

7. Quan el cobrament de deutes és costós

1. Descripció de l'economia

- Hi ha un únic bé que no es pot produir ni acumular.
- Cada període neixen dos grups de persones, G1 i G2, cadascú amb n membres.
- Hom viu dos períodes consecutius.
- Tota persona jove té la funció d'utilitat $u = c \cdot c'$, on és c el consum del bé de jove i c' el consum de gran. Tota persona gran té la funció d'utilitat $u' = c'$.
- La dotació de cada membre de G1 és $(1, 0)$: una unitat de jove i cap de gran. La dotació de cada membre de G2 és $(2, 2)$: dues unitats de jove i dues de gran.
- Tot prestador decideix la quantitat e de bé dedicada al garantiment del cobrament del deute: si s'ha de cobrar la quantitat D i s'inverteix la quantitat e , aleshores s'aconsegueix cobrar $e \cdot D$.

2. Decisions

- **Decisions dels prestadors.** El problema de tot prestador és

$$\begin{array}{ll} \text{maximitzar} & u_1 = c_1 \cdot c'_1 \\ \text{sotmès a} & c_1 + l_1 + e_1 = 1 \\ & c'_1 = e_1 \cdot R \cdot l_1 \end{array}$$

on e_1 és la part de la dotació destinada (l'esforç aplicat) a garantir el retorn del préstec. L'efecte de l'esforç o inversió e_1 en la restricció de gran és equivalent a una reducció de la taxa d'interès.

Introduïdes les dues restriccions en la funció objectiu, es tracta de

$$\text{maximitzar} \quad u_1 = (1 - l_1 - e_1)e_1 R l_1.$$

Maximitzar respecte d' l_1 requereix

$$0 = \frac{du_1}{dl_1} = e_1 R (1 - 2l_1 - e_1).$$

Això és,

$$l_1 = \frac{1 - e_1}{2}.$$

Maximitzar respecte d' e_1 requereix

$$0 = \frac{du_1}{de_1} = R l_1 (1 - l_1 - 2e_1).$$

Per consegüent,

$$e_1 = \frac{1 - l_1}{2}.$$

Combinant $l_1 = \frac{1-e_1}{2}$ i $e_1 = \frac{1-l_1}{2}$ s'arriba a

$$l_1 = e_1 = \frac{1}{3}. \quad (1)$$

Per la restricció $c_1 + l_1 + e_1 = 1$ de jove

$$c_1 = \frac{1}{3}.$$

Per la restricció $c'_1 = e_1 R l_1$ de gran

$$c'_1 = \frac{R}{9}.$$

• **Decisions dels prestataris.** Que els prestadors hagin de fer una inversió per a obtenir el retorn del préstec fa que la part del préstec que retornen els prestataris depèn de la inversió que facin els prestadors. L'enunciat no especifica quina part del préstec efectivament retornen els prestataris. Per la simetria de la situació (n prestadors idèntics s'enfronten a n prestataris idèntics) és raonable assumir que l'esforç e (que implícitament queda afetat pels valors 0 i 1) aplicat per cada prestatari comporta que cada prestatari retorni només la fracció e del deute. En concret, cada prestatari vol

$$\begin{array}{ll} \text{maximitzar} & u_2 = c_2 \cdot c'_2 \\ \text{sotmès a} & c_2 + l_2 = 2 \\ & c'_2 = 2 + e_1 \cdot R \cdot l_2 \end{array}$$

on e_1 és la magnitud determinada per cada prestador. Tal com s'ha calculat prèviament, $e_1 = 1/3$.

