

21. Producció sense remuneracions competitives

1. Descripció de l'economia

- Hi ha un únic bé que es pot produir i acumular.
- Cada període neixen n persone, que viuen dos períodes consecutius.
- Tot jove té la funció d'utilitat $u = c \cdot (c')^\beta$, on $\beta > 0$, c és el consum del bé de jove i c' el consum de gran. Tota persona gran té la funció d'utilitat $u' = c'$.
- Hi ha dos factors de producció: 'treball' (el serveis de producció que proporcionen les persones) i 'capital' (bé acumulat que representa mitjans de producció físics).
- El treball no és acumulable: només es pot fer servir en el període en què se'n disposa.
- No hi ha mercat de préstecs del bé.
- Tot jove té una unitat de treball com a dotació. Les persones grans no tenen dotació de treball.
- Hi ha una funció de producció agregada que indica la quantitat total Y del bé que es produeix durant un període t a partir de la quantitat total de treball L disponible en t i la quantitat total de capital K disponible en t . L'expressió que defineix la funció de producció en cada període és, amb $0 < \alpha < 1$,

$$Y = K^\alpha \cdot L^{1-\alpha}.$$

2. Anàlisi competitiva

- Si s'assumeix que hi ha mercats de treball i de capital, i que ambdós són competitiu, el salari ω coincidirà amb la productivitat marginal del treball segons la funció de producció i la remuneració σ del capital serà igual a la productivitat marginal del capital, també segons la funció de producció.

- **Decisions d'acumulació de capital dels joves.** Tot jove s'enfronta al problema de

$$\begin{array}{lll} \text{maximitzar} & u = c \cdot (c')^\beta & \\ \text{sotmès a} & c + k' = 1 \cdot \omega & \text{(restricció present, de jove)} \\ & c' = \sigma' \cdot k' & \text{(restricció futura, de gran)} \end{array}$$

on

- c és el consum de jove,
- c' és el consum de gran,
- k' és el volum de bé acumulat de jove en forma de capital però que es fa servir de gran,
- ω és el salari (el preu del factor treball) de jove i
- σ' és el preu del factor capital quan les persones són grans.

El problema es pot resoldre directament introduint les restriccions pressupostàries en la funció utilitat. Així, tot jove vol

$$\text{maximitzar } u = (\omega - k') \cdot (\sigma' k')^\beta \quad \text{respecte de } k'.$$

Per la hipòtesi que els mercats són competitius, hom pren ω i σ' com a dades sobre les que no es té influència. Per això, el problema anterior és equivalent a

$$\text{maximitzar } u = (\omega - k')k' \quad \text{respecte de } k'.$$

La solució:

$$k' = \omega \frac{\beta}{1 + \beta}.$$

En conseqüència, tot jove estalvia una proporció fixa $\frac{\beta}{1+\beta}$ del salari que rep en forma de capital.

• **Preu del factor treball.** La productivitat marginal del treball és la derivada de la funció de producció de l'economia respecte del treball:

$$\omega = PMg_L = \frac{dY}{dL} = \frac{d(K^\alpha L^{1-\alpha})}{dL} = K^\alpha \frac{d(L^{1-\alpha})}{dL} = (1 - \alpha)K^\alpha L^{-\alpha} = (1 - \alpha) \left(\frac{K}{L}\right)^\alpha.$$

Aquest resultat és vàlid cada període.

• **Preu del factor capital.** La productivitat marginal del capital és la derivada de la funció de producció de l'economia respecte del capital:

$$\sigma = PMg_K = \frac{dY}{dK} = \frac{d(K^\alpha L^{1-\alpha})}{dK} = L^\alpha \frac{d(K^\alpha)}{dK} = \alpha L^{1-\alpha} K^{\alpha-1} = \alpha \left(\frac{L}{K}\right)^{1-\alpha}.$$

Aquest resultat és vàlid cada període.

• **Quantitat total de factors cada període.** Cada període hi ha n persones joves i n de grans. Això fa que la quantitat total de factor treball cada període sigui

$$n \cdot 1 + n \cdot 0 = n.$$

D'aquí es dedueix que $L' = L$.

Amb relació al capital, els grans són els únics que n'aporten cada període. En conseqüència, la quantitat total K de factor capital existent en un període donat és $n \cdot k$.

• **Càlculs dels preus dels factors de producció.** Recuperant la fórmula de retribució del salari,

$$\omega = (1 - \alpha) \left(\frac{K}{L} \right)^\alpha = (1 - \alpha) \left(\frac{nk}{n} \right)^\alpha = (1 - \alpha) k^\alpha.$$

Així,

$$k' = \omega \frac{\beta}{1 + \beta} = \frac{\beta(1 - \alpha)}{1 + \beta} k^\alpha$$

estableix la trajectòria d'acumulació del capital (per càpita). En l'estat estacionari amb capital positiu, el capital és

$$\bar{k} = \left(\frac{\beta(1 - \alpha)}{1 + \beta} \right)^{\frac{1}{1 - \alpha}}.$$

3. Anàlisi no competitiva

• Les hipòtesis que reemplacen la condició que els mercats de treball i de capital siguin competitius són:

- la producció es reparteix entre treball i capital ($Y = \sigma \cdot K + \omega \cdot L$, on σ és la remuneració del capital i ω la del treball); i
- una regla de distribució que estableix que la remuneració total del capital és un múltiple (fix) de la remuneració total del treball (hi ha una constant positiva π tal que $\sigma \cdot K = \pi \cdot (\omega \cdot L)$).

La regla de distribució també pot expressar-se com

$$\pi = \frac{\sigma \cdot K}{\omega \cdot L}$$

indicant-ne que les proporcions que del producte total s'emporten treball i capital són fixes (alternativament, es podria postular que la relació entre les remuneracions unitàries (no les totals) és sempre la mateixa: $\pi = \frac{\sigma K}{\omega L}$).

Per a cada persona, continua sent cert que vol acumular

$$k' = \omega \frac{\beta}{1 + \beta}.$$

La diferència és com es determina el salari ω . Ara, sabent que

$$Y = \sigma K + \omega L$$

i que

$$\sigma K = \pi \cdot (\omega L)$$

es conclou que

$$Y = (1 + \pi) \cdot \omega \cdot L.$$

Aïllant ω i inserint-ne la funció de producció, s'obté

$$\omega = \frac{Y}{(1+\pi)L} = \frac{K^\alpha L^{1-\alpha}}{(1+\pi)L} = \frac{1}{1+\pi} \cdot \frac{K^\alpha}{L^\alpha} = \frac{1}{1+\pi} \cdot \frac{(nk)^\alpha}{n^\alpha} = \frac{1}{1+\pi} k^\alpha$$

i, en conclusió,

$$k' = \omega \frac{\beta}{1+\beta} = \frac{\beta}{(1+\pi)(1+\beta)} k^\alpha.$$

Aquesta trajectòria queda per damunt de la trajectòria competitiva si

$$\frac{\beta}{(1+\pi)(1+\beta)} > \frac{\beta(1-\alpha)}{1+\beta};$$

això és, si

$$\pi < \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

(Cal recordar que, com més gran π , més part del pastís del producte rep el capital).

En l'estat estacionari amb capital positiu, el capital pren el valor

$$\bar{k} = \left(\frac{\beta}{(1+\pi) \cdot (1+\beta)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$