

15. Deute públic en una societat homogènia

1. Descripció de l'economia

- Hi ha un únic bé que no es pot produir ni acumular.
- Cada període neixen n persones idèntiques que viuen dos períodes consecutius.
- Els individus només tenen dotació del bé en el seu primer període de vida: una unitat del bé.
- Tota persona jove té la funció d'utilitat $u = c \cdot c'$, on és c el consum del bé de jove i c' el consum de gran. Tota persona gran té la funció d'utilitat $u' = c'$.
- Hi ha un agent immortal: un govern. Cada període, des de $t = 1$, el govern emet bons: títols de deute que, a canvi de pagar un preu de p unitats del bé per bo en el període t , prometen pagar (per cada bo comprat en t) una unitat de bé en el següent període $t + 1$. Hom creu que el govern pagarà el seu deute. El govern dilapida els ingressos de la primera emissió de bons i el pagament del deute cada període es fa emetent més bons: el deute públic es refinança amb més deute.

2. Decisions

- **Mercat de préstecs privats.** Amb tothom idèntic no hi ha mercat de préstecs privats, atès que hom voldrà fer el mateix: o tothom vol prestar (no hi ha demanda de préstecs) o tothom vol manllevar (i no hi ha oferta de préstecs).
- **Mercat de préstecs públics.** En aquesta economia ningú no pot estalviar per ell mateix (perquè el bé no és acumulable) ni per mitjà d'altri (perquè no hi ha mercat de préstecs privats). El govern (amb l'emissió de deute) actua d'intermediari entre una persona jove i la mateixa persona de gran, i així fa possible l'estalvi.
- **Decisió de comprar bons.** Cada jove s'enfronta al problema de

$$\begin{array}{lll} \text{maximitzar} & u = c \cdot c' & \\ \text{sotmès a} & c + pb = 1 & \text{(restricció present, de jove)} \\ & c' = b & \text{(restricció futura, de gran)} \end{array}$$

on

- c és el consum present (de jove),
- c' és el consum del període següent (de gran),
- b és la quantitat de bons que el jove vol adquirir i
- p és el preu (en unitats de bé) d'un bo.

La hipòtesi que cada bo comprat en t paga una unitat de bé en $t + 1$, implica que el símbol b tingui interpretacions (i unitats de mesura) diferents en funció del període de temps en què es consideri. En concret, si b és la quantitat de bons que es compren o emeten en un període t , llavors b també és la quantitat de bé que el govern ha de pagar en $t + 1$. En t , b són bons mentre que, en $t + 1$, el mateix valor b són béns. Per aquest motiu, la compra de b bons de jove (restricció present) implica

ingressar b unitats de bé de gran (restricció de gran): cada bo comprat en t es transforma en una unitat del bé en $t + 1$. El bo transforma el seu preu p (en t) en 1 (en $t + 1$). La taxa d'interès bruta del bo és $1/p$: s'obté una unitat demà esmerçant p unitats avui. Per consegüent, $p \cdot b$ unitats del bé en transformen en b unitats. Un cop introduïdes les dues restriccions en la funció objectiu, es tracta de

$$\begin{array}{ll} \text{maximitzar} & u = (1 - pb) \cdot b \\ \text{respecte de } b & \end{array}$$

La funció de demanda de bons d'un jove és

$$b = \frac{1}{2p}.$$

Gens sorprenentment, com més alt el preu p dels bons, més petita la seva demanda b .