La solució:

$$l_2 = 1 - \frac{3}{R}. \quad (2)$$

3. Mercats

• **Equilibri en el mercat de préstecs.** Emprant (1), (2) i la condició d'equilibri $n \cdot l_1 + n \cdot l_2 = 0$ s'obté (per a cada període diferent del primer)

$$R = \frac{9}{4}.$$

El consum resultant per a cada persona és

$$c_1 = \frac{1}{3}$$

$$c'_1 = \frac{1}{4}$$

$$c_2 = \frac{7}{3}$$

$$c'_2 = \frac{7}{4}.$$

Quan no calia fer cap esforç per a cobrar el deute (la solució del model bàsic, identificada amb un asteric)

$$c_1^* = \frac{1}{2} > c_1$$

$$c_1'^* = \frac{1}{3} > c'_1$$

$$c_2^* = \frac{5}{2} > c_2$$

$$c_2'^* = \frac{5}{3} < c'_2.$$

En termes d'utilitat,

$$u_1 = \frac{1}{12} < u_1^* = \frac{1}{6}$$

$$u'_1 = \frac{1}{4} < u_1'^* = \frac{1}{3}$$

$$u_2 = \frac{49}{12} = 4 + \frac{1}{12} < u_2^* = \frac{25}{6} = 4 + \frac{1}{6}$$

$$u'_2 = \frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4} > u_2'^* = \frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}.$$

En suma: si els prestataris són deshonestos (paguen en funció de l'esforç dels prestadors per a cobrar el deute), hom surt perdent excepte els prestataris quan són grans.

• **Exercici 1.** I si els prestataris fossin realment honestos (paguen tots el seu deute sense que calgui esforç dels prestadors) però els prestadors creuen que no ho són i fan un esforç per a garantir el retorn del préstec?

• **Exercici 2.** I si els prestataris fossin deshonestos però els prestadors ignoressin que ho són?

4. Els prestataris volen ser honestos

Suposem que els prestataris joves són honestos: quan obtenen un préstec volen complir l'obligació de retornar-lo. El problema és que qui efectivament haurà de tornar el préstec serà ell mateix però de gran. I de gran podria repensar-se si ser honest (i pagar el deute) o deshonest (i quedar-se'l per a incremenar el seu consum). Imaginem que tot prestatari gran no retorna el préstec.

A continuació es proposa una manera de representar com un prestatari jove intenta garantir que ell mateix de gran pagarà el seu deute. Atès que els membres joves de G2 són els únics possibles prestataris, se suposa que els joves de G2 dediquen una part e_2 de la seva dotació per a forçar-se a retornar el préstec de gran. En concret, si x és el volum de deute a pagar i es dedica la quantitat e_2 , aleshores el jove pot forçar-se a pagar de gran el volum de deute $e_2 \cdot x$. Per a simplificar, s'assumeix que $e_2 \leq 1$.

• **Decisions dels prestataris.** El problema de tot prestatari és

$$\begin{array}{ll} \text{maximitzar} & u_2 = c_2 \cdot c'_2 \\ \text{sotmès a} & c_2 + l_2 + e_2 = 2 \\ & c'_2 = 2 + e_2 \cdot R \cdot l_2 \end{array}$$

on s'entén que $e_2 > 0$ perquè tot prestatari jove és honest. Si de jove no s'és honest, llavors (essent deshonest de gran) la solució al problema anterior implicaria que $e_2 = 0$: el consum de jove no comporta la reducció e_2 i, de gran, el bé a retornar pot incrementar el consum de gran.

Introduïdes les dues restriccions en la funció objectiu, es tracta de

$$\text{maximitzar} \quad u_2 = (2 - l_2 - e_2) \cdot (2 + e_2 R l_2)$$

o

$$\text{maximitzar} \quad u_2 = 4 + 2e_2 R l_2 - 2l_2 - e_2 R (l_2)^2 - 2e_2 - (e_2)^2 R l_2.$$

