon}{1 + \beta} - \varepsilon = \frac{\beta(1 - \varepsilon)}{1 + \beta}.$$

El consum de cada gran de G1 és

$$c'_1 = R \cdot l_1 = \frac{1 + \beta}{1 + \beta + \alpha(1 - \varepsilon)} \cdot \frac{1 - \varepsilon}{1 + \beta} = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \beta + \alpha(1 - \varepsilon)}.$$

La utilitat de cada jove de G1 és

$$u_1 = c_1 \cdot c'_1 = \frac{\beta(1 - \varepsilon)}{1 + \beta} \cdot \frac{1 - \varepsilon}{1 + \beta + \alpha(1 - \varepsilon)} = \frac{\beta(1 - \varepsilon)^2}{(1 + \beta)(1 + \beta + \alpha(1 - \varepsilon))}.$$

Si $\varepsilon = 0$, la utilitat de cada jove de G1 és

$$u_1^0 = c_1^0 \cdot c_1'^0 = \frac{\beta^2}{(1 + \beta)(1 + \beta + \alpha)}.$$

Es tracta de comprovar si $u_1 > u_1^0$. Aquesta desigualtat equival a

$$\frac{\beta(1-\varepsilon)^2}{(1+\beta)(1+\beta+\alpha(1-\varepsilon))} > \frac{\beta^2}{(1+\beta)(1+\beta+\alpha)}$$

o

$$\frac{(1-\varepsilon)^2}{1+\beta+\alpha(1-\varepsilon)} > \frac{\beta}{1+\beta+\alpha}$$

o

$$1 + \alpha + \varepsilon(\alpha\beta + (\varepsilon - 2)(1 + \beta + \alpha)) > \beta(\beta + \alpha). \quad (6)$$

Si la condició (6) es compleix, els prestadors joves de G1 incrementen la utilitat tot destruint ε unitats de la seva dotació.

Proposició. Si $\beta < 1$, aleshores per a tot $\alpha > 0$ existeix $\varepsilon > 0$ que fa que (6) es compleixi.

Demostració. La demostració és immediata. Si ε està prou a prop de zero,

$$1 + \alpha + \varepsilon(\alpha\beta + (\varepsilon - 2)(1 + \beta + \alpha)) \approx 1 + \alpha.$$

Per aquesta raó, (6) és aproximadament equivalent a

$$1 + \alpha > \beta(\beta + \alpha).$$

Per la hipòtesi que $\beta < 1$,

$$\beta(\beta + \alpha) < \beta + \alpha$$

i, a més,

$$\beta + \alpha < 1 + \alpha.$$

Conclusió: amb un ε suficientment petit i amb $\beta < 1$, (6) se satisfà. ■

L'anàlisi de §3 demostra que $\beta < 1$ és una condició necessària per al resultat: amb $\beta = 1$ la desigualtat (6) no es compleix. Si $\beta = 1$, (6) esdevé

$$\varepsilon(\alpha + (\varepsilon - 2)(2 + \alpha)) > 0$$

o

$$-\varepsilon(2(2 - \varepsilon) + \alpha(1 - \varepsilon)) > 0$$

desigualtat que no és certa perquè $0 < \varepsilon \leq 1$.

La condició $\beta < 1$ significa que els prestadors valoren menys el consum present que el consum futur. Alternativament, $\beta < 1$ implica que esperar-se al futur compensa: entre consumir una unitat del bé en el present i consumir-la en el futur, és més útil consumir-la en el futur. Això vol dir que els prestadors són pacients: un premi futur és preferible a un premi present.

A la inversa, ser impacient ($\beta \geq 1$), valorar més la recompensa immediata a la recompensa futura, impedeix els prestadors d'obtenir un benefici de la destrucció de dotació.