3. Mercats

- **Condicció d'equilibri en el mercat de bons.** Designant per B la quantitat total de bons que el govern emet en el període t considerat, l'equilibri en el mercat de bons resulta de la igualtat entre l'oferta B de bons i la demanda total nb de bons. Per tant,

$$B = nb. \quad (1)$$

- **Condicció d'equilibri pressupostari del govern (des de $t = 2$).** El govern assoleix l'equilibri pressupostari si s'igualen ingressos i despeses del govern. Els ingressos coincideixen amb la recaptació npb derivada de l'emissió de bons: n joves compren b bons i paguen p unitats de bé per bo. Les despeses es redueixen a pagar el deute generat pels bons emesos en el període anterior. Emetre B_{-1} bons en el període anterior significa haver de pagar B_{-1} unitats del bé en el període present. En resum, la condició d'equilibri pressupostari és

$$B_{-1} = npb. \quad (2)$$

- **Càlcul del preu dels bons.** Multiplicant per p els dos costats d'(1), $pB = pnb$. Combinant aquesta equació amb (2),

$$B_{-1} = pB. \quad (3)$$

La condició (3) diu que el deute arrossegat del període anterior es paga amb el valor de les noves emissions de deute (de bons).

De (2) i la demanda de bons $b = 1/2p$ se segueix que

$$B_{-1} = npb = np \frac{1}{2p} = \frac{n}{2}.$$

Atès que el mateix argument valdria pel següent període (on B passaria a ser B_{-1}), es conclou que

$$B = \frac{n}{2}.$$

Emprant (3) tot sabent que $B = B_{-1}$, es dedueix que

$$p = 1.$$

- **Càlcul de l'assignació d'equilibri.** Amb $p = 1$, $b = 1/2p = 1/2$. Per la restricció de jove, $c = 1 - b = 1/2$. Per la restricció de gran, $c' = b = 1/2$.

- **Eficiència de l'assignació d'equilibri.** L'assignació d'equilibri $(c, c') = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ és Paretoeficient. Si una persona fos lliure de distribuir el seu consum, triaria el parell (c, c') que soluciona

$$\begin{array}{ll} \text{maximitzar} & u = c \cdot c' \\ \text{sotmès a} & c + c' = 1. \end{array}$$

Aquesta solució seria Paretoeficient. Si es calcula, s'observarà que coincideix amb la d'equilibri.

4. Variant 1: l'emissió de bons finança una pensió de τ unitats de bé pagada a cada gran

- **Pensió.** En aquesta variant es manté el mercat de deute públic però ara aquest deute té com a finalitat finançar una pensió de τ unitats del bé pagada cada període a tota persona gran. Es deixa com a exercici analitzar el cas en què els grans no saben que rebran la pensió. A continuació es considera el cas en què hom sap que rebrà la pensió de gran.

- **Funció de demanda de bons.** Tot jove s'enfronta al següent problema:

$$\begin{array}{lll} \text{maximitzar} & u = c \cdot c' & \\ \text{sotmès a} & c + pb = 1 & \text{(restricció present, de jove)} \\ & c' = b + \tau & \text{(restricció futura, de gran)} \end{array}$$

Després d'introduir les dues restriccions en la funció objectiu, el problema esdevé un de

$$\begin{array}{ll} \text{maximitzar} & u = (1 - pb) \cdot (b + \tau) \\ \text{respecte de} & b \end{array}$$

La funció de demanda de bons resultant és

$$b = \frac{1 - \tau p}{2p} = \frac{1}{2p} - \frac{\tau}{2}.$$

(4)

La demanda de bons d'un jove depèn negativament tant del preu dels bons com de la pensió.

• **Condicció d'equilibri en el mercat de bons.** Designant per B la quantitat total de bons que el govern emet en el període t considerat, l'equilibri en el mercat de bons resulta de la igualtat entre l'oferta B de bons i la demanda total nb de bons. En conseqüència,

$$B = n \cdot b. \quad (5)$$

• **Condicció d'equilibri pressupostari del govern (des de $t = 2$).** Equilibri pressupostari vol dir igualtat d'ingressos i despeses del govern. Cada període, l'ingrés és la recaptació npb per l'emissió de bons. Les despeses de cada període tenen dos components: el pagament $n\tau$ de pensions i el pagament del deute B_{-1} generat en el període anterior. La condició d'equilibri pressupostari és

$$B_{-1} + n\tau = npb. \quad (6)$$

• **Determinació de la dinàmica d'acumulació deute.** Multiplicant per p els dos costats de (5), $pB = pnb$. Combinant aquesta equació amb (6),

$$B_{-1} + n\tau = pB. \quad (7)$$

L'expressió (7) diu que el deute arrossegat del període anterior més les pensions del període present es paguen amb el valor de les noves emissions de bons.

