

9. Herències

1. Descripció de l'economia

- Hi ha un únic bé que no es pot produir ni acumular.
- Cada període neixen dos grups de persones, G1 i G2, cadascú amb n membres.
- Hom viu dos períodes consecutius.
- A cada grup cada període hi ha una bijecció entre joves i grans del grup. La bijecció vincula cada jove amb exactament un gran del grup.
- Tot jove té la funció d'utilitat $u = c \cdot c'$, on c és el consum del bé de jove i c' el consum de gran.
- Tota persona gran té la funció d'utilitat $u' = c' \cdot h$, on h és la quantitat de bé que, com a herència, la persona gran transfereix al jove del seu mateix grup amb què està vinculat.
- La dotació de cada membre de G1 és $(0, w)$: cap unitat de jove i $w > 0$ de gran. La dotació de cada membre de G2 és $(w, 0)$: w unitats de jove i cap de gran.

2. Decisions

- **Decisions en t dels grans de G1 sobre herències.** El problema de tot gran és

$$\begin{array}{ll} \text{maximitzar} & u'_{1,t} = c'_{1,t} \cdot h_{1,t} \\ \text{sotmès a} & c'_{1,t} + h_{1,t} = w + R_{t-1}l_{1,t-1} \end{array}$$

on $h_{1,t}$ és l'herència tramesa en t al jove corresponent, $l_{1,t-1}$ són els préstecs oferts/demanats en el període anterior $t - 1$ quan la persona era jove i R_{t-1} és la taxa d'interès del període anterior. ES detallen els índexs temporals per a evitar ambigüitats.

Introduïda restricció en la funció objectiu, es tracta de

$$\text{maximitzar} \quad u'_{1,t} = (w + R_{t-1}l_{1,t-1} - h_{1,t}) \cdot h_{1,t}.$$

Maximitzar respecte d' h_1 requereix

$$0 = \frac{du'_{1,t}}{dh_{1,t}} = w + R_{t-1}l_{1,t-1} - 2h_{1,t}.$$

Això és,

$$h_{1,t} = \frac{w + R_{t-1}l_{1,t-1}}{2}.$$

 (1)

La condició (1) diu que una persona gran dedica a herència la meitat del valor del que té (dotació w més rendiments $R_{t-1}l_{1,t-1}$ de préstecs passats).

S'explica a continuació la conveniència dels subíndexs temporals. El problema acabat de resoldre es refereix a la persona designada 'gran 1' en la Fig. 1.

$t - 1$	t	$t + 1$
jove 1	gran 1	
	jove 2	gran 2

Fig. 1. Similitud i diferències de problemes de decisió

El destinatari de l'herència decidida per gran 1 és jove 2. Però jove 2 també ha de tenir en compte quina herència decidirà quan sigui gran 2. Com de semblants són els problemes de decisió de gran 1 i gran 2? Si són problemes equivalents, aleshores jove 2 pot incorporar en el seu problema de decisió la solució de gran 1. Si no són equivalents l'anàlisi es complica, perquè gran 2 (i, per extensió jove 2) han de tornar a buscar la solució perquè la solució trobada per gran 1 no és aplicable al seu cas. Els subíndexs es poden eliminar si el problema de gran 2 és essencialment el mateix que el de gran 1, només que en un període diferent. Quan s'ha de comprovar que els problemes efectivament són essencialment iguals cal d'entrada reintroduir els índexs temporals per a no confondre variables i problemes de decisió.

• **Decisions en t dels joves de G1 sobre préstecs.** El problema de tot jove és

$$\begin{aligned} \text{maximitzar} \quad & u_{1,t} = c_{1,t} \cdot c'_{1,t+1} \\ \text{sotmès a} \quad & c_{1,t} + l_{1,t} = h_{1,t} \\ & c'_{1,t+1} + h_{1,t+1} = w + R_t l_{1,t} \end{aligned}$$

on $h_{1,t}$ és l'herència rebuda de jove i $h_{1,t+1}$ és l'herència a fer de gran.