Maximitzar respecte d' l_2 requereix

$$0 = \frac{du_2}{dl_2} = 2e_2 R - 2 - 2e_2 R l_2 - (e_2)^2 R$$

o

$$2 = R e_2 (2 - 2l_2 - e_2).$$

i, emprant la restricció de jove,

$$2 = R e_2 (c_2 - l_2). \quad (3)$$

Maximitzar respecte d' e_2 requereix

$$0 = \frac{du_2}{de_2} = 2R l_2 - R (l_2)^2 - 2 - 2e_2 R l_2$$

o

$$2 = Rl_2(2 - l_2 - 2e_2).$$

i, emprant la restricció de jove,

$$2 = Rl_2(c_2 - e_2). \quad (4)$$

Combinant (3) i (4),

$$e_2(c_2 - l_2) = l_2(c_2 - e_2)$$

o

$$e_2c_2 - e_2l_2 = l_2c_2 - e_2l_2$$

o

$$e_2c_2 = l_2c_2$$

o

$$e_2 = l_2.$$

D'aquí ja se'n dedueix una contradicció: l_2 ha de ser negatiu (es tracta de prestataris) però e_2 no pot ser negatiu (es tracta de quantitat de bé esmerçada en garantir el cobrament del deute).

Hi ha una altra manera d'obtenir una contradicció. Amb $e_2 = l_2$ i $2 = Rl_2(2 - l_2 - 2e_2)$,

$$2 = Rl_2(2 - 3l_2)$$

o

$$3R(l_2)^2 - 2Rl_2 + 2 = 0$$

o

$$l_2 = \frac{1}{3} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{6}{R}} \right).$$

Atès que els joves de G2 han de ser prestataris per a què hi hagi mercat de préstecs (ja que els joves de G1 necessàriament han de ser prestadors) cal que $l_2 < 0$. Això demana la solució

$$l_2 = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{6}{R}} \right).$$

Però $1 - \frac{6}{R} < 1$, de manera que $\sqrt{1 - \frac{6}{R}} < 1$ i, en conseqüència, $1 - \sqrt{1 - \frac{6}{R}} > 0$. En resum, $l_2 > 0$. Se segueix d'aquest resultat que no hi ha mercat de préstecs: tots els joves dels dos grups volen ser prestadors (i només creen oferta de préstecs).

Tot l'anterior (atès que s'empren condicions basades en derivades) implica que no existeix solució interior al problema de maximització dels prestataris. Hi ha possible solucions de cantonada? Per hipòtesi, $l_2 < 0$ i no pot ser solució l'altre valor extrem, $l_2 = 2$ (ja que comportaria $e_2 = 0$). Per hipòtesi, $e_2 > 0$ i no pot ser solució l'altre valor extrem, $e_2 = 2$ (ja que comportaria $l_2 > 0$).

La conclusió final és que, en aquesta economia, el mercat (competitiu) de préstecs no accepta que els prestataris siguin honestos. La honestada destrueix el mercat. En resulta un dilema: un jove pot ser prestatari o pot ser honest, però no pot ser prestari i honest alhora.

5. Un altra manera que els prestataris siguin honestos

Es pot considerar que la manera d'introduir a §4 la voluntat de ser honest dels joves prestataris és inherentment contradictòria amb l'objectiu de maximització que caracteritza els participants en el mercat de préstecs. Si és així el resultat de contradicció entre mercat i honestat no hauria de sorprendre: la contradicció és explícita en les hipòtesis de comportament dels individus (volen maximitzar utilitat però s'hi afegeix un element, el valor positiu e_2 , que impossibilita la maximització).