De (6) i la funció de demanda de bons (4) se segueix que

$$B_{-1} + n\tau = np \frac{1 - \tau p}{2p}$$

o, equivalentment,

$$B_{-1} = \frac{n}{2} (1 - \tau(2 + p)).$$

Aïllant p ,

$$p = \frac{n(1 - 2\tau) - 2B_{-1}}{n\tau}. \quad (8)$$

La condició (7) fa que

$$B = \frac{1}{p} (B_{-1} + n\tau).$$

Inserint (8),

$$B = \frac{n\tau(B_{-1} + n\tau)}{n(1 - 2\tau) - 2B_{-1}}. \quad (9)$$

L'expressió (9) traça la dinàmica d'acumulació de deute públic. La primera derivada és

$$\frac{dB}{dB_{-1}} = \frac{n\tau(n(1-2\tau) - 2B_{-1}) + 2n\tau(B_{-1} + n\tau)}{(n(1-2\tau) - 2B_{-1})^2} = \frac{n^2\tau}{(n(1-2\tau) - 2B_{-1})^2}$$

que sempre pren un valor positiu.

Conclusió: la funció (9) és creixent. Per tant, un increment del deute passat B_{-1} es tradueix en un augment del deute futur B i una reducció B_{-1} en porta a una disminució de B .

La segona derivada de (9) és

$$\frac{d^2B}{dB_{-1}^2} = \frac{4n^2\tau(n(1-2\tau) - 2B_{-1})}{(n(1-2\tau) - 2B_{-1})^4} = \frac{4n^2\tau}{(n(1-2\tau) - 2B_{-1})^3}.$$

La funció (9) té sentit per a valors no negatius de B . Això implica que el denominador no pot ser negatiu. Per consegüent,

$$B_{-1} < \frac{n}{2}(1-2\tau).$$

La desigualtat anterior indica que hi ha un límit d'endeutament públic i també un límit del valor de la pensió ($\tau < 1/2$). Una altra implicació és que el signe de la segona derivada és positiu i, com a resultat, la funció (9) és convexa.

La Fig. 1 representa la funció (9) amb la presumpció que $B_{-1} < n \cdot (1 - 2 \cdot \tau)/2$. La corba no passa per l'origen perquè $B_{-1} = 0$ implica, assumint $\tau < 1/2$, $B = n \cdot \tau^2 / (1 - 2 \cdot \tau) > 0$. Si el deute inicialment pren el valor B_0 , (9) estableix el següent valor B_1 (que serà inferior a B_0), i el següent valor B_2 (que serà inferior a B_1) i així successivament. La representació gràfica suggereix que aquest procés d'emissió de bons i d'acumulació de deute (cal recordar que B és en un període bons i en el següent béns) convergeix a algun dels dos valors $\hat{B}_1$ i $\hat{B}_2$ on intersequen la corba i la diagonal principal (els valors $\hat{B}_1$ i $\hat{B}_2$ representen estats estacionaris de la trajectòria d'acumulació de deute (9)).

