

16. Deute públic en una societat heterogènia

1. Descripció de l'economia

- Hi ha un únic bé que no es pot produir ni acumular.
- Cada període neixen dos grups de persones, G1 i G2, cadascú amb n membres. Hom viu dos períodes consecutius.
- Tota persona jove té la funció d'utilitat $u = c \cdot c'$, on és c el consum del bé de jove i c' el consum de gran. Tota persona gran té la funció d'utilitat $u' = c'$.
- La dotació de cada membre de G1 és (1, 0): una unitat de jove i cap de gran. La dotació de cada membre de G2 és (2, 2): dues unitats de jove i dues de gran.
- No hi ha mercat de préstecs privat.
- Hi ha un agent immortal: un govern. Cada període, des de $t = 1$, el govern emet bons: títols de deute que, a canvi de pagar un preu de p unitats del bé per bo en el període t , prometen pagar (per cada bo comprat en t) una unitat de bé en el següent període $t + 1$. Hom creu que el govern pagarà el seu deute. El govern dilapida els ingressos de la primera emissió de bons i el pagament del deute cada període es fa emetent més bons: el deute públic es refinança amb més deute.

2. Decisions

- **Decisió de comprar bons dels joves de G1.** Cada jove de G1 s'enfronta al problema de

$$\begin{array}{lll} \text{maximitzar} & u_1 = c_1 \cdot c_1' & \\ \text{sotmès a} & c_1 + p b_1 = 1 & \text{(restricció present, de jove)} \\ & c_1' = b_1 & \text{(restricció futura, de gran)} \end{array}$$

on c_1 és el consum present de l'individu (de jove), c_1' és el consum del període següent (de gran), b_1 és la quantitat de bons que l'individu demanda i p és el preu (en unitats de bé) d'un bo. Introduint les dues restriccions en la funció objectiu el problema es transforma en un de

$$\begin{array}{ll} \text{maximitzar} & u_1 = (1 - p b_1) \cdot b_1 \\ \text{respecte de } b_1 & \end{array}$$

La funció de demanda de bons resultant és

$$b_1 = \frac{1}{2p}.$$

- **Decisió de comprar bons dels joves de G2.** Cada jove de G2 s'enfronta al problema de

$$\begin{array}{lll} \text{maximitzar} & u_2 = c_2 \cdot c_2' & \\ \text{sotmès a} & c_2 + pb_2 = 2 & (\text{restricció present, de jove}) \\ & c_2' = 2 + b_2 & (\text{restricció futura, de gran}) \end{array}$$

on c_2 és el consum present de l'individu (de jove), c_2' és el consum del període següent (de gran), b_2 és la quantitat de bons que l'individu demanda i p és el preu (en unitats de bé) d'un bo. Inserint les dues restriccions en la funció objectiu el problema esdevé

$$\begin{array}{ll} \text{maximitzar} & u_2 = (2 - pb_2) \cdot (2 + b_2) \\ \text{respecte de } & b_2 \end{array}$$

La funció de demanda de bons resultant és

$$b_2 = \frac{1-p}{p}.$$

3. Mercats

• **Condició d'equilibri en el mercat de bons.** Designant per B la quantitat total de bons que el govern emet en el període t considerat, l'equilibri en el mercat de bons resulta de la igualtat entre l'oferta B de bons i la demanda total nb de bons. Per tant,

$$B = nb_1 + nb_2. \quad (1)$$

• **Condició d'equilibri pressupostari del govern (des de $t = 2$).** Hi ha equilibri pressupostari quan s'igualen ingressos i despeses del govern. Els ingressos del període coincideixen amb la recaptació $npb_1 + npb_2$ per l'emissió de bons: n persones compren b bons i paguen p unitats de bé per bo. Les despeses del període es limiten al pagament del deute generat pels bons emesos en el període anterior. Emetre B_{-1} bons en el període anterior significa haver de pagar B_{-1} unitats del bé en el període present. En resum, la condició d'equilibri pressupostari és

$$B_{-1} = npb_1 + npb_2. \quad (2)$$

• **Càlcul del preu dels bons.** Multiplicant per p els dos costats de l'equació (1), $pB = pnb_1 + pnb_2$. Combinant aquesta equació amb (2),

$$B_{-1} = pB. \quad (3)$$

La condició (3) diu que el deute arrossegat del període anterior es paga amb més deute (nova emissió de bons). Aquesta condició expressarà la trajectòria d'acumulació del deute un cop s'hi hagi introduït la fórmula que especifica el valor de p en funció dels paràmetres del model. Amb aquest objectiu, es tractaria de trobar la fórmula de p a partir de (2) i després substituir p en (3).