Se suggereix a continuació una altra manera d'introduir en el model el concepte d'honestat (en el sentit que els deutes assumits de joves es paguen de grans). La proposta és incloure en la funció d'utilitat la satisfacció de ser honest. L'element que proporciona aquesta satisfacció és el pagament del deute. Una primera manera d'incloure aquest element és postular una funció d'utilitat com

$$u_2 = c_2 \cdot c'_2 \cdot (R \cdot |l_2| - x)$$

on $|l_2| = -l_2$, x és el volum de deute impagat i $R|l_2|$ representa el deute a pagar (es pren el valor absolut $|l_2|$ d' l_2 perquè l_2 és negatiu). En aquest formulació la utilitat del jove creix amb el volum $R|l_2| - x$ de deute pagat de gran. Si es vol una mica més de generalitat (atès que consumir el bé i pagar un deute del bé no necessàriament han d'impactar la utilitat de manera equivalent):

$$u_2 = c_2 \cdot c'_2 \cdot (R \cdot |l_2| - x)^\alpha$$

on $\alpha > 0$ mesura l'impacte diferencial en la utilitat del pagament d'un deute i del consum. Per exemple, $\alpha = 2$ significaria que pagar una unitat del bé (com satisfacció d'un deute) proporciona el doble d'utilitat que consumir una unitat del bé (de jove o de gran). Si $\alpha < 0$ aleshores pagar deutes és un mal (es preferiria no pagar-lo).

• **Decisions dels prestataris.** El problema de tot prestatari és ara

$$\begin{array}{ll} \text{maximitzar} & u_2 = c_2 \cdot c'_2 \cdot (-Rl_2 - x) \\ \text{sotmès a} & c_2 + l_2 = 2 \\ & c'_2 = 2 + Rl_2 + x \end{array}$$

on el prestatari tria el valor positiu $x \leq R \cdot |l_2| = -Rl_2$ (de gran, Rl_2 hauria de representar una pèrdua de dotació, ja que $l_2 < 0$, però en realitat la pèrdua és x unitats menys perquè x és la part no pagada del deute).

A diferència del model de §4, s'assumeix que el valor d' x triat de jove vincula al gran. Aleshores, per què no assumir directament que el valor d' l_2 triat de jove vincula al gran (i no li deixa més opció que pagar Rl_2)? Una justificació és que el valor d' x sorgeix d'un procés de reflexió del prestatari que acaba formant part (com a element de la personalitat) del prestatari, de manera que la conclusió sobre el valor d' x a la qual s'arriba de jove no es qüestiona de gran.

Introduïdes les dues restriccions en la funció objectiu (per comoditat s'elimina el subíndex '2'), es tracta de

$$\text{maximitzar } u = (2 - l) \cdot (2 + Rl + x) \cdot (-Rl - x)$$

o

$$\text{maximitzar } u = -(2 - l) \cdot (y^2 + 2y)$$

on s'ha definit $y = Rl + x$.

Maximitzar respecte d' x requereix

$$0 = \frac{du}{dx} = -(2 - l) \cdot \left(2y \frac{dy}{dx} + 2 \frac{dy}{dx} \right)$$

o, ja que $\frac{dy}{dx} = 1$,

$$0 = -(2 - l) \cdot 2 \cdot (y + 1).$$

Una solució requereix $l = 2$. Però aquesta elecció implica $c = 0$ (i $u = 0$, un valor que no pot ser màxim). L'altra solució demana $y = -1$; això és, $Rl + x = -1$ o, equivalentment, $x = -Rl + 1 = R|l| + 1$. Aquesta condició contradiu la hipòtesi que $x \leq R|l|$ (no es pot deixar de pagar més de l'import del deute).

Se segueix de l'anterior que, si hi ha algun valor d' x que maximitza la funció d'utilitat, aquest valor no pertany a l'interior de l'interval de valors admissibles d' x . Per tant: $x = R|l|$ o $x = 0$.