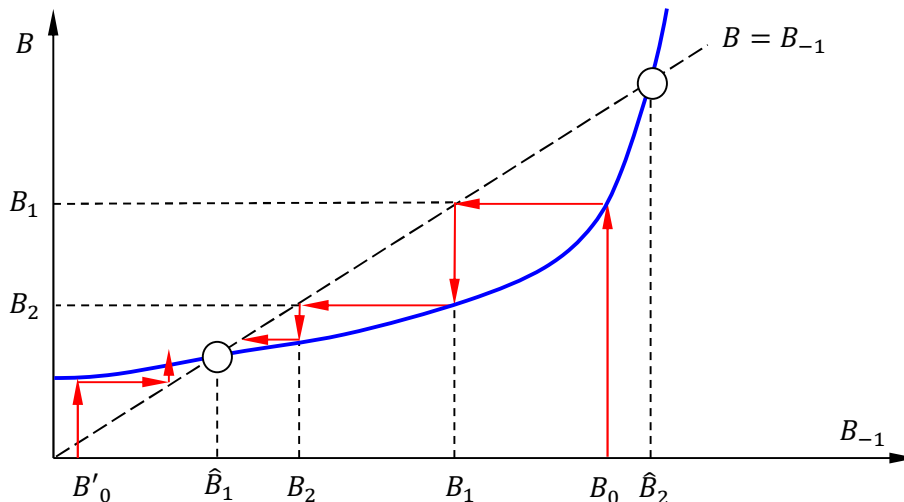


Fig. 1. Dinàmica del deute públic i estats estacionaris de la dinàmica

En la gràfica superior, si el valor inicial és B_0 , es convergiria a $\hat{B}_1$. També es convergiria a $\hat{B}_1$ si el valor inicial fos inferior a $\hat{B}_1$ (com ara B'_0). Es deixa verificar que si el valor inicial del deute és superior a $\hat{B}_2$ no hi ha convergència: el deute creix exponencialment. Per tant, $\hat{B}_2$ representa un estat estacionari inestable, mentre que $\hat{B}_1$ en representaria un d'estable: partint de valors del deute prou propers a $\hat{B}_1$, la dinàmica (9) retorna el deute al valor $\hat{B}_1$.

Els estats estacionaris $\hat{B}_1$ i $\hat{B}_2$ del deute van associats amb punts on es creuen la funció (9) i la diagonal principal $B = B_{-1}$. Aquesta diagonal expressa la condició d'estacionarietat: que el valor del deute es manté constant. Per tot plegat, $\hat{B}_1$ i $\hat{B}_2$ serien les solucions del sistema d'equacions

$$B = \frac{n \cdot \tau \cdot (B_{-1} + n \cdot \tau)}{n \cdot (1 - 2 \cdot \tau) - 2 \cdot B_{-1}}$$

$$B = B_{-1}.$$

Combinant les equacions i definint $\hat{B} = B = B_{-1}$,

$$2 \cdot \hat{B}^2 + \hat{B} \cdot n \cdot (3 \cdot \tau - 1) + n^2 \cdot \tau^2 = 0.$$

Fent els càlculs, $\hat{B}_1$ i $\hat{B}_2$ són els dos valors que pren la fórmula

$$\hat{B} = \frac{n \cdot (1 - 3 \cdot \tau) \pm (\tau^2 - 6 \cdot \tau + 1)^{1/2}}{4}.$$

5. Variant 2: una pensió de τ unitats de bé pagada a cada gran es finança amb bons i impostos

- **Imposts.** En aquesta variant es manté el mercat de deute públic; el deute té com a finalitat finançar una pensió de τ unitats del bé pagada cada període a tota persona gran; i, a més, els joves han de contribuir al finançament de la pensió. En particular, s'assumeix que els joves han de pagar la mateixa quantitat τ de bé que el govern els transferirà de grans. Com a la variant 1, hom sap que rebrà la pensió de gran.

- **Funció de demanda de bons.** Tot jove s'enfronta al problema de

$$\begin{array}{ll} \text{maximitzar} & u = c \cdot c' \\ \text{sothès a} & c + pb + \tau = 1 \quad (\text{restricció present, de jove}) \\ & c' = b + \tau \quad (\text{restricció futura, de gran}) \end{array}$$

Equivalentment, cal

$$\begin{array}{ll} \text{maximitzar} & u = (1 - pb - \tau) \cdot (b + \tau) \\ \text{respecte de } b & \end{array}$$

Exercici. Calcula la trajectòria d'acumulació del deute i compara-la amb la de la variant 1.