Inicialment es podria pensar que, com que tots els grans s'enfronten al mateix problema de decisió, l'herència que fan serà la mateixa. En un sentit l'apreciació és correcta. La clau està en els matisos: el jove en t rep l'herència

$$h_{1,t} = \frac{w + R_{t-1} l_{1,t-1}}{2}$$

i en deixa

$$h_{1,t+1} = \frac{w + R_t l_{1,t}}{2}.$$

Les taxes interès involucrades són diferents: la taxa d'interès que afecta l'herència que fa gran 1 de la Fig. 1 (herència que rep jove 2) no és la mateixa taxa que afecta l'herència que fa gran 2 (i que té en compte jove 2). Concretant: quan (1) se substitueixi en la restricció pressupostària de jove (jove 2), la taxa d'interès en l'expressió d' $h_{1,t}$ (la taxa que va tenir en compte gran 1) no és la taxa R_t que apareix en la restricció pressupostària de gran (gran 2).

Continuant amb la solució, si s'insereixen les restriccions en la funció objectiu, resulta el problema de

$$\text{maximitzar} \quad u_{1,t} = (h_{1,t} - l_{1,t}) \cdot (w + R_t l_{1,t} - h_{1,t+1}).$$

Emprant (1), cal

$$\text{maximitzar} \quad u_{1,t} = \left(\frac{1}{2} (w + R_{t-1} l_{1,t-1}) - l_{1,t} \right) \cdot (w + R_t l_{1,t} - h_{1,t+1}).$$

Per a determinar, $h_{1,t+1}$ el jove ha de resoldre el problema de decisió que tindrà de gran. Aquest problema és idèntic al problema resolt anteriorment i que va tenir solució (1). L'única diferència és que les variables s'han desplaçat una unitat en el temps. Adaptant (1),

$$h_{1,t+1} = \frac{w + R_t l_{1,t}}{2}.$$

Ara es tracta de

$$\text{maximitzar } u_{1,t} = \left(\frac{1}{2}(w + R_{t-1} l_{1,t-1}) - l_{1,t} \right) \cdot \left(w + R_t l_{1,t} - \frac{1}{2}(w + R_t l_{1,t}) \right)$$

o

$$\text{maximitzar } u_{1,t} = \frac{1}{4}(w + R_{t-1} l_{1,t-1} - 2l_{1,t}) \cdot (w + R_t l_{1,t})$$

o

$$\text{maximitzar } u_{1,t} = (w + R_{t-1} l_{1,t-1} - 2l_{1,t}) \cdot (w + R_t l_{1,t}).$$

Maximitzar respecte d' $l_{1,t}$ requereix

$$0 = \frac{du_{1,t}}{dl_{1,t}} = wR_t + R_t R_{t-1} l_{1,t-1} - 2w - 4R_t l_{1,t}.$$

D'aquí,

$$l_{1,t} = \frac{wR_t - 2w + R_t R_{t-1} l_{1,t-1}}{4R_t}.$$

Simplificant,

$$l_{1,t} = \frac{w}{4} - \frac{w}{2R_t} + \frac{R_{t-1} l_{1,t-1}}{4}. \quad (2)$$

• **Decisions en t dels grans de G2 sobre herències.** El problema de tot gran és

$$\text{maximitzar } u'_{2,t} = c'_{2,t} \cdot h_{2,t}$$

$$\text{sotmès a } c'_{2,t} + h_{2,t} = R_{t-1} l_{2,t-1}$$

o

$$\text{maximitzar } u'_{2,t} = (R_{t-1} l_{2,t-1} - h_{2,t}) \cdot h_{2,t}.$$

Per a maximitzar respecte d' $h_{2,t}$

$$0 = \frac{du'_{2,t}}{dh_{2,t}} = R_{t-1} l_{2,t-1} - 2h_{2,t}$$

i així

$$h_{2,t} = \frac{R_{t-1} l_{2,t-1}}{2}. \quad (3)$$

• **Decisions en t dels joves de G2 sobre préstecs.** El problema de tot jove és

$$\text{maximitzar } u_{2,t} = c_{2,t} \cdot c'_{2,t+1}$$

$$\text{sotmès a } c_{2,t} + l_{2,t} = w + h_{2,t}$$

$$c'_{2,t+1} + h_{2,t+1} = R_t l_{2,t}$$

o

$$\text{maximitzar } u_{2,t} = (w + h_{2,t} - l_{2,t}) \cdot (R_t l_{2,t} - h_{2,t+1}).$$