En el primer cas, $u = 0$. Per consegüent, el candidat a maximitzar u és $x = 0$. En suma, en el fons es tracta de

$$\text{maximitzar } u = -(2 - l) \cdot (2 + Rl) \cdot (Rl).$$

Maximitzar respecte d' l requereix

$$0 = \frac{du}{dl} = -4R - 4R^2l + 4Rl + 3R^2l^2$$

o

$$0 = -4 - 4Rl + 4l + 3Rl^2$$

o

$$3Rl^2 + 4(1 - R)l - 4 = 0$$

D'aquí que

$$l = \frac{2}{3} \cdot \left(\left(1 - \frac{1}{R} \right) \pm \sqrt{1 + \frac{1}{R} + \frac{1}{R^2}} \right).$$

En la mesura que $\sqrt{1 + \frac{1}{R} + \frac{1}{R^2}} > 1 - \frac{1}{R}$ i que cal $l < 0$ (ja que ha de ser la solució d'un prestatari),

$$l_2 = \frac{2}{3} \cdot \left(\left(1 - \frac{1}{R} \right) - \sqrt{1 + \frac{1}{R} + \frac{1}{R^2}} \right).$$

• **Equilibri de mercat.** Suposem que els prestadors no tenen dubtes sobre el pagament del deute, de manera que

$$l_1 = \frac{1}{2}.$$

En equilibri, $l_1 + l_2 = 0$. Això és,

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \left(\left(1 - \frac{1}{R} \right) - \sqrt{1 + \frac{1}{R} + \frac{1}{R^2}} \right) = 0$$

o

$$\frac{21^2}{12^2} + \frac{1}{R^2} - \frac{21}{6} \frac{1}{R} = 1 + \frac{1}{R} + \frac{1}{R^2}$$

o

$$R = \frac{24}{11}.$$

Suposem que un jove de G2 té funció d'utilitat

$$u_2 = c_2 \cdot c_2' \cdot (-Rl_2 - x)$$

si l_2 és negatiu (si el jove participa en el mercat i s'endeuta) i és

$$u_2 = c_2 \cdot c_2'$$

si l_2 és zero. Per tant, si no hi ha préstecs, un jove de G2 obté utilitat $u_2 = 4$ de $c_2 = 2$ i $c_2' = 2$. Si n'hi ha,

$$u_2 = -(2 - l_2) \cdot (R^2 l_2^2 + 2Rl_2) = 5 \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{18}{11} > 4$$

on $R = \frac{24}{11}$ i $l_2 = -l_1 = -\frac{1}{2}$. Això significa que els prestataris participen el mercat i obtenen utilitat de pagar deutes.

• **Decisions dels prestataris amb paràmetre α ponderant el valor de pagar deutes.** El problema de tot prestatari és ara

$$\begin{aligned} \text{maximitzar} \quad & u_2 = c_2 \cdot c_2' \cdot (-R \cdot l_2 - x)^\alpha \\ \text{sofmès a} \quad & c_2 + l_2 = 2 \\ & c_2' = 2 + Rl_2 + x \end{aligned}$$

on $\alpha > 0$.

Introduïdes les dues restriccions en la funció objectiu (per comoditat s'elimina el subíndex '2'), es tracta de

$$\text{maximitzar} \quad u = (2 - l) \cdot (2 + Rl + x) \cdot (-Rl - x)^\alpha$$

o

$$\text{maximitzar} \quad u = (2 - l) \cdot (-y^{\alpha+1} + 2y^\alpha)$$

on s'ha definit $y = -Rl - x$.

Maximitzar respecte d' x requereix

$$0 = \frac{du}{dx} = (2 - l) \cdot \left(-(\alpha + 1) \cdot y^\alpha \cdot \frac{dy}{dx} + 2\alpha \cdot y^{\alpha-1} \cdot \frac{dy}{dx} \right)$$

o, ja que $\frac{dy}{dx} = -1$,

$$0 = (2 - l)y^{\alpha-1}((\alpha + 1)y - 2\alpha).$$

Una solució requereix $l = 2$. Però aquesta elecció implica $c = 0$ (i $u = 0$, un valor millorable). Una segona solució s'obté amb $y = 0$, que significa que s'impaga tot el deute, la qual cosa fa que $u = 0$. La tercera solució implica