De (2) i les funcions de demanda de bons $b_1 = \frac{1}{2p}$ i $b_2 = \frac{1-p}{p}$ se segueix que

$$B_{-1} = np \frac{1}{2p} + np \frac{1-p}{p} = n \left(\frac{3}{2} - p \right).$$

Aïllant p s'obté la fórmula que expressa p en termes de paràmetres:

$$p = \frac{3}{2} - \frac{B_{-1}}{n}.$$

• **Dinàmica del deute públic.** Si l'equació anterior s'introdueix en (3) i s'aïlla B , s'obté l'expressió de la trajectòria d'acumulació del deute públic:

$$B = \frac{2nB_{-1}}{3n - 2B_{-1}}. \quad (4)$$

• **Obtenció dels estats estacionaris de la trajectòria d'acumulació del deute públic.** La funció (4) és creixent i convexa si $B_{t-1} < 3n/2$, ja que la primera derivada

$$\frac{dB_t}{dB_{t-1}} = \frac{6n^2}{(3n - 2B_{t-1})^2}$$

pren sempre un valor positiu i la segona derivada

$$\frac{d^2B_t}{dB_{t-1}^2} = \frac{24n^2}{(3n - 2B_{t-1})^3}$$

pren un valor positiu si $B_{t-1} < \frac{3n}{2}$ (aquesta desigualtat és una mena de restricció del deute per càpita: $\frac{B_{t-1}}{2n} < \frac{3}{4}$, on es considera com a població els $2n$ demandants joves de deute). La Fig. 1 representa gràficament (4) en el domini $0 \leq B_{t-1} < \frac{3n}{2}$.

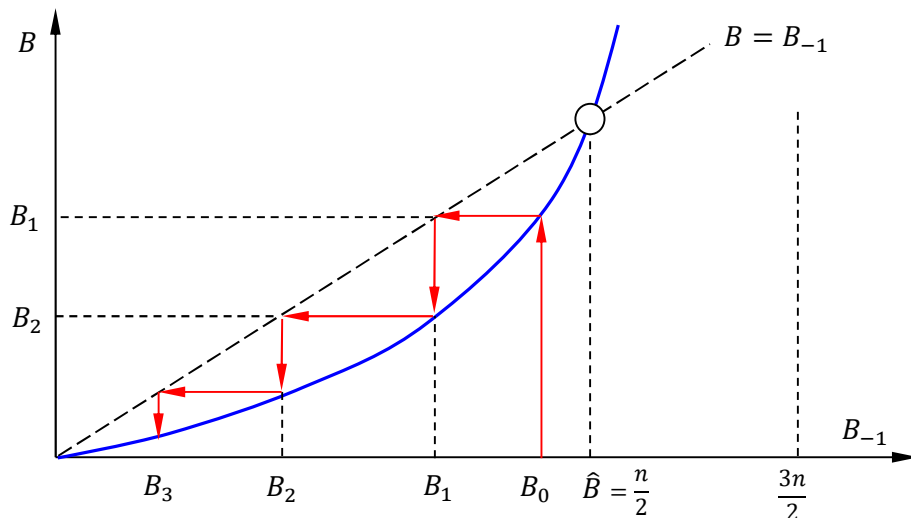


Fig. 2. Dinàmica del deute públic i estats estacionaris de la dinàmica

Els estats estacionari de (4) s'obtenen solucionant el sistema d'equacions

$$B = \frac{2nB_{-1}}{3n - 2B_{-1}}$$

$$B = B_{-1}.$$

Gràficament, els estats estacionaris s'associen amb els punts d'intersecció entre la corba que representa la trajectòria d'acumulació del deute i la diagonal principal. La Fig. 1 mostra que només hi ha un valor positiu del deute d'estat estacionari: $\hat{B} = n/2$. Hi ha un segon valor del deute en un estat estacionari, però és un valor trivial: $B = 0$ (l'origen de la gràfica).

La Fig. 1 també suggereix que el valor $\hat{B}$ no representa un estat estacionari estable. Si, per exemple, el valor inicial del deute és $B_0 < \hat{B}$, aleshores el procés d'acumulació del deute no fa retornar el volum de deute a B_0 , sinó que redueix el deute fins a zero. Es comprova fàcilment sobre la gràfica que si $B_0 > \hat{B}$, aleshores el deute creix exponencialment, sense aturador.

D'aquesta anàlisi es conclou que en l'únic estat estacionari estable del deute $B = 0$.

Això són bones notícies per a l'emissor del deute: si no és excessiu (això és, si el volum de deute mai no assoleix el valor $\frac{3n}{2}$), llavors el refinançament del deute l'acaba eventualment eixugant.

El valor $\hat{B}$ s'obté resolent l'equació

$$\hat{B} = \frac{2n\hat{B}}{3n - 2\hat{B}}.$$

Hi ha dos valors que satisfan l'equació:

$$\hat{B} = 0$$

i

$$\hat{B} = \frac{n}{2}.$$