Emprant (3), el problema es transforma en

$$\text{maximitzar } u_{2,t} = \left(w + \frac{1}{2} R_{t-1} l_{2,t-1} - l_{2,t}\right) \cdot (R_t l_{2,t} - h_{2,t+1}).$$

Adaptant (3),

$$h_{2,t+1} = \frac{R_t l_{2,t}}{2}.$$

En suma, es tracta de

$$\text{maximitzar } u_{2,t} = \frac{1}{2} \left(w + \frac{1}{2} R_{t-1} l_{2,t-1} - l_{2,t}\right) \cdot R_t l_{2,t}$$

o

$$\text{maximitzar } u_{2,t} = \left(w + \frac{1}{2} R_{t-1} l_{2,t-1} - l_{2,t}\right) \cdot l_{2,t}.$$

Maximitzar respecte d' $l_{2,t}$ requereix

$$0 = \frac{du_{2,t}}{dl_{2,t}} = w + \frac{1}{2} R_{t-1} l_{2,t-1} - 2l_{2,t}.$$

En conclusió,

$$l_{2,t} = \frac{w}{2} + \frac{1}{4} R_{t-1} l_{2,t-1}. \quad (4)$$

3. Mercats

• **Equilibri en el mercat de préstecs.** Per (2), (4) i la condició d'equilibri $n \cdot l_{1,t} + n \cdot l_{2,t} = 0$ en el mercat de préstecs en el període t ,

$$l_{1,t} + l_{2,t} = 0$$

$$\left(\frac{w}{4} - \frac{w}{2R_t} + \frac{R_{t-1} l_{1,t-1}}{4}\right) + \left(\frac{w}{2} + \frac{1}{4} R_{t-1} l_{2,t-1}\right) = 0$$

$$3w - \frac{2w}{R_t} + R_{t-1} l_{1,t-1} + R_{t-1} l_{2,t-1} = 0$$

Per la condició d'equilibri $l_{1,t-1} + l_{2,t-1} = 0$ en $t - 1$,

$$3w - \frac{2w}{R_t} = 0$$

i

$$R_t = \frac{2}{3}. \quad (5)$$

Aquest resultat és vàlid except pel primer període (perquè no hi ha grans i per aquesta raó els joves no reben cap herència).

Per (2) i (5),

$$l_{1,t} = -\frac{w}{2} + \frac{l_{1,t-1}}{6}.$$

La solució d'estat estacionari l_1^* (la solució que satisfà $l_{1,t} = l_{1,t-1}$) és única:

$$l_1^* = -\frac{3w}{5}.$$

Per (4) i (5),

$$l_{2,t} = \frac{w}{2} + \frac{l_{2,t-1}}{6}.$$

La solució d'estat estacionari l_2^* és única:

$$l_2^* = \frac{3w}{5}.$$

Amb (5), (1) i (3), i els estats estacionaris l_1^* i l_2^* , es poden calcular els estats estacionaris de les herències, h_1^* i h_2^* . Per (1),

$$h_1^* = \frac{w}{2} + \frac{l_1^*}{3} = \frac{w}{2} - \frac{w}{5} = \frac{3w}{10}.$$

Per (3),

$$h_2^* = \frac{l_2^*}{3} = \frac{w}{5} = \frac{2w}{10}.$$

En els valors d'estat estacionari de les herències, l'herència que rep un jove és igual a l'herència que deixa com a gran.

Segons aquest resultat:

- el grup de persones pobres de joves (grup G1) deixen, com a grans, una herència superior a la que deixen els grans del grup inicialment ric (grup G2);
- simètricament, els joves pobres reben una herència més gran ($3w/10$, el 30% de la dotació) que els joves rics ($2w/10$, el 20% de la dotació).