$$y = 2 \frac{\alpha}{\alpha + 1}.$$

D'aquí,

$$x = -Rl - y = -Rl - \frac{2\alpha}{\alpha + 1}.$$

Maximitzar respecte d' l requereix

$$0 = \frac{du}{dl} = -2 \frac{dy^{\alpha+1}}{dl} + 4 \frac{dy^\alpha}{dl} + y^{\alpha+1} + l \frac{dy^{\alpha+1}}{dl} - y^\alpha - l \frac{dy^\alpha}{dl}$$

o

$$0 = (l - 2) \frac{dy^{\alpha+1}}{dl} + (4 - l) \frac{dy^\alpha}{dl} + y^{\alpha+1} - y^\alpha$$

o

$$0 = (l - 2) \left((\alpha + 1) \cdot y^\alpha \cdot \frac{dy}{dl} \right) + (4 - l) \left(\alpha y^{\alpha-1} \cdot \frac{dy}{dl} \right) + y^{\alpha+1} - y^\alpha$$

o (atès que $\frac{dy}{dl} = -R$)

$$0 = (2 - l)((\alpha + 1)y^\alpha R) + (l - 4)(\alpha y^{\alpha-1} R) + y^{\alpha+1} - y^\alpha$$

o

$$0 = y^\alpha((2 - l)R(\alpha + 1) - 1) + y^{\alpha-1}(l - 4)\alpha R + y^{\alpha+1}$$

o

$$0 = y^{\alpha-1}((l - 4)\alpha R + y((2 - l)R(\alpha + 1) - 1) + y^2)$$

o

$$0 = (l - 4)\alpha R + \frac{2\alpha}{\alpha + 1}((2 - l)R(\alpha + 1) - 1) + \left(\frac{2\alpha}{\alpha + 1}\right)^2$$

o

$$0 = (l - 4)R + 2 \cdot \frac{(2 - l)R(\alpha + 1) - 1}{\alpha + 1} + \alpha \left(\frac{2}{\alpha + 1}\right)^2$$

o, fent $z = \alpha + 1$,

$$0 = (l - 4)Rz^2 + 2(2 - l)Rz^2 - 2z + 4\alpha$$

o

$$0 = -lRz^2 - 2z + 4\alpha$$

o

$$l = \frac{2(\alpha - 1)}{R(\alpha + 1)^2}.$$

Com que $l < 0$, no hi ha solució si $\alpha \geq 1$. A mesura que α creix, l'impacte sobre la utilitat del pagament del deute (de la honestetat) és més gran. Per tant, atribuir al pagament del deute almenys tant valor com el consum comporta l'absència de solució al problema del prestatari.

Si $\alpha < 1$, l'equilibri en el mercat de préstecs equival a

$$l_1 + l_2 = \frac{1}{2} + \frac{2(\alpha - 1)}{R(\alpha + 1)^2}$$

o

$$\frac{1}{2} = \frac{2(1 - \alpha)}{R(\alpha + 1)^2}$$

i la taxa resultant és

$$R = \frac{4(1 - \alpha)}{(\alpha + 1)^2}.$$

Emprant un resultat previ

$$x = -Rl_2 - \frac{2\alpha}{\alpha + 1} = \frac{4(1 - \alpha)}{(\alpha + 1)^2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{2\alpha}{\alpha + 1} = 2 \cdot \frac{1 - 2\alpha - \alpha^2}{(\alpha + 1)^2}.$$

Per la condició que $x > 0$, cal que

$$1 - 2\alpha - \alpha^2 > 0$$

o

$$\alpha(\alpha + 2) < 1.$$

Això fa que tot valor admissible d' α per a l'existència d'equilibri en el mercat de préstec satisfaci

$$\alpha < \sqrt{2} - 1 \approx 0.4142.$$

Interpretació: l'existència d'una solució interior d'equilibri requereix que la utilitat d'una unitat del bé pagada per a satisfer un deute valgui menys de la meitat d'una unitat consumida